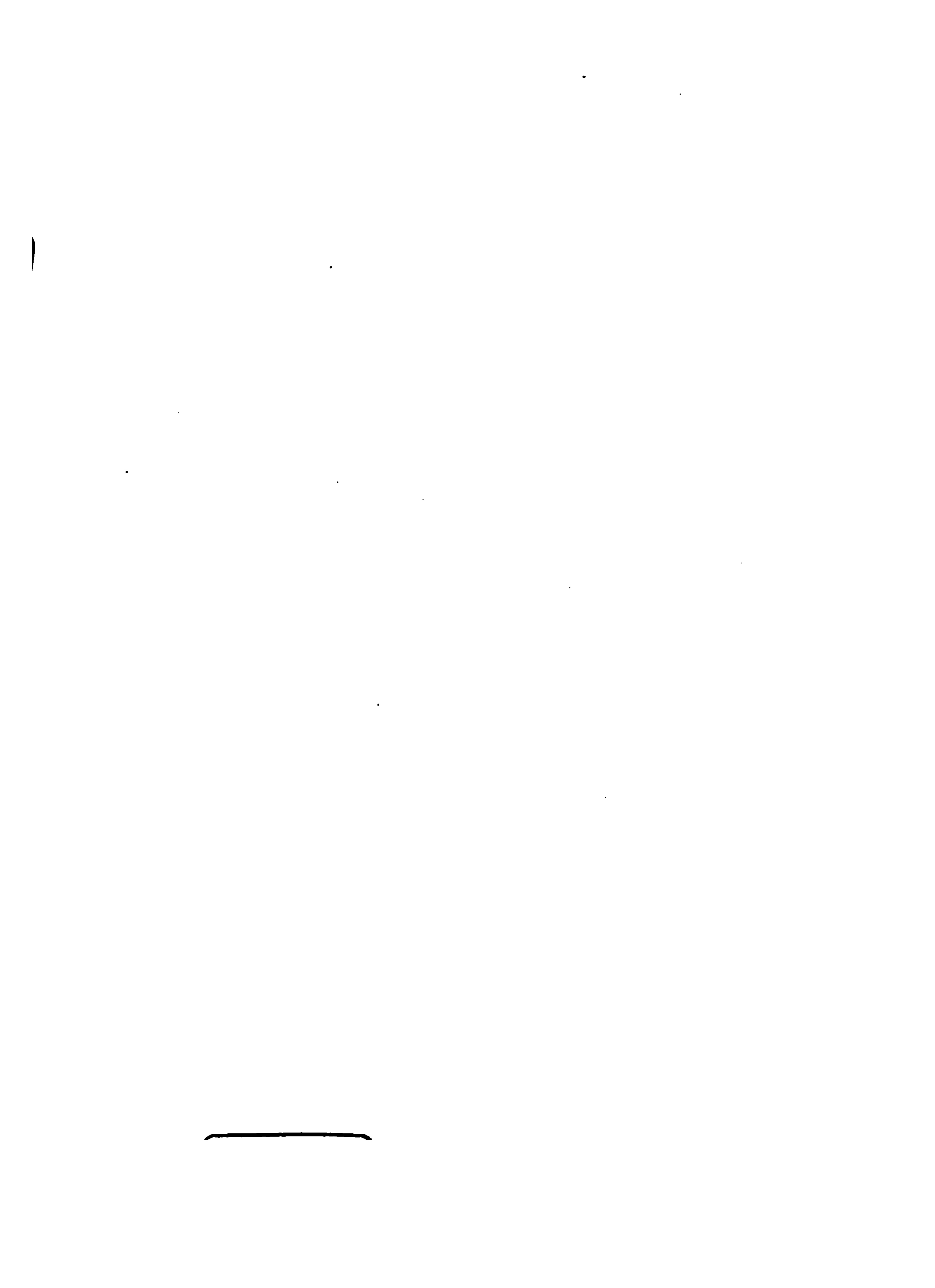




Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

Als Fortsetzung des von

A. L. Crelle

gegründeten Journals

herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Schellbach, Kummer, Kronecker, Weierstrass

von

C. W. Borchardt.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preussischer Behörden.

Fünf und sechzigster Band.

In vier Heften.

Berlin, 1866.
Druck und Verlag von Georg Reimer.

Inhaltsverzeichniss des fünf und sechzigsten Bandes.

Druckfehlerverzeichniss.

Band 65.

Pag. 40, Zeile 15 und 16 v. o. Statt des Inhaltes dieser Zeilen bis zum Punkte setze man: $\overset{\gamma}{U}_{a}$ folgt unmittelbar, dass R für $x = x_0$ bei jedem Werthsystem der Constanten $\overset{a,a'}{\lambda}$ den Werth der Einheit annimmt.

Pag. 75, Zeile 9. v. o. statt x lese man x^f.

Pag. 84, Zeile 8. v. u. Im Nenner des Ausdrucks rechts soll der Bruchstrich hinter dem Minus-Zeichen beginnen.

Pag. 97, Zeile 7 v. o. statt „Einheiten der letzteren Art" lese man „rein imaginäre Einheiten".

Pag. 97, Zeile 8. v. o. statt $\frac{E(\omega)}{\mathrm{E}(\omega)^{\zeta}}$ lese man $\frac{E'(\omega)}{\mathrm{E}(\omega)^{\zeta}}$.

Pag. 97, Zeile 10, 25, 29 v. o. statt ω^{e} lese man ω^{-e}.

Pag. 117, Zeile 8 v. o. statt *Bouhet* lese man *Prouhet*.

Transformation von Differentialausdrücken erster Ordnung zweiten Grades mit Hülfe der verallgemeinerten elliptischen Coordinaten.

(Von Herrn *O. Henrici* zu Kiel.)

Herr *Hesse* hat in der einundzwanzigsten und zweiundzwanzigsten Vorlesung seiner analytischen Geometrie des Raumes bei der algebraischen Behandlung des Problems der Hauptaxen der Curven und Oberflächen zweiter Ordnung die Relationen zwischen den rechtwinkligen und elliptischen Plan- oder Raumcoordinaten aufgestellt und die Relationen zwischen den Differentialen derselben auf eine Form gebracht, welche die Transformation gewisser Differentialausdrücke durch Einführung der elliptischen statt der rechtwinkligen Coordinaten auf das Engste an das genannte Problem knüpft, indem diese Transformation auf diejenige lineare Substitution zurückgeführt wird, welche jenes Problem löst. Das Verfahren ist für die Plancoordinaten kurz das folgende.

Es werden zuerst die linearen Substitutionen

$$(1.)\qquad X = a^0x+b^0y,\qquad Y = a'x+b'y$$

so bestimmt, dass sie die Gleichungen

$$(2.)\quad x^2+y^2 = X^2+Y^2,\ \ \varphi(x,y) = (\beta_0x+\beta_1y)^2-(\alpha_0x^2-\alpha_1y^2) = \lambda_0X^2+\lambda_1Y^2$$

zu identischen machen. Die λ erscheinen dann als Wurzeln der in λ quadratischen Gleichung

$$\psi(\lambda) = \frac{\beta_0^2}{\alpha_0+\lambda}+\frac{\beta_1^2}{\alpha_1+\lambda}-1 = 0,$$

so dass, wenn wir β_0, β_1 rechtwinklige Coordinaten sein lassen, die Wurzeln λ_0, λ_1 als elliptische Plancoordinaten erscheinen. Es wird darauf p. 245 des genannten Werkes gezeigt, dass die Relationen zwischen den Differentialen der β und λ, wie sie aus

$$(3.)\qquad \psi(\lambda_0) = 0,\qquad \psi(\lambda_1) = 0$$

folgen, auf die Form der Substitution (1.) gebracht werden können, dass nämlich

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\lambda_0-\lambda_1}\frac{d\lambda_0}{\sqrt{L_0}} = a^0d\beta_0+b^0d\beta_1,\quad \tfrac{1}{2}\sqrt{\lambda_1-\lambda_0}\frac{d\lambda_1}{\sqrt{L_1}} = a'd\beta_0+b'd\beta_1$$

wird, wo L_0 und L_1 die Werthe von $L = (\alpha_0+\lambda)(\alpha_1+\lambda)$ für $\lambda = \lambda_0$ und $\lambda = \lambda_1$ bezeichnen. Diese Gleichungen, welche Folge von (3.) sind, gehen aus den Substitutionen (1.) hervor, wenn man

$$(4.)\qquad x = d\beta_0,\quad y = d\beta_1,\quad X = \tfrac{1}{2}\sqrt{\lambda_0-\lambda_1}\,\frac{d\lambda_0}{\sqrt{L_0}},\quad Y = \tfrac{1}{2}\sqrt{\lambda_1-\lambda_0}\,\frac{d\lambda_1}{\sqrt{L_1}}$$

setzt. Führt man diese Werthe in (1.) ein, so werden jene Substitutionen durch die Gleichungen (3.) erfüllt, und dasselbe gilt von allen Gleichungen zwischen den x, y und X, Y, welche durch die Substitutionen (1.) zu identischen werden: sie gehen durch Einsetzen der Werthe (4.) in Differentialformeln über, welche Folgen der Gleichungen (3.) sind.

Solche durch (1.) identische Gleichungen sind die beiden unter (2.), mittelst deren wir durch Einsetzen der Werthe (4.) $d\beta_0^2+d\beta_1^2$ und $\varphi(d\beta_0, d\beta_1)$ sofort durch die Grössen λ_0 und λ_1 ausgedrückt erhalten. Hier hat $\varphi(x,y)$ die Form $F(x, y, -(\beta_0 x+\beta_1 y))$, wenn $F(u, v, w) = -\alpha_0 u^2-\alpha_1 v^2+w^2$. Da nun, falls A die Determinante von $\varphi(x,y)$ bezeichnet, $\frac{1}{A}\varphi(-y, x)$ die reciproke Function von $\varphi(x,y)$ ist, so wird auch die Gleichung

$$\frac{1}{A}(-y, x, \beta_0 y-\beta_1 x) = \frac{X^2}{\lambda_0}+\frac{Y^2}{\lambda_1},$$

welche aus den reciproken Functionen der beiden Seiten der zweiten Gleichung (2.) gebildet ist, durch (1.) identisch, weil diese Substitution eine orthogonale ist. Führen wir hier die Werthe (4.) ein, so ergiebt sich, dass die Differentialgleichung

$$(5.)\qquad F(-d\beta_1, d\beta_0, \beta_0 d\beta_1-\beta_1 d\beta_0) = (\beta_0 d\beta_1-\beta_1 d\beta_0)^2-\alpha_0 d\beta_1^2-\alpha_1 d\beta_0^2 = 0$$

in

$$(\lambda_0-\lambda_1)\Big(\frac{d\lambda_0^2}{\lambda_0 L_0}-\frac{d\lambda_1^2}{\lambda_1 L_1}\Big) = (\lambda_0-\lambda_1)\Big(\frac{d\lambda_0}{\sqrt{\lambda_0 L_0}}-\frac{d\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1 L_1}}\Big)\Big(\frac{d\lambda_0}{\sqrt{\lambda_0 L_0}}+\frac{d\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1 L_1}}\Big) = 0$$

übergeht, wenn die β mittelst (3.) durch λ_0 und λ_1 ersetzt werden, dass also ihre Integration durch diese Transformation auf Quadraturen zurückgeführt ist. In derselben Weise leitet man aus allen andern Gleichungen, welche durch (1.) identisch werden, entsprechende Transformationen von Differentialausdrücken ab.

Mein hochverehrter Lehrer, Herr Prof. *Hesse*, stellte nun im Wintersemester 18$\frac{6}{6}\frac{3}{4}$ im Heidelberger mathematischen Seminar die Aufgabe, die analoge Transformation der Differentialgleichung (5.) für den Fall auszuführen, wo $F(u, v, w)$ eine allgemeine quadratische Form bezeichnet. In der damals

von mir eingereichten Lösung führte ich diesen allgemeinen Fall durch lineare Substitution der Form $F(u, v, w)$ auf jenen speciellen zurück, nachdem die Grösse $\psi(\lambda)$, deren Verschwinden die Substitution (3.) liefert, als reciproke Function und die in (4.) eintretende Grösse L als Determinante von $F(u, v, w) - \lambda(u^2+v^2)$ dargestellt war. Hierzu bedurfte die von Herrn *Hesse* zur Ableitung der Gleichungen (4.) angestellte Rechnung nur einer geringen Modification; diese Rechnung selbst ist aber etwas weitläufig, selbst für den obigen speciellen Fall, und in sehr erhöhtem Grade, wenn man dasselbe Verfahren auf Functionen mit mehr Variabeln ausdehnen will. Bei weiterer Beschäftigung mit diesem Gegenstande fand ich jedoch, dass sich dieselbe vermöge der Eigenschaften der Substitution (1.) bedeutend abkürzen und mit derselben auch dann ausführen lässt, wenn man für $F(u, v, w)$ eine homogene Function zwischen $n+1$ Variabeln und für u^2+v^2 oder x^2+y^2 in (2.) eine ebenso allgemeine Function nimmt.

Diese Verallgemeinerung der obigen Methode zur Transformation gewisser Differentialausdrücke, sowie die Integration eines Systems von $n-1$ Differentialgleichungen erster Ordnung zweiten Grades zwischen n Variabeln bilden den Inhalt des Folgenden.

§. 1.

Der beabsichtigten Transformation liegt das sehr bekannte algebraische Problem zu Grunde:

Man soll diejenigen linearen Substitutionen bestimmen, welche die Gleichungen

$$(1.)\quad F(y_1, y_2, \dots y_n) = \Sigma A_{\varkappa\lambda} y_\varkappa y_\lambda = \lambda_1 Y_1^2 + \lambda_2 Y_2^2 + \dots + \lambda_n Y_n^2,$$

$$(2.)\quad F_0(y_1, y_2, \dots y_n) = \Sigma B_{\varkappa\lambda} y_\varkappa y_\lambda = Y_1^2 + Y_2^2 + \dots + Y_n^2$$

zu identischen machen.

Aus der grossen Reihe von Arbeiten, worin dies Problem behandelt wird, erwähne ich zwei, nämlich die Abhandlung von *Jacobi:* De binis quibuslibet etc. (dieses Journal Bd. 12) und die Abhandlung des Herrn *Weierstrass* (Berichte der Berl. Akad. 1858), in welcher die Ausnahmefälle, wenn bei der gewöhnlichen Behandlung mehrere der Coefficienten λ einander gleich werden, mit berücksichtigt sind. Ich führe hier diejenigen Resultate der Lösung an, welche im Folgenden gebraucht werden.

Die Substitutionen mit ihren Auflösungen seien

$$(3.)\qquad y_i = \gamma_{i1}Y_1+\gamma_{i2}Y_2+\cdots+\gamma_{in}Y_n,$$
$$(3'.)\qquad Y_k = \delta_{1k}y_1+\delta_{2k}y_2+\cdots+\delta_{nk}y_n,$$

ferner seien (A), (B), $(\varDelta)$ die Determinanten der Functionen F, F_0 und $F-\lambda F_0$, also

$$(4.)\qquad \begin{cases}(A)=\Sigma\pm A_{11}A_{22}\dots A_{nn}, & (B)=\Sigma\pm B_{11}B_{22}\dots B_{nn},\\ (\varDelta) = \Sigma\pm(A_{11}-\lambda B_{11})(A_{22}-\lambda B_{22})\dots(A_{nn}-\lambda B_{nn}).\end{cases}$$

Dann werden die Coefficienten $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ die Wurzeln der Gleichung

$$(5.)\qquad (\varDelta)=(B).(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\dots(\lambda_n-\lambda)=0.$$

Bezeichnet ausserdem $(\varDelta^{(k)})$ die Determinante $(\varDelta)$ für $\lambda=\lambda_k$, so dass $(\varDelta^{(k)})$ identisch verschwindet, und $(\varDelta^{(k)}_{hi})$ die Unterdeterminante von $(\varDelta^{(k)})$, welche dem Elemente $A_{hi}-\lambda_k B_{hi}$ entspricht, so ist

$$(6.)\qquad \gamma_{1k}:\gamma_{2k}:\dots:\gamma_{nk} = (\varDelta^{(k)}_{h1}):(\varDelta^{(k)}_{h2}):\dots:(\varDelta^{(k)}_{hn})$$

für ein beliebiges Suffix h aus der Reihe 1, 2, ... n, und

$$(7.)\qquad \gamma_{hk}\gamma_{ik}=\frac{(\varDelta^{(k)}_{hi})}{-\frac{\partial(\varDelta^{(k)})}{\partial\lambda}}=\frac{(\varDelta^{(k)}_{hi})}{(B).l_k},$$

wo

$$(8.)\qquad l_k = (\lambda_1-\lambda_k)(\lambda_2-\lambda_k)\dots(\lambda_{k-1}-\lambda_k)(\lambda_{k+1}-\lambda_k)\dots(\lambda_n-\lambda_k).$$

Die transponirte Substitution

$$(9.)\qquad \begin{cases}\eta_i = \delta_{i1}H_1+\delta_{i2}H_2+\cdots+\delta_{in}H_n,\\ H_k = \gamma_{1k}\eta_1+\gamma_{2k}\eta_2+\cdots+\gamma_{nk}\eta_n\end{cases}$$

transformirt die reciproken Functionen von (1.) und (2.). Bedeuten also (α_{ik}) und (β_{ik}) die Unterdeterminanten von (A) und (B), so werden durch (9.) die Gleichungen

$$f(\eta_1,\eta_2,\dots\eta_n)=\frac{1}{(A)}\Sigma(\alpha_{ik})\eta_i\eta_k=\frac{H_1^2}{\lambda_1}+\frac{H_2^2}{\lambda_2}+\cdots+\frac{H_n^2}{\lambda_n},$$

$$f_0(\eta_1,\eta_2,\dots\eta_n)=\frac{1}{(B)}\Sigma(\beta_{ik})\eta_i\eta_k=H_1^2+H_2^2+\cdots+H_n^2$$

zu identischen.

§. 2.

Seien $F(u_1,u_2,\dots u_{n+1})$ und $F_0(u_1,u_2,\dots u_{n+1})$ zwei quadratische Formen der $n+1$ Variabeln $u_1, u_2, \dots u_{n+1}$

$$(1.)\qquad F(u_1,u_2,\dots u_{n+1})=\Sigma a_{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda=(a_{11},a_{12},\dots a_{n+1,n+1})(u_1,u_2,\dots u_{n+1})^2,$$
$$(2.)\qquad F_0(u_1,u_2,\dots u_{n+1})=\Sigma b_{\varkappa\lambda}u_\varkappa u_\lambda=(b_{11},b_{12},\dots b_{n+1,n+1})(u_1,u_2,\dots u_{n+1})^2,$$

so erhält man hieraus, wenn man

(3.) $u_1 = y_1, \; u_2 = y_2, \; \ldots \; u_n = y_n, \; u_{n+1} = y = -(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)$

setzt, quadratische Formen der n Variabeln $y_1, y_2, \ldots y_n$

(4.) $F(y_1, y_2, \ldots y_n, y) = (a_{11}, a_{12}, \ldots a_{n+1,n+1})(y_1, y_2, \ldots y_n, -(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n))^2,$

(5.) $F_0(y_1, y_2, \ldots y_n, y) = (b_{11}, b_{12}, \ldots b_{n+1,n+1})(y_1, y_2, \ldots y_n, -(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n))^2.$

Um auf diese die Transformation des §. 1 anzuwenden, ordne ich nach den y_i:

(4'.) $F(y_1, y_2, \ldots y_n, y) = (A_{11}, A_{12}, \ldots A_{nn})(y_1, y_2, \ldots y_n)^2,$

(5'.) $F_0(y_1, y_2, \ldots y_n, y) = (B_{11}, B_{12}, \ldots B_{nn})(y_1, y_2, \ldots y_n)^2,$

worin

$$(6.) \quad \begin{cases} A_{ik} = a_{ik} - a_{i,n+1}x_k - a_{n+1,k}x_i + a_{n+1,n+1}x_ix_k, \\ B_{ik} = b_{ik} - b_{i,n+1}x_k - b_{n+1,k}x_i + b_{n+1,n+1}x_ix_k. \end{cases}$$

Dann ist unter derselben Bezeichnung, wie in §. 1,

$$(A) = \Sigma \pm A_{11}A_{22}\ldots A_{nn}$$

die Determinante von $F(y_1, y_2, \ldots y_n, y)$ in Bezug auf die n Variabeln $y_1, y_2, \ldots y_n$ genommen, und diese ist bis auf das Vorzeichen identisch mit:

$$(7.) \quad A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & a_{1,n+1} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & a_{2,n+1} & x_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & a_{n,n+1} & x_n \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \ldots & a_{n+1,n} & a_{n+1,n+1} & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Statt diese Determinante aus (4.) abzuleiten, will ich zeigen, dass sie $-(A)$ gleicht. In der That, subtrahirt man die $n+1^{\text{te}}$, also die vorletzte Verticalreihe mit x_1 multiplicirt von der ersten, mit x_2 multiplicirt von der zweiten u. s. f., endlich mit x_n multiplicirt von der n^{ten} Verticalreihe, und verfährt darauf mit den Horizontalreihen ebenso, so geht A unter Berücksichtigung von (6.), und wenn man $C_i = a_{n+1,i} - a_{n+1,n+1}x_i$ setzt, über in

$$A = \begin{vmatrix} A_{11} & \ldots & A_{1n} & C_1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & \ldots & A_{nn} & C_n & 0 \\ C_1 & \ldots & C_n & a_{n+1,n+1} & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{vmatrix},$$

so dass, wie behauptet, die Gleichung besteht:

$$(8.)\qquad (A) = -A.$$

Eine analoge Gleichheit besteht zwischen den Unterdeterminanten von (A) und A. Ist nämlich α_{ik} der Coefficient von a_{ik} in A und (α_{ik}) der von A_{ik} in (A), so ist

$$\alpha_{ik} = -(\alpha_{ik});$$

denn wir können beide Unterdeterminanten durch Differentiation von A und (A) respective nach a_{ik} und A_{ik} bilden, wenn wir die Differentiation nur auf die der Form nach gleichen Elemente beziehen, also a_{ik} und a_{ki}, sowie A_{ik} und A_{ki} als von einander unabhängig ansehen. Dann liefert uns die Gleichung (8.)

$$-\frac{\partial A}{\partial a_{ik}} = \frac{\partial (A)}{\partial A_{ik}}\,\frac{\partial A_{ik}}{\partial a_{ik}},\quad \text{wo}\quad \frac{\partial A_{ik}}{\partial a_{ik}} = 1,\quad \frac{\partial A}{\partial a_{ik}} = \alpha_{ik},\quad \frac{\partial (A)}{\partial A_{ik}} = (\alpha_{ik}).$$

Haben B, (B), β_{ik}, (β_{ik}) dieselbe Bedeutung für $F_0(y_1, y_2, \dots y_n, y)$ wie A, (A), α_{ik}, (α_{ik}) für $F(y_1, y_2, \dots y_n, y)$, so ist auch hier

$$(B) = -B,\quad (\beta_{ik}) = -\beta_{ik},$$

und ebenso können wir diese Resultate auf die Form $F-\lambda F_0$ übertragen, denn es ist in doppelter Anordnung

$$F(y_1, \dots y_n, y)-\lambda F_0(y_1, \dots y_n, y) = (A_{11}-\lambda B_{11}, A_{12}-\lambda B_{12}, \dots)(y_1, y_2, \dots y_n)^2$$
$$= (a_{11}-\lambda b_{11}, a_{12}-\lambda b_{12}, \dots)(y_1, y_2, \dots y_n, -(x_1 y_1+x_2 y_2+\dots+x_n y_n))^2.$$

Setzen wir also

$$(9.)\quad \Lambda = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda b_{11} & a_{12}-\lambda b_{12} & \dots & a_{1n}-\lambda b_{1n} & a_{1,n+1}-\lambda b_{1,n+1} & x_1 \\ a_{21}-\lambda b_{21} & a_{22}-\lambda b_{22} & \dots & a_{2n}-\lambda b_{2n} & a_{2,n+1}-\lambda b_{2,n+1} & x_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}-\lambda b_{n1} & a_{n2}-\lambda b_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda b_{nn} & a_{n,n+1}-\lambda b_{n,n+1} & x_n \\ a_{n+1,1}-\lambda b_{n+1,1} & a_{n+1,2}-\lambda b_{n+1,2} & \dots & a_{n+1,n}-\lambda b_{n+1,n} & a_{n+1,n+1}-\lambda b_{n+1,n+1} & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$(10.)\qquad (\Lambda) = \Sigma \pm (A_{11}-\lambda B_{11})(A_{22}-\lambda B_{22}) \dots (A_{nn}-\lambda B_{nn}),$$

so ist

$$(11.)\qquad (\Lambda) = -\Lambda,\quad (\Lambda_{ik}) = -\Lambda_{ik},$$

wo Λ_{ik} und (Λ_{ik}) Unterdeterminanten von Λ und (Λ) sind.

Ich mache noch darauf aufmerksam, dass Λ als die reciproke Function von $F(u_1, u_2, \dots u_{n+1})-\lambda F_0(u_1, u_2, \dots u_{n+1})$ angesehen werden kann, in der die Variabeln durch $x_1, x_2, \dots x_{n+1}$ bezeichnet sind, aber $x_{n+1} = 1$ gesetzt ist

Die reciproken Functionen in Bezug auf die n Variabeln $y_1, y_2, \dots y_n$ von $F(y_1, y_2, \dots y_n, y)$ und $F_0(y_1, y_2, \dots y_n, y)$, nämlich

$$f(\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n) = \frac{1}{A}\Sigma\alpha_{\varkappa\lambda}\eta_\varkappa\eta_\lambda, \quad f_0(\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n) = \frac{1}{B}\Sigma\beta_{\varkappa\lambda}\eta_\varkappa\eta_\lambda$$

lassen sich in Determinantenform direct durch die $a_{\varkappa\lambda}$, $b_{\varkappa\lambda}$ und x_i darstellen; es ist für die erste

$$(12.) \qquad f(\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n) = -\frac{1}{A}\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_{1,n+1} & x_1 & \eta_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & a_{n,n+1} & x_n & \eta_n \\ a_{n+1,1} & \dots & a_{n+1,n} & a_{n+1,n+1} & 1 & 0 \\ x_1 & \dots & x_n & 1 & 0 & 0 \\ \eta_1 & \dots & \eta_n & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

denn man sieht unmittelbar, dass auch hier die Unterdeterminante α_{ik} von A den Coefficienten von $\eta_i\eta_k$ bildet. Mit Hülfe eines bekannten Determinantensatzes lässt sich dieser Ausdruck anders darstellen. Bedeutet a die Determinante von $F(u_1, u_2, \dots u_{n+1})$ und wird $-\frac{1}{a}A$ als Function der x durch $\varphi(x_1, x_2, \dots x_{n+1})$, wo $x_{n+1} = 1$, bezeichnet, in der Weise, dass

$$a = \Sigma \pm a_{11}a_{22} \dots a_{n+1,n+1}, \quad -\frac{1}{a}A = \varphi(x_1, x_2, \dots x_n, 1),$$

so sind

$$-a\varphi(x_1, x_2, \dots x_n, 1), \ -a\varphi(\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n, 0) \text{ und } -\frac{a}{2}\{\eta_1.\varphi'(x_1) + \dots + \eta_n.\varphi'(x_n)\}$$

die Unterdeterminanten der Determinante in (12.), welche den letzten vier Nullen entsprechen. Die aus ihnen gebildete Determinante

$$a^2\{\varphi(x_1, x_2, \dots x_n, 1).\varphi(\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n, 0) - \tfrac{1}{4}[\eta_1.\varphi'(x_1) + \dots + \eta_n.\varphi'(x_n)]^2\}$$

wird daher $= -\frac{A}{a}.a^2 f(\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n)$, und somit ist

$$f(\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n) = \varphi(\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n, 0) - \frac{\{\eta_1.\frac{1}{2}\varphi'(x_1) + \eta_2.\frac{1}{2}\varphi'(x_2) + \dots + \eta_n.\frac{1}{2}\varphi'(x_n)\}^2}{\varphi(x_1, x_2, \dots x_n, 1)},$$

$$f_0(\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n) = \varphi_0(\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n, 0) - \frac{\{\eta_1.\frac{1}{2}\varphi_0'(x_1) + \eta_2.\frac{1}{2}\varphi_0'(x_2) + \dots + \eta_n.\frac{1}{2}\varphi_0'(x_n)\}^2}{\varphi_0(x_1, x_2, \dots x_n, 1)},$$

wo der Bezeichnung für A analog

$$b = \Sigma \pm b_{11}b_{22} \dots b_{n+1,n+1}, \quad -\frac{1}{b}B = \varphi_0(x_1, x_2, \dots x_n, 1)$$

gesetzt ist.

§. 3.

Wenden wir jetzt die Transformation des §. 1 auf die Formen $F(y_1, y_2, \dots y_n, y)$ und $F_0(y_1, y_2, \dots y_n, y)$ an, wie sie im vorigen Paragraphen betrachtet sind, so heissen die Gleichungen §. 1 (1.), (2.) jetzt

$$(1.)\quad F(y_1, y_2, \dots y_n, y) = \lambda_1 Y_1^2 + \lambda_2 Y_2^2 + \dots + \lambda_n Y_n^2,$$

$$(2.)\quad F_0(y_1, y_2, \dots y_n, y) = Y_1^2 + Y_2^2 + \dots + Y_n^2,$$

welche durch die Substitution

$$(3.)\quad y_i = \gamma_{i1} Y_1 + \gamma_{i2} Y_2 + \dots + \gamma_{in} Y_n$$

zu identischen werden; und die transponirte Substitution

$$(4.)\quad H_k = \gamma_{1k}\eta_1 + \gamma_{2k}\eta_2 + \dots + \gamma_{nk}\eta_n$$

erfüllt die Gleichungen

$$(5.)\quad f(\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n) = \frac{H_1^2}{\lambda_1} + \frac{H_2^2}{\lambda_2} + \dots + \frac{H_n^2}{\lambda_n},$$

$$(6.)\quad f_0(\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n) = H_1^2 + H_2^2 + \dots + H_n^2.$$

In den übrigen Formeln des §. 1 können wir nach den Entwickelungen des vorigen Paragraphen statt der (A), (B), $(\varDelta)$ und deren Unterdeterminanten die A, B, $\varDelta$ und deren Unterdeterminanten aber mit entgegengesetzten Vorzeichen nehmen. Demnach wird

$$\gamma_{hk}\gamma_{ik} = \frac{\varDelta_{hi}^{(k)}}{B.l_k}, \quad -\frac{\partial \varDelta^{(k)}}{\partial \lambda_k} = B l_k.$$

Die Proportion §. 1 (6.) kann ersetzt werden durch

$$(7.)\quad \gamma_{1k} : \gamma_{2k} : \dots : \gamma_{nk} = \frac{\partial \varDelta^{(k)}}{\partial x_1} : \frac{\partial \varDelta^{(k)}}{\partial x_2} : \dots : \frac{\partial \varDelta^{(k)}}{\partial x_n},$$

denn weil $\varDelta^{(k)} = 0$, so sind ihre Unterdeterminanten, welche den Elementen aus zwei Horizontalreihen entsprechen, proportional, und die Unterdeterminanten der letzten Reihe sind $\frac{1}{2}\frac{\partial \varDelta^{(k)}}{\partial x_1}$, $\frac{1}{2}\frac{\partial \varDelta^{(k)}}{\partial x_2}$, $\dots$ $\frac{1}{2}\frac{\partial \varDelta^{(k)}}{\partial x_n}$ folglich wird

$$(8.)\quad \varDelta_{h1}^{(k)} : \varDelta_{h2}^{(k)} : \dots : \varDelta_{hn}^{(k)} = \frac{\partial \varDelta^{(k)}}{\partial x_1} : \frac{\partial \varDelta^{(k)}}{\partial x_2} : \dots : \frac{\partial \varDelta^{(k)}}{\partial x_n},$$

wodurch sich die obige Proportion ergiebt.

Die Gleichung $\varDelta = 0$, wenn $\varDelta$ aus §. 2 (9.) genommen wird, begründet einen Zusammenhang zwischen zwei Systemen von je n Variabeln. Die Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ der Gleichung sind Functionen der $x_1, x_2, \dots x_n$ und umgekehrt können die x vermöge der Gleichungen

$$(9.)\quad \varDelta^{(1)} = 0, \quad \varDelta^{(2)} = 0, \quad \dots \quad \varDelta^{(n)} = 0,$$

wo $\Delta^{(k)}$ immer die Determinante Δ für $\lambda = \lambda_k$ bezeichnet, als Functionen der λ angesehen werden, und zwar als solche, die sich algebraisch darstellen lassen, da die Gleichungen (9.) nach den x aufgelöst werden können, wie in §. 5 ausgeführt wird. Es sollen jetzt aus diesen Gleichungen die Relationen zwischen den Differentialen der x und λ aufgestellt werden, um nachher Differentialausdrücke dadurch zu transformiren, dass statt der x als neue Variabeln die λ eingeführt werden.

Da $\Delta^{(k)}$ von den λ nur λ_k dagegen alle x enthält, folgt durch totale Differentiation in Bezug auf alle diese Variabeln aus der Gleichung $\Delta^{(k)} = 0$

$$-\frac{\partial \Delta^{(k)}}{\partial \lambda_k} d\lambda_k = \frac{\partial \Delta^{(k)}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \Delta^{(k)}}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial \Delta^{(k)}}{\partial x_n} dx_n,$$

und diese Gleichung geht unter Berücksichtigung der Proportion (7.) über in

$$(10.)\qquad -\varrho_k \frac{\partial \Delta^{(k)}}{\partial \lambda_k} d\lambda_k = \gamma_{1k} dx_1 + \gamma_{2k} dx_2 + \cdots + \gamma_{nk} dx_n.$$

Der Factor ϱ_k ist bestimmt durch

$$\varrho_k \frac{\partial \Delta^{(k)}}{\partial x_h} = \gamma_{hk}, \qquad \varrho_k^2 = \frac{\gamma_{hk}^2}{\frac{\partial \Delta^{(k)}}{\partial x_h} \frac{\partial \Delta^{(k)}}{\partial x_h}},$$

oder wegen der Gleichungen vor (7.)

$$\varrho_k^2 = \frac{1}{Bl_k} \frac{\Delta_{hh}^{(k)}}{\frac{\partial \Delta^{(k)}}{\partial x_h} \frac{\partial \Delta^{(k)}}{\partial x_h}}.$$

Der zweite Factor hierin kann leicht durch λ_k allein ausgedrückt werden. Betrachten wir wieder $\frac{1}{2} \frac{\partial \Delta^{(k)}}{\partial x_h}$ als Unterdeterminanten von $\Delta^{(k)}$, aber einmal als dem x_h aus der Vertical- das anderemal dem aus der Horizontalreihe der x entsprechend, und bezeichnen durch L_k die Unterdeterminante, welche dem letzten Diagonalgliede 0 in $\Delta^{(k)}$ entspricht, so haben wir nach dem bereits angewandten Determinantensatze

$$\Delta_{hh}^{(k)} : \tfrac{1}{2} \frac{\partial \Delta^{(k)}}{\partial x_h} = \tfrac{1}{2} \frac{\partial \Delta^{(k)}}{\partial x_h} : L_k,$$

$$\frac{\Delta_{hh}^{(k)}}{\frac{\partial \Delta^{(k)}}{\partial x_h} \frac{\partial \Delta^{(k)}}{\partial x_h}} = \frac{1}{4L_k};$$

folglich wird

$$\varrho_k^2 = \frac{1}{Bl_k} \cdot \frac{1}{4L_k}.$$

Hierdurch und weil $-\frac{\partial\varDelta^{(k)}}{\partial\lambda_k} = Bl_k$ ist, geht (10.) über in

$$(11.)\qquad \tfrac{1}{2}\sqrt{B}\sqrt{\frac{l_k}{L_k}}\,d\lambda_k = \gamma_{1k}dx_1+\gamma_{2k}dx_2+\cdots+\gamma_{nk}dx_n.$$

Diese Gleichung, welche für $k = 1, 2, \dots n$ die Relationen zwischen den Differentialen der x und der λ giebt, wie sie aus den Gleichungen (9.) folgen, hat genau die Form der Substitution (4.), durch welche wir in (5.) und (6.) die Formen $f(\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n)$ und $f_0(\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n)$ transformirten; eine Eigenschaft, welche gestattet, eine Reihe von Differentialausdrücken erster Ordnung zweiten Grades der Variabeln x ohne Weiteres durch die λ auszudrücken. Da nämlich die Gleichung (11.) aus den Substitutionen (4.) hervorgeht, wenn

$$(12.)\qquad \eta_i = dx_i,\qquad H_k = \tfrac{1}{2}\sqrt{B}\sqrt{\frac{l_k}{L_k}}\cdot d\lambda_k$$

gesetzt wird, so können wir sagen, dass die Substitutionen (4.), nachdem die Werthe (12.) eingesetzt sind, durch die Gleichungen (9.) identisch erfüllt werden. Dasselbe gilt von allen Gleichungen, welche Folgen der Substitution (4.) sind, da diese durch dieselben Werthsysteme befriedigt werden, welche der Substitution genügen. Dies giebt den Satz:

Aus den Gleichungen (5.) *und* (6.), *sowie aus allen übrigen, welche durch die Substitution* (4.) *zu identischen werden, entstehen durch Einführen der Werthe* (12.) *Differentialformeln, welche Folgen der Gleichungen*

$$\varDelta^{(1)} = 0,\quad \varDelta^{(2)} = 0,\quad \dots\quad \varDelta^{(n)} = 0$$

sind.

Hierin haben B und $\varDelta^{(k)}$ die in §. 2. angegebene Bedeutung; es ist B die Determinante von $F_0(y_1, y_2, \dots y_n, y)$ und $\varDelta_k$ die von $F(y_1, y_2, \dots y_n, y) - \lambda_k F_0(y_1, y_2, \dots y_n, y)$ in Rücksicht auf die n Variabeln $y_1, y_2, \dots y_n$, oder wir können B und $\varDelta^{(k)}$ als die reciproken Functionen von $F_0(u_1, u_2, \dots u_{n+1})$ und $F(u_1, u_2, \dots u_{n+1}) - \lambda_k F_0(u_1, u_2, \dots u_{n+1})$ betrachten, in denen die Variabeln durch $x_1, x_2, \dots x_{n+1}$, aber $x_{n+1} = 1$, bezeichnet sind. Ferner ist L_k die Determinante von $F(u_1, u_2, \dots u_{n+1}) - \lambda_k F_0(u_1, u_2, \dots u_{n+1})$, also

$$L_k = \Sigma\pm(a_{11}-\lambda_k b_{11})(a_{22}-\lambda_k b_{22})\ \dots\ (a_{n+1,n+1}-\lambda_k b_{n+1,n+1})$$

und

$$l_k = (\lambda_1-\lambda_k)(\lambda_2-\lambda_k)\ \dots\ (\lambda_{k-1}-\lambda_k)(\lambda_{k+1}-\lambda_k)\ \dots\ (\lambda_n-\lambda_k).$$

Dieser Satz dient zur Transformation derjenigen Differentialausdrücke, welche aus den Formen $f(\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n)$ und $f_0(\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n)$ sowie aus den si-

multanen Covarianten dieser Formen hervorgehen, wenn in ihnen $\eta_i = dx_i$ gesetzt wird.

Besonders hervorzuheben ist ein specieller Fall der Substitution (9.). Wenn nämlich $F_0(y_1, \dots y_n, y) = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2$ wird, so heisst die Gleichung (2.) $y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 = Y_1^2 + Y_2^2 + \dots + Y_n^2$, die Substitution (3.) wird also orthogonal und zeichnet sich vor der allgemeinen durch eine Reihe merkwürdiger Eigenschaften aus, welche sich auf unsere Substitution (9.) übertragen. So fällt die transponirte Substitution mit der ursprünglichen zusammen, wenn wir die Variabeln in beiden mit demselben Buchstaben bezeichnen, da jetzt die Auflösungen der Substitution (3.) die Form (4.) annehmen. Setzen wir also $y_i = \eta_i$ und $Y_k = H_k$, so fällt die Gleichung (6.) mit (2.) zusammen, da auch $f_0(\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n) = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \dots + \eta_n^2$ wird, während die Gleichung (1.) ebenfalls Folge von (4.) wird. Da endlich noch die Determinante $(B) = -B$ von F_0 gleich 1 wird, so heisst unser Satz jetzt:

Wenn die orthogonale Substitution

$$(13.)\qquad \eta_i = \gamma_{i1} H_1 + \gamma_{i2} H_2 + \dots + \gamma_{in} H_n, \quad H_k = \gamma_{1k}\eta_1 + \gamma_{2k}\eta_2 + \dots + \gamma_{nk}\eta_n$$

die Gleichung

$$(14.)\quad \begin{cases} F(\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n, \eta) = (a_{11}, a_{12}, \dots a_{n+1,n+1})(\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n, -(x_1\eta_1 + x_2\eta_2 + \dots + x_n\eta_n))^2 \\ \qquad = \lambda_1 H_1^2 + \lambda_2 H_2^2 + \dots + \lambda_n H_n^2 \end{cases}$$

identisch erfüllt, so gehen aus ihr sowie aus allen übrigen durch (3.) *identischen Gleichungen Differentialformeln hervor, wenn man*

$$(15.)\qquad \eta_i = dx_i, \quad H_k = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{-l_k}{L_k}}\, d\lambda_k$$

setzt, und diese werden Folgen der Gleichungen

$$\Delta^{(1)} = 0, \quad \Delta^{(2)} = 0, \quad \dots \quad \Delta^{(n)} = 0.$$

Hierin ist jetzt

$$(16.)\qquad \Delta^{(k)} = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda_k & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_{1,n+1} & x_1 \\ a_{21} & a_{22}-\lambda_k & \dots & a_{2n} & a_{2,n+1} & x_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda_k & a_{n,n+1} & x_n \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \dots & a_{n+1,n} & a_{n+1,n+1} & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$(17.)\quad L_k = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda_k & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda_k & \dots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda_k & a_{n,n+1} \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \dots & a_{n+1,n} & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix}$$

Es ist bemerkenswerth, dass L_k hier nur vom n^{ten} Grade in λ_k ist, während es im Allgemeinen den Grad $n+1$ erreicht, und dieser sinkt noch um eine weitere Einheit, wenn $a_{n+1,n+1}=0$.

§. 4.

Nachdem im vorigen Paragraphen Regeln angegeben sind, um Differentialausdrücke dadurch zu transformiren, dass die x durch die λ ersetzt werden, sollen jetzt einige Eigenschaften dieser Substitution $\varDelta=0$ angegeben werden, wobei es meistens genügen wird, an bekannte Sätze zu erinnern. Ich bezeichne hier Kürze halber die Functionen $F(u_1, u_2, \dots u_{n+1})$ und $F_0(u_1, u_2, \dots u_{n+1})$ durch F und F_0.

Zunächst lässt die Gleichung $\varDelta=0$ für $n=2$, 3 eine einfache geometrische Deutung zu. Lassen wir für $n=2$ die Variabeln u_1, u_2, u_3 Liniencoordinaten bedeuten, so repräsentirt die Gleichung $F-\lambda F_0=0$ mit der willkürlichen Grösse λ alle Kegelschnitte, welche von den vier gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Kegelschnitte $F=0$, $F_0=0$ berührt werden. Die reciproke Function von $F-\lambda F_0$ ist $\varDelta$, unsere Gleichung $\varDelta=0$ drückt also dasselbe System in Punktcoordinaten aus und zwar in Cartesischen, weil $x_3=1$ gesetzt ist. Legen wir den x die Coordinaten eines festen Punktes bei, so liefert $\varDelta=0$ zwei Werthe für λ, welche die beiden Kegelschnitte des Systems bestimmen, die durch den angenommenen Punkt gehen.

Während also die x den Punkt in recht- oder schiefwinkligen Coordinaten angeben, bestimmen die λ denselben als Durchschnitt zweier Kegelschnitte, welche vier feste Grade berühren. Das analoge gilt für $n=3$ im Raume.

Diese Bestimmung der x durch die λ ist im Allgemeinen eine vollkommen bestimmte, doch müssen gewisse Grenzfälle ausgeschlossen werden. Damit nämlich alle x durch die λ ersetzt werden können, ist einentheils nöthig, dass die Gleichung $\varDelta=0$ von keiner der Variabeln x unabhängig wird, anderntheils, dass dieselbe für keine ihrer Wurzeln λ_1, λ_2, ... λ_n einen von den x unabhängigen Werth g giebt. Die Bedingungen, unter denen dies ein-

tritt, lassen sich als permanente Eigenschaften der Functionen F und F_0 durch das Verhalten der Determinante L von $F-\lambda F_0$ ausdrücken.

Die Unterdeterminanten von L sind die Coefficienten der x in $\varDelta$. Diese Grösse wird daher nur dann von x_i unabhängig, wenn alle ersten Unterdeterminanten, welche den Elementen der i^{ten} Horizontal- oder Verticalreihe in L entsprechen, identisch verschwinden, wodurch auch $L=0$ wird. Ferner kann $\varDelta$ nur dann einen von den x unabhängigen Factor $(\lambda-g)$ haben, wenn alle Coefficienten der x in $\varDelta$, also alle Unterdeterminanten von L durch diesen Factor theilbar sind, in welchem Fall L mindestens zweimal durch $(\lambda-g)$ theilbar ist. Geometrisch wird hierdurch bedingt, dass die beiden Curven oder Oberflächen $F=0$ und $F_0=0$ einen Contact höherer Ordnung oder in zwei Punkten einen einfachen Contact haben; letzteres, wenn L den Factor $(\lambda-g)$ nur zweimal enthält *).

Der Gleichung $\varDelta=0$ kommen eine Reihe weiterer Eigenschaften zu, welche durch die Determinantenform von $\varDelta$ bedingt werden. Gleichungen wie

$$\begin{vmatrix} p_{11}-\lambda q_{11} & \dots & p_{1r}-\lambda q_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{r1}-\lambda q_{r1} & \dots & p_{rr}-\lambda q_{rr} \end{vmatrix} = 0$$

sind vielfach untersucht, in dieser allgemeinen Form, wo jedes Element die Grössen λ enthält, von Herrn *Hermite* (Comptes rendus 1855), von Herrn *Clebsch* (Bd. 62, p. 232 dieses Journals), sowie von Herrn *Weierstrass* (Berichte der Berl. Ak. 1858), dessen Resultate Herr *Christoffel* (Bd. 63, p. 255 dieses Journals) erweitert und namentlich auf den Fall ausgedehnt hat, wo die $p_{\varkappa\lambda}$, $q_{\varkappa\lambda}$ Functionen einer oder mehrerer Variabeln sind.

Unsere Gleichung $\varDelta=0$ hat diese Form für beide der in §. 2 durch $(\varDelta)$ und $\varDelta$ unterschiedenen Darstellungen und ist ausserdem symmetrisch. Aus beiden Formen können wir Folgerungen für die Realität der Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ ziehen, doch mag es hier genügen in Betreff der Form $(\varDelta)$ §. 2 (10.), wo $p_{\varkappa\lambda}$, $q_{\varkappa\lambda}$ durch die $A_{\varkappa\lambda}$, $B_{\varkappa\lambda}$ ersetzt werden, welche Functionen der x sind, auf die zuletzt citirte Abhandlung zu verweisen, um hier noch einige Worte über die andere Darstellung hinzuzufügen. In $\varDelta$ §. 2 (9.) ist $r=n+2$ und in der letzten Horizontal- und Verticalreihe $q_{\varkappa,n+2}=0$, $p_{\varkappa,n+2}=x_\varkappa$,

*) Vergl. *Sylvester,* Phil. Mag. 1851, I., p. 119, wo die verschiedenen Arten der Berührungen zweier Gebilde zweiter Ordnung aus dem Verhalten der Determinante L abgeleitet werden, wenn die Gleichungen derselben in Punktcoordinaten gegeben sind.

während die x in den anderen Elementen nicht vorkommen. Dann hängt, vorausgesetzt, dass die $a_{\varkappa\lambda}$ und x reell sind, die Realität der Wurzeln λ_1, $\lambda_2, \ldots \lambda_n$ allein von den $b_{\varkappa\lambda}$ ab und die Bedingungen dafür, dass sämmtliche Wurzeln von $\Delta = 0$ reell werden, ist dieselbe unter der die Wurzeln der Gleichung $L = 0$ alle reell sind: Es müssen die $b_{\varkappa\lambda}$ so beschaffen sein, dass $\Sigma b_{\varkappa\lambda} u_\varkappa u_\lambda = F_0(u_1, u_2, \ldots u_{n+1})$ immer dasselbe Zeichen behält, wenn man die u alle reellen Werthe durchlaufen lässt. Nach den Sätzen der Herren *Weierstrass* und *Christoffel* hat nun eine Gleichung $L = 0$ unter denselben Bedingungen, unter denen ihre sämmtlichen Wurzeln reell sind, die Eigenschaft, dass dieselbe nur dann r gleiche Wurzeln g hat, wenn alle ersten Unterdeterminanten von L durch $(\lambda - g)^{r-1}$ theilbar sind, und umgekehrt. Damit also die oben ausgeschlossenen Grenzfälle, für welche unsere Substitution unzulässig wird, nicht eintreten, ist jetzt erforderlich und ausreichend, dass sämmtliche Linearfactoren von L unter einander und von Null verschieden sind.

In dem im vorigen Paragraphen hervorgehobenen Fall, wo

$$F_0 = u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2$$

also immer positiv ist, wird für $n = 2, 3$ das durch $F - \lambda F_0 = 0$ repräsentirte System von Kegelschnitten oder Oberflächen zweiter Ordnung ein confocales und die λ werden daher die von *Jacobi* unter dem Namen der elliptischen Coordinaten in die Analysis eingeführten Functionen der x. Die Gleichung $\Delta = 0$ giebt, wenn Δ die Form §. 3 (16.) erhält, den allgemeinsten Zusammenhang zwischen rechtwinkligen und elliptischen Coordinaten, wobei es gleichgültig ist, ob das System confocaler Gebilde einen Mittelpunkt hat oder nicht, indem parabolische Formen von $F = 0$ und somit des ganzen Systems dadurch bedingt werden, dass $a_{n+1,n+1} = 0$. Wenn $a_{n+1,n+1}$ nicht verschwindet, können wir diese Grösse $= -1$ setzen und F durch orthogonale Substitution so transformiren, dass unsere Gleichung $\Delta = 0$ übergeht in

$$(1.) \qquad \frac{x_1^2}{a_{11} - \lambda} + \frac{x_2^2}{a_{22} - \lambda} + \cdots + \frac{x_n^2}{a_{nn} - \lambda} - 1 = 0,$$

welche *Jacobi* zur Einführung der elliptischen Coordinaten gebraucht.

Die *Jacobi*schen Transformationsformeln für die Einführung der elliptischen Coordinaten sind in ihrer Vollständigkeit in dem gegenwärtig in Druck befindlichen Hefte seiner Vorlesungen über Mechanik enthalten, von welchen ich den hierauf bezüglichen Theil habe einsehen dürfen; seine erste Bekanntmachung über diese Substitution aber findet sich in seiner Note über die geodätische

Linie auf dem dreiaxigen Ellipsoid. (Berichte d. Berl. Ak. April 1839 und Bd. 19. p. 309 dieses Journals.)

§. 5.

Der Vollständigkeit halber gebe ich hier noch die Auflösung der Substitution

$$\Delta^{(1)} = 0, \quad \Delta^{(2)} = 0, \quad \dots \quad \Delta^{(n)} = 0,$$

nach den Variablen $x_1, x_2, \dots x_n$.

Da die $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ die Wurzeln der Gleichung $\Delta = 0$ sind, besteht die in λ identische Gleichung

$$\frac{1}{x'^2_{n+1}} \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda b_{11} & \dots & a_{1,n+1} - \lambda b_{1,n+1} & x'_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n+1,1} - \lambda b_{n+1,1} & \dots & a_{n+1,n+1} - \lambda b_{n+1,n+1} & x'_{n+1} \\ x'_1 & \dots & x'_{n+1} & 0 \end{vmatrix} = B(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\dots(\lambda_n-\lambda),$$

in der $\frac{x'_i}{x'_{n+1}} = x_i$ ist. Die Determinante links soll jetzt durch $\Delta(\lambda)$, und ebenso die früher durch L bezeichnete Determinante L durch $L(\lambda)$ bezeichnet werden, so dass, wenn $g_1, g_2, \dots g_{n+1}$ die Wurzeln von $L = 0$ sind,

$$L(\lambda) = b(g_1-\lambda)(g_2-\lambda) \dots (g_n-\lambda).$$

Nun wird bekanntlich $\Delta(\lambda)$ ein vollständiges Quadrat in Bezug auf die x', sobald die Determinante $L(\lambda)$ verschwindet, also allemal, wenn wir für λ einen der Werthe $g_1, g_2, \dots g_{n+1}$ setzen, und zwar ist $\Delta(g_i)$ das Quadrat des Ausdrucks

$$x'_1\sqrt{L_{11}(g_i)} + x'_2\sqrt{L_{22}(g_i)} + \dots + x'_{n+1}\sqrt{L_{n+1,n+1}(g_i)},$$

worin $L_{kk}(g_i)$ den Coefficienten von $a_{kk} - g_i b_{kk}$ in $L(g_i)$ bedeutet, wie man auch unter Beachtung der Relation $\sqrt{L_{kk}(g_i) . L_{k'k'}(g_i)} = L_{kk'}(g_i)$ direct durch Quadriren verificiren kann.

Durch Einsetzen des Werthes g_i statt λ in die obige Identität entsteht daher

$$x'_1\sqrt{L_{11}(g_i)} + x'_2\sqrt{L_{22}(g_i)} + \dots + x'_{n+1}\sqrt{L_{n+1,n+1}(g_i)} = \sqrt{(g_i-\lambda_1)(g_i-\lambda_2)\dots(g_i-\lambda_n)},$$

woraus für $i = 1, 2, \dots n+1$ zur Bestimmung der x' ein System $n+1$ linearer Gleichungen hervorgeht. Allerdings ist die linke Seite dieser Gleichung der rechten nur proportional, doch können wir den fortgelassenen Factor als mit den x' zusammengezogen denken, da wir schliesslich nur die Verhältnisse $\frac{x'_i}{x'_{n+1}}$ brauchen.

Besonders einfach wird diese Lösung, wenn $L(\lambda)$ schon in lineare Factoren zerfällt, wenn also z. B. in ihr alle Elemente mit Ausnahme der in der Hauptdiagonale verschwinden, da dann auch alle $L_{kk}(g_i)$ mit Ausnahme von $L_{ii}(g_i)$ verschwinden, es wird

$$x_i' = \sqrt{\frac{\Delta(g_i)}{L_{ii}(g_i)}}$$

wo jetzt

$$L_{ii}(g_i) = (g_i - g\ )(g_i - g_2)\ \dots\ (g_i - g_{i-1})(g_i - g_{i+1})\ \dots\ (g_i - g_{n+1}),$$

folglich ist

$$x_i = \frac{x_i'}{x_{n+1}'} = \sqrt{\frac{(g_i-\lambda_1)(g_i-\lambda_2)\dots(g_i-\lambda_n)(g_{n+1}-g_1)\dots(g_{n+1}-g_n)}{(g_{n+1}-\lambda_1)(g_{n+1}-\lambda_2)\dots(g_{n+1}-\lambda_n)(g_i-g_1)\dots(g_i-g_{i-1})(g_i-g_{i+1})\dots(g_i-g_{n+1})}}.$$

Hat insbesondere die Gleichung $\Delta = 0$ die Form §. 4. (1.)

$$\frac{x_1^2}{a_{11}-\lambda} + \frac{x_2^2}{a_{22}-\lambda} + \dots + \frac{x_n^2}{a_{nn}-\lambda} - 1 = 0,$$

so wird

$$L(\lambda) = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\ \dots\ (a_{nn}-\lambda),$$

ist also nur vom Grade n, so dass g_{n+1} unendlich gross geworden ist, während $g_i = a_{ii}$ wird. Dies hat zur Folge, dass in dem Ausdruck für x_i die Factoren, welche g_{n+1} enthalten, sich heben und

$$x_i = \sqrt{\frac{(a_{ii}-\lambda_1)(a_{ii}-\lambda_2)\dots(a_{ii}-\lambda_n)}{(a_{ii}-a_{11})(a_{ii}-a_{22})\dots(a_{ii}-a_{i-1,i-1})(a_{ii}-a_{i+1,i+1})\dots(a_{ii}-a_{nn})}}$$

wird, was mit der Auflösung, welche *Jacobi* in seinen Vorlesungen über Mechanik giebt, übereinstimmt.

§. 6.

Nach den Gesetzen, welche für die Bildung simultaner Covarianten aufgestellt sind, kann man aus den Gleichungen §. 3. (5.) (6.) eine unbegrenzte Zahl neuer Gleichungen herleiten, welche alle durch die Substitution §. 3. (4.) erfüllt werden, und welche daher eine Quelle neuer, durch unsere Substitution $\Delta = 0$ identischer Differentialformeln sind. Ich betrachte hier nur diejenigen, deren rechte Seiten die Form

$$\chi(\lambda_1)H_1^2 + \chi(\lambda_2)H_2^2 + \dots + \chi(\lambda_n)H_n^2$$

haben, wo $\chi(\lambda)$ irgend eine rationale Function von λ bezeichnet. Sie lassen sich alle aus denjenigen Formen zusammensetzen, in welchen $\chi(\lambda) = \lambda^m$ für ein ganzes positives oder negatives m, und zu diesen gelangt man unter

andern auf dem von Herrn *Hesse* in seiner analytischen Geometrie des Raumes (p. 196) angegebenen Wege.

Ich gehe auf diese Formen für den Fall näher ein, wo $f_0 = \eta_1^2+\eta_2^2+\cdots+\eta_n^2$ ist. Da jetzt die Substitution §. 3. (4.) orthogonal wird und in die unter §. 3. (13.) übergeht, haben wir die Gleichungen

$$(1.)\quad F_0(\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n) \;= \eta_1^2+\eta_2^2+\cdots+\eta_n^2 = \;H_1^2+\;H_2^2+\cdots+H_n^2,$$

$$(2.)\quad F(\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n, \eta) = \Sigma A_{\varkappa\lambda}\eta_\varkappa\eta_\lambda \;= \lambda_1 H_1^2+\lambda_2 H_2+\cdots+\lambda_n H_n^2,$$

welche durch die Substitution

$$(3.)\quad \begin{cases} \eta_i \;= \gamma_{i1}H_1+\gamma_{i2}H_2+\cdots+\gamma_{in}H_n, \\ H_k \;= \gamma_{1k}\eta_1+\gamma_{2k}\eta_2+\cdots+\gamma_{nk}\eta_n \end{cases}$$

zu identischen werden.

Um aus (1.) und (2.) neue Gleichungen zu bilden, welche Folgen der Substitution (3.) sind, differentiire man (1.), (2.) oder irgend eine andere durch (3.) identische Gleichung total in Bezug auf alle η_i und H_k, und setze statt der Incremente die partiellen Differentialquotienten von $F(\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n, \eta)$ und $\Sigma\lambda_k H_k^2$ nach denselben Variabeln, also

$$\tfrac{1}{2}F'(\eta_i) \text{ statt } d\eta_i, \quad \text{und} \quad \lambda_k H_k \text{ statt } dH_k.$$

Dass die so gebildeten Gleichungen wirklich durch (3.) erfüllt werden, folgt daraus, dass dieser Substitution sowohl genügt wird, wenn man $d\eta_i$ statt η_i und dH_k statt H_k setzt, wie die totale Differentiation von (3.) zeigt, als auch, wenn man $\frac{1}{2}F'(\eta_i)$ statt η_i und $\lambda_k H_k$ statt H_k setzt, wie die partielle Differentiation von (2.) nach H_k lehrt, wenn man die η_i vermöge (3.) als Functionen von H_k betrachtet.

Ich bezeichne die angegebene Operation durch δ und m mal wiederholt durch δ_m, ferner die auf diese Weise aus $F_0(\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n, \eta)$ gebildeten Functionen durch F_m mit dem Coefficienten $A_{\varkappa\lambda}^{(m)}$, so dass

$$\delta_m F_0 = F_m = \Sigma A_{\varkappa\lambda}^{(m)}\eta_\varkappa\eta_\lambda,$$

indem der Grad der Formen in Bezug auf die Variabeln η nicht geändert wird, wohl aber die Ordnung der Coefficienten in Bezug auf die $A_{\varkappa\lambda}$, und zwar steigt diese bei jeder Ausführung der Operation δ um eine Einheit, weil an die Stelle der Incremente, die von der nullten, die Differentialquotienten $\frac{1}{2}F'(\eta_i)$ treten, welche von der ersten Ordnung in den $A_{\varkappa\lambda}$ sind. Es werden daher die $A_{\varkappa\lambda}^{(m)}$ von der m^{ten} Ordnung in den $A_{\varkappa\lambda}$ und folglich von der $2m^{\text{ten}}$ in den $x_1, x_2, \dots x_n$ sein, und zunächst stimmt $\delta F_0 = F_1$ mit der

gegebenen Function F_1 überein, so dass auch $A^{(1)}_{\varkappa\lambda} = A_{\varkappa\lambda}$ ist, während für F_0 $A^{(0)}_{\varkappa\lambda} = 0$, $A^{(0)}_{\varkappa\varkappa} = 1$ genommen werden muss.

Für die transformirten Formen ist die Operation δ leicht ausgeführt, man erhält

$$\delta \Sigma H_k^2 = \Sigma \lambda_k H_k^2, \quad \delta_2 \Sigma H_k^2 = \delta \Sigma \lambda_k H_k^2 = \Sigma \lambda_k^2 H_k^2, \quad \text{u. s. w.,}$$

$$\delta_m \Sigma H_k^2 = \Sigma \lambda_k^m H_k^2,$$

wo die Summen über die Werthe 1, 2, ... n für k auszudehnen sind. Es wird also durch die lineare Substitution (3.) auch die Gleichung

$$F_m(\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n) = \lambda_1^m H_1^2 + \lambda_2^m H_2^2 + \dots + \lambda_n^m H_n^2$$

identisch erfüllt.

Jacobi giebt für die Bildung der Coefficienten $A^{(m)}_{\varkappa\lambda}$ (dieses Journal Bd. 12. p. 20.) die Regel: Setzt man

$$P = \frac{\lambda_1^{m+1} + \lambda_2^{m+1} + \dots + \lambda_n^{m+1}}{m+1}$$

und drückt diese symbolische Function der λ durch die $A_{\varkappa\lambda}$ aus, so wird

$$A^{(m)}_{\varkappa\varkappa} = \frac{\partial P}{\partial A_{\varkappa\varkappa}}, \quad 2A^{(m)}_{\varkappa\lambda} = \frac{\partial P}{\partial A_{\varkappa\lambda}}.$$

Die successive Bildung dieser Coefficienten, wie sie aus der Anwendung der Operation δ folgt, führt dagegen auf diejenigen Formeln, welche das Multiplicationstheorem für die Elemente der Potenzen von Determinanten giebt. Wird nämlich aus den $A^{(m)}_{\varkappa\lambda}$ die Determinante $A^{(m)}$ von F_m gebildet

$$A^{(m)} = \Sigma \pm A^{(m)}_{11} A^{(m)}_{22} \dots A^{(m)}_{nn},$$

so besteht zwischen diesen und der Determinante A von F die Relation

$$A^{(m)} = A^m,$$

und diese beiden Determinanten sind, wenn man A^m nach dem Multiplicationstheorem entwickelt, von Glied zu Glied identisch. Die Rechtfertigung dieser Behauptung ist leicht. Setzt man für die nach dem Multiplicationstheorem entwickelte Determinante A^m:

$$A^m = \Sigma \pm \mathfrak{A}^{(m)}_{11} \mathfrak{A}^{(m)}_{22} \dots \mathfrak{A}^{(m)}_{nn},$$

so hat man zur successiven Bildung der $\mathfrak{A}^{(m)}_{\varkappa\lambda}$ wegen der Identität $A^r = A . A^{r-1}$ die Formel

$$\mathfrak{A}^{(r)}_{\varkappa\lambda} = \sum_k A_{\varkappa k} \mathfrak{A}^{(r-1)}_{\lambda k}.$$

Führt man andererseits die Operation δ an $F_{r-1} = \sum_i \sum_k A^{(r-1)}_{ik} \eta_i \eta_k$ aus, so wird

$$\delta F_{r-1} = \delta \sum_i \sum_k A^{(r-1)}_{ik} \eta_i \eta_k = \sum_i \sum_k \{\eta_i . \tfrac{1}{2} F'(\eta_k) + \eta_k . \tfrac{1}{2} F'(\eta_i)\}.$$

Hierin ist der Coefficient von $\eta_\varkappa \eta_\lambda$

$$\sum_k A_{\varkappa k}^{(r-1)} A_{\lambda k} + \sum_i A_{i\varkappa}^{(r-1)} A_{i\lambda} = 2 \sum_k A_{\varkappa k}^{(r-1)} A_{\lambda k},$$

weil beide Summen links dieselbe Bedeutung haben und $A_{\varkappa\lambda}^{(r)} = A_{\lambda\varkappa}^{(r)}$ ist. Nun ist aber $\delta F_{r-1} = F_r$ und der Coefficient von $\eta_\varkappa \eta_\lambda$ in F_r ist $2A_{\varkappa\lambda}^{(r)}$, also

$$A_{\varkappa\lambda}^{(r)} = \sum_k A_{\varkappa k} A_{\lambda k}^{(r-1)}.$$

Wir haben somit für die Bildung der $A_{\varkappa\lambda}^{(r)}$ dasselbe Gesetz gefunden, wie oben für die $\mathfrak{A}_{\varkappa\lambda}^{(r)}$, woraus in Verbindung mit der Bemerkung, dass $A_{\varkappa\lambda}^{(1)} = \mathfrak{A}_{\varkappa\lambda}^{(1)} = A_{\varkappa\lambda}$ ist, die behauptete Identität

$$A_{\varkappa\lambda}^{(r)} = \mathfrak{A}_{\varkappa\lambda}^{(r)}$$

folgt.

Dieses Bildungsgesetz zeigt auch, dass die $A_{\varkappa\lambda}^{(m)}$ dieselben Grössen sind, welche Herr *Borchardt* *) unter der Bezeichnung $a_{\varkappa\lambda}^{(m)}$ benutzt, um die Discriminante und die übrigen Ausdrücke, von deren Zeichen die Realität der Wurzeln der Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

abhängt, in die Summe von Quadraten zu zerlegen. Diese Form ist genau dieselbe, welche unsere Gleichung $(\Delta) = 0$ in dem jetzt vorliegenden Fall annimmt, wo $F_0(u_1, u_2, \dots u_{n+1}) = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2$.

Nehmen wir statt der Gleichung (2.) die aus den reciproken Functionen beider Seiten gebildete

$$f(\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n) = \frac{1}{A} \sum \alpha_{\varkappa\lambda} \eta_\varkappa \eta_\lambda = \frac{H_1^2}{\lambda_1} + \frac{H_2^2}{\lambda_2} + \dots + \frac{H_n^2}{\lambda_n},$$

so erhalten wir aus ihr nach dem obigen Bildungsgesetz die Gleichung

$$f_m(\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n) = \frac{1}{A^m} \sum \alpha_{\varkappa\lambda}^{(m)} \eta_\varkappa \eta_\lambda = \frac{H_1^2}{\lambda_1^m} + \frac{H_2^2}{\lambda_2^m} + \dots + \frac{H_n^2}{\lambda_n^m},$$

wo die $\alpha_{\varkappa\lambda}^{(m)}$ ebenso aus den $\alpha_{\varkappa\lambda}$ gebildet sind, wie die $A_{\varkappa\lambda}^{(m)}$ aus den $A_{\varkappa\lambda}$. Da aber $\sum_k \frac{H_k^2}{\lambda_k^m}$ die reciproke Function von $\sum \lambda_k^m H_k^2$ ist, so wird auch $f_m(\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n)$

*) Bd. 30 dieses Journals und Bd. 12 des *Liouville*schen Journals.

die reciproke Function von $F_m(\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n)$ sein, d. h. es ist $\alpha_{\varkappa\lambda}^{(m)}$ der Coefficient von $A_{\varkappa\lambda}^{(m)}$ in der Determinante $A^{(m)} = \Sigma \pm A_{11}^{(m)} A_{22}^{(m)} \dots A_{nn}^{(m)}$.

Es hält nach diesem nicht schwer, auch diejenigen Functionen der η zu bilden, welche in $\Sigma \chi(\lambda_k) H_k^2$ transformirt werden, wenn $\chi(\lambda)$ irgend eine rationale Function von λ ist. Für $\chi(\lambda) = \lambda^{\pm m}$ haben wir nach dem Vorigen:

Soll die lineare Substitution (3.), welche die Gleichungen (1.), (2.) identisch erfüllt, auch die Gleichungen

$$(4.)\quad F_m(\eta_1, \eta_2, \dots \eta_m) = \Sigma A_{\varkappa\lambda}^{(m)} \eta_\varkappa \eta_\lambda = \lambda_1^m H_1^2 + \lambda_2^m H_2^2 + \dots + \lambda_n^m H_n^2,$$

$$(5.)\quad f_m(\eta_1, \eta_2, \dots \eta_m) = \Sigma A_{\varkappa\lambda}^{(-m)} \eta_\varkappa \eta_\lambda = \lambda_1^{-m} H_1^2 + \lambda_2^{-m} H_2^2 + \dots + \lambda_n^{-m} H_n^2$$

zu Identitäten machen, so müssen die Grössen $A_{\varkappa\lambda}^{(m)}$ die durch Entwicklung der Determinante

$$A^m = [\Sigma \pm A_{11} A_{22} \dots A_{nn}]^m = \Sigma \pm A_{11}^{(m)} A_{22}^{(m)} \dots A_{nn}^{(m)}$$

bestimmten Werthe haben, während

$$A_{\varkappa\lambda}^{(-m)} = \frac{\alpha_{\varkappa\lambda}^{(m)}}{A^m}$$

ist, wo die $\alpha_{\varkappa\lambda}^{(m)}$ die Unterdeterminanten von $A^{(m)}$ bedeuten, oder man bestimmt die $\alpha_{\varkappa\lambda}^{(m)}$ aus der Entwicklung

$$[\Sigma \pm \alpha_{11} \alpha_{22} \dots \alpha_{nn}]^m = \Sigma \pm \alpha_{11}^{(m)} \alpha_{22}^{(m)} \dots \alpha_{mm}^{(m)}.$$

Wenn man in (4.) für m die Zahlen 0, 1, 2, ... m setzt, die so erhaltenen Gleichungen mit Constanten $k_m, k_{m-1}, \dots k_1, k_0$ multiplicirt und alle addirt, ferner mit der Gleichung (5.) ebenso verfährt, so erhält man:

Soll die Substitution (3.) auch die Gleichungen

$$(6.)\quad \Sigma C_{\varkappa\lambda} \eta_\varkappa \eta_\lambda = \chi(\lambda_1) H_1^2 + \chi(\lambda_2) H_2^2 + \dots + \chi(\lambda_n) H_n^2,$$

$$(7.)\quad \Sigma D_{\varkappa\lambda} \eta_\varkappa \eta_\lambda = \chi\left(\frac{1}{\lambda_1}\right) H_1^2 + \chi\left(\frac{1}{\lambda_2}\right) H_2^2 + \dots + \chi\left(\frac{1}{\lambda_n}\right) H_n^2$$

erfüllen, wenn

$$\chi(\lambda) = \sum_i k_{m-i} \lambda^i = k_0 \lambda^m + k_1 \lambda^{m-1} + \dots + k_{m-1} \lambda + k_m,$$

so muss

$$C_{\varkappa\lambda} = \Sigma k_{m-i} A_{\varkappa\lambda}^{(i)}, \qquad D_{\varkappa\lambda} = \Sigma k_{m-i} \frac{\alpha_{\varkappa\lambda}^{(i)}}{A^i}$$

sein, wo $A_{\varkappa\lambda}^{(1)} = A_{\varkappa\lambda}$, $A_{\varkappa\varkappa}^{(0)} = 1$, $A_{\varkappa\lambda}^{(0)} = 0$.

Multiplicirt man die Gleichung (1.) mit einer constanten Grösse ε und subtrahirt sie von (2.), so erhält man die durch (3.) identische Gleichung

$$(8.)\quad \Sigma (A_{\varkappa\lambda} - \varepsilon B_{\varkappa\lambda}) \eta_\varkappa \eta_\lambda = (\lambda_1 - \varepsilon) H_1^2 + (\lambda_2 - \varepsilon) H_2^2 + \dots + (\lambda_n - \varepsilon) H_n^2,$$

in der $B_{\varkappa\varkappa} = 1$, $B_{\varkappa\lambda} = 0$. Dieselbe geht aus (2.) hervor, wenn wir dort

$$(9.) \qquad A_{\varkappa\varkappa} \text{ in } A_{\varkappa\varkappa} - \varepsilon \quad \text{und} \quad \lambda_i \text{ in } \lambda_i - \varepsilon$$

verändern. Diese Vertauschungen dürfen wir auch in allen andern durch (3.) identischen Gleichungen vornehmen, weil die Substitution (3.) sich nicht ändert, wenn (8.) an die Stelle von (2.) gesetzt wird.

Durch diese Veränderungen (9.) geht die Determinante A über in

$$-\varDelta(\varepsilon) = \begin{vmatrix} A_{11}-\varepsilon & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22}-\varepsilon & \dots & A_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn}-\varepsilon \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11}-\varepsilon & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_{1,n+1} & x_1 \\ a_{21} & a_{22}-\varepsilon & \dots & a_{2n} & a_{2,n+1} & x_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\varepsilon & a_{n,n+1} & x_n \\ a_{n+1,2} & a_{n+1,2} & \dots & a_{n+1,n} & a_{n+1,n+1} & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

welche aus $-\varDelta$ hervorgeht, wenn man $\lambda = \varepsilon$ setzt. Die Grössen $\alpha_{\varkappa\lambda}$ werden zu den Unterdeterminanten $-\varDelta_{\varkappa\lambda}(\varepsilon)$ von $-\varDelta(\varepsilon)$, und somit heisst die aus den reciproken Functionen beider Seiten von (8.) gebildete Gleichung

$$\frac{1}{\varDelta(\varepsilon)} \Sigma \varDelta_{\varkappa\lambda}(\varepsilon) \eta_\varkappa \eta_\lambda = \frac{1}{\lambda_1 - \varepsilon} H_1^2 + \frac{1}{\lambda_2 - \varepsilon} H_2^2 + \dots + \frac{1}{\lambda_n - \varepsilon} H_n^2,$$

welche immer noch Folge der Substitution (3.) ist.

Legen wir hierin den ε verschiedene Werthe $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_n$ bei, multipliciren diese mit Constanten $h_1, h_2, \dots h_n$ und addiren alle, so entsteht eine neue Gleichung, in der der Coefficient von H_k^2 aus einer Summe von Termen $\frac{h_i}{\lambda_k - \varepsilon_i}$ besteht, also einem rationalen Bruch der Grösse λ_k gleicht. Dies giebt den Satz:

Soll durch die lineare Substitution (3.) auch die Gleichung

$$(10.) \qquad \Sigma C_{\varkappa\lambda} \eta_\varkappa \eta_\lambda = \frac{\psi(\lambda_1)}{\chi(\lambda_1)} H_1^2 + \frac{\psi(\lambda_2)}{\chi(\lambda_2)} H_2^2 + \dots + \frac{\psi(\lambda_n)}{\chi(\lambda_n)} H_n^2$$

erfüllt werden, wenn $\psi(\lambda)$ und $\chi(\lambda)$ ganze Functionen sind, letztere von höherem Grade wie erstere, und in Partialbrüche zerlegt

$$\frac{\psi(\lambda)}{\chi(\lambda)} = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{h_i}{\lambda - \varepsilon_i}$$

ist, so muss, vorausgesetzt alle ε seien verschieden,

$$C_{\varkappa\lambda} = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{h_i \varDelta_{\varkappa\lambda}(\varepsilon_i)}{\varDelta(\varepsilon_i)}$$

sein.

Wird $\chi(\lambda) = 0$ durch r gleiche Wurzeln ε befriedigt, so kommt in der Zerlegung von $\frac{\psi(\lambda)}{\chi(\lambda)}$ in Partialbrüche die Reihe

$$\frac{k_1}{\lambda-\varepsilon}+\frac{k_2}{(\lambda-\varepsilon)^2}+\cdots+\frac{k_r}{(\lambda-\varepsilon)^r} = \Sigma\frac{k_i}{(\lambda-\varepsilon)^i}$$

vor. Wendet man nun die Vertauschung (9.) auf (7.) an, so entsteht eine Gleichung in der der Coefficient von H_k diese Form $\Sigma\frac{k_i}{(\lambda-\varepsilon)^i}$ hat und dies ist in die obige Entwickelung einzuführen.

Ist endlich der Grad von ψ höher als der von χ, so kann man $\frac{\psi(\lambda)}{\chi(\lambda)}$ entweder in eine ganze und eine gebrochene Function zerlegen, deren Nenner von höherem Grade ist als der Zähler, und für diese die entsprechenden Formen bilden, oder man nimmt zuerst die reciproken Functionen, in denen dann der Coefficient von H_k gleich $\frac{\chi(\lambda)}{\psi(\lambda)}$ wird, und kehrt von diesen zu den ursprünglichen zurück. Ebenso enthält auch die Gleichung (10.) für den Fall, dass $\psi(\lambda) = 1$ wird, die reciproke Function von (6.), wenn $\chi(\lambda)$ in beiden Gleichungen dieselbe Bedeutung hat

Die hier entwickelten Formeln lassen sich in derselben Weise für den Fall bilden, wo $F_0(u_1, u_2, \dots u_{n+1})$ wie in §. 2 eine beliebige quadratische Form bedeutet, nur werden dann die Coefficienten der Functionen $F_m(\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n)$ und $f_m(\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n)$ complicirter.

§. 7.

Setzen wir die Werthe §. 3 (15.) in die Gleichung (14.) desselben Paragraphen sowie in die Gleichung

$$\eta_1^2+\eta_2^2+\cdots+\eta_n^2 = H_1^2+H_2^2+\cdots+H_n^2$$

ein, so erhalten wir die Differentialformeln

$$(1.)\quad \begin{cases} F(dx_1, dx_2, \dots dx_n, -(x_1dx_1+x_2dx_2+\cdots+x_ndx_n)) \\ \qquad = -\frac{1}{4}\left\{\frac{\lambda_1 l_1}{L_1}d\lambda_1^2+\frac{\lambda_2 l_2}{L_2}d\lambda_2^2+\cdots+\frac{\lambda_n l_n}{L_n}d\lambda_n^2\right\}, \\ dx_1^2+dx_2^2+\cdots+dx_n^2 \\ \qquad = -\frac{1}{4}\left\{\frac{l_1}{L_1}d\lambda_1^2+\frac{l_2}{L_2}d\lambda_2^2+\cdots+\frac{l_n}{L_n}d\lambda_n^2\right\}, \end{cases}$$

welche Folgen der Gleichungen

$$(2.)\quad \Delta^{(1)} = 0,\quad \Delta^{(2)} = 0,\quad \dots\quad \Delta^{(n)} = 0$$

sind, wenn $\Lambda^{(k)}$ die Form §. 3 (16.) hat. Ebenso entsteht aus der Gleichung §. 6 (4.)

$$F_m(\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n) = \lambda_1^m H_1^2 + \lambda_2^m H_2^2 + \dots + \lambda_n^m H_n^2$$

die Differentialformel

$$(3.)\quad F_m(dx_1, dx_2, \dots dx_n) = -\tfrac{1}{4}\left\{\frac{\lambda_1^m l_1}{L_1}d\lambda_1^2 + \frac{\lambda_2^m l_2}{L_2}d\lambda_2^2 + \dots + \frac{\lambda_n^m l_n}{L_n}d\lambda_n^2\right\},$$

gültig für jedes ganze m.

Es sollen jetzt die folgenden $n-1$ simultanen Differentialgleichungen integrirt werden:

$$(4.)\quad \begin{cases} dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2 = 0, \\ F(dx_1, dx_2, \dots dx_n, -(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + \dots + x_n dx_n)) = 0, \\ F_2\ (dx_1, dx_2, \dots dx_n) = 0, \\ F_3\ (dx_1, dx_2, \dots dx_n) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ F_{n-2}(dx_1, dx_2, \dots dx_n) = 0, \end{cases}$$

welche sämmtlich von der ersten Ordnung aber vom zweiten Grade sind und worin ganze Functionen der x die Coefficienten der Differentiale bilden.

Transformiren wir diese Gleichungen mittelst der Substitution (2.), so gehen sie nach (1.) und (3.) in das System

$$(5.)\quad \sum_k \frac{l_k}{L_k}d\lambda_k^2 = 0, \quad \sum_k \frac{\lambda_k l_k}{L_k}d\lambda_k^2 = 0, \quad \dots \quad \sum_k \frac{\lambda_k^{n-2} l_k}{L_k}d\lambda_n^2 = 0$$

über, wo die Summen über die Zahlen 1, 2, ... n für k auszudehnen sind, und dieses lässt sich sowohl in transcendenter, wie in algebraischer Form integriren, wenn man den von *Jacobi* im 24sten Bande dieses Journals zum Beweise des *Abel*schen Theorems angewandten Weg einschlägt. Man führe zu dem Ende eine neue Variabele t ein mittelst der Gleichung

$$(4'.)\quad 4F_{n-1}(dx_1, dx_2, \dots dx_n) = (-1)^n dt^2,$$

welche durch die Substitution (2.) wegen (3.) in

$$(6.)\quad \sum_k \frac{\lambda_k^{n-1} l_k}{L_k}d\lambda_k^2 = (-1)^{n-1}dt^2$$

übergeht, und erinnere sich, dass der Ausdruck

$$\sum_k \frac{\lambda_k^i}{l_k} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\lambda_k^i}{(\lambda_1-\lambda_k)(\lambda_2-\lambda_k)\dots(\lambda_{k-1}-\lambda_k)(\lambda_{k+1}-\lambda_k)\dots(\lambda_n-\lambda_k)}$$

identisch verschwindet, so lange $i < n-1$, dagegen $= (-1)^{n-1}$ wird, wenn

$i=n-1$. In Folge dessen werden unsere Differentialgleichungen befriedigt, wenn man

$$(7.)\qquad \frac{d\lambda_k}{dt} = \frac{\pm\sqrt{L_k}}{l_k}$$

setzt. Diese Werthe von $\frac{d\lambda_k}{dt}$ genügen aber auch den Gleichungen

$$\sum_k \frac{d\lambda_k}{\sqrt{L_k}} = 0,\quad \sum_k \frac{\lambda_k d\lambda_k}{\sqrt{L_k}} = 0,\quad \ldots\quad \sum_k \frac{\lambda_k^{n-2} d\lambda_k}{\sqrt{L_k}} = 0,\quad \sum_k \frac{\lambda_k^{n-1} d\lambda_k}{\sqrt{L_k}} = (-1)^{n-1} dt,$$

sobald den Wurzelgrössen dieselben Vorzeichen, wie in (7.) gegeben werden, so dass sie die Gleichungen (5.) und (6.) ersetzen. Da die Variabeln separirt sind, findet man aus ihnen durch Integration

$$(8.)\quad \begin{cases} \beta_0 = \int \frac{d\lambda_1}{\sqrt{L_1}} + \int \frac{d\lambda_2}{\sqrt{L_2}} + \cdots + \int \frac{d\lambda_n}{\sqrt{L_n}}, \\ \beta_1 = \int \frac{\lambda_1 d\lambda_1}{\sqrt{L_1}} + \int \frac{\lambda_2 d\lambda_2}{\sqrt{L_2}} + \cdots + \int \frac{\lambda_n d\lambda_n}{\sqrt{L_n}}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \beta_{n-2} = \int \frac{\lambda_1^{n-2} d\lambda_1}{\sqrt{L_1}} + \int \frac{\lambda_2^{n-2} d\lambda_2}{\sqrt{L_2}} + \cdots + \int \frac{\lambda_n^{n-2} d\lambda_n}{\sqrt{L_n}}, \\ (-1)^{n-1} t - \tau = \int \frac{\lambda_1^{n-1} d\lambda_1}{\sqrt{L_1}} + \int \frac{\lambda_2^{n-1} d\lambda_2}{\sqrt{L_2}} + \cdots + \int \frac{\lambda_n^{n-1} d\lambda_n}{\sqrt{L_n}}, \end{cases}$$

als vollständige Integrale von (5.) und (6.) oder (4.) und (4'.) mit den n willkürlichen Constanten $\beta_0, \beta_1, \ldots \beta_{n-2}, \tau$, während die ersten $n-1$ Gleichungen die Integrale von (5.) oder (4.) geben.

Die unter dem Wurzelzeichen in (8.) auftretende Grösse L_k ist eine ganze Function von λ_k vom Grade n, deren Linearfactoren in dem hier betrachteten Fall nach §. 4, alle reell und verschieden sind. Die Gleichungen (8.) enthalten daher *Abel*sche Integrale erster und zweiter Gattung, und zwar die ersten $\nu-1$ Gleichungen solche erster Gattung, wenn $n=2\nu+2$ oder $=2\nu+1$.

Um die algebraischen Integrale zu finden, hat man genau das *Jacobi*sche Verfahren anzuwenden, indem man von dem System (7.) ausgeht, ich führe daher nur das Resultat an. Setzt man wie in §. 5

$$L_k = (g_1-\lambda_k)(g_2-\lambda_k)\ldots(g_n-\lambda_k)$$

und

$$\Delta(g_i) = \sqrt{(g_i-\lambda_1)(g_i-\lambda_2)\ldots(g_i-\lambda_n)},$$

so wird

$$(9.)\qquad \Delta(g_i)\left\{\frac{\sqrt{L_1}}{(g_i-\lambda_1)l_1} + \frac{\sqrt{L_2}}{(g_i-\lambda_2)l_2} + \cdots + \frac{\sqrt{L_n}}{(g_i-\lambda_n)l_n}\right\} = \text{Const.}$$

ein Integral der Gleichungen (5.), woraus wir die vollständigen Integrale bekommen, wenn wir für g_i irgend $n-1$ der n Wurzeln von $L=0$ nehmen. Hierin sind die λ mittelst der Gleichungen (2.) wieder durch die x zu ersetzen, um die Integrale des vorgelegten Systems (4.) zu erhalten, und diese Operation ist ausführbar, weil die Integralgleichung (9.) in Bezug auf λ_1, λ_2, ... λ_n symmetrisch ist.

Da die Vorzeichen in (7.) ganz willkürlich sind, dürfen wir auch in den Gleichungen (8.) und (9.) die Vorzeichen der Quadratwurzeln ganz willkürlich wählen. So erhalten wir aus den $n-1$ Gleichungen (9.), indem wir alle Zeichencombinationen bilden, 2^{n-1} Gleichungensysteme von je $n-1$ Gleichungen. Denken wir uns andererseits die Gleichungen (5.) nach den $n-1$ Verhältnissen der $d\lambda$ aufgelöst, so erhalten wir auch für diese 2^{n-1} solche Werthsysteme, da alle Gleichungen vom zweiten Grade sind. Die gefundenen Integralgleichungen (9.) und ebenso die transcendenten (8.) geben daher die vollständige Lösung der vorgelegten Differentialgleichungen.

Ganz in derselben Weise wie hier kann man verfahren, wenn statt des Systems (4.) irgend $n-1$ andere Differentialgleichungen vorgelegen hätten, sobald dieselben vor Einführung der Werthe §. 3 (15.) in der transformirten Form aus

$$\lambda_1^i\chi(\lambda_1)H_1^2+\lambda_2^i\chi(\lambda_2)H_2^2+\cdots+\lambda_n^i\chi(\lambda_n)H_n^2$$

hervorgehen, wenn für i irgend $n-1$ auf einanderfolgende Zahlen gesetzt werden, immer wird man wie oben die vollständigen Integrale in transcendenter Form finden können, indem nur die Gleichungen (7.) andere Gestalt annehmen.

Kiel, April 1865.

Beiträge zur Theorie der Variation der einfachen Integrale.

(Von Herrn *R. Lipschitz* zu Bonn.)

Nachdem *Jacobi* in der Theorie der Variation der einfachen eine abhängige Variable enthaltenden Integrale einen Weg geschaffen hat, auf welchem, sobald die Bedingung für das Verschwinden der ersten Variation erfüllt ist, die Criterien für das algebraische Vorzeichen der zweiten Variationen gefunden werden können *), ist das Streben verschiedener Mathematiker dahin gerichtet gewesen, die von *Jacobi* ohne Beweis aufgestellten Principien zu begründen, vollständig durchzuführen, und auf allgemeinere Fragen der Variationsrechnung auszudehnen. Beweise jener Principien haben die Herren *Delaunay, Heine, Minding* und andere **) geliefert. Herr *Spitzer* richtete sein Augenmerk auf die definitive Gestalt, in welche die zweite Variation des betreffenden Integrals durch die successiven *Jacobi*schen Transformationen übergeht ***). Die Schwierigkeit, welche hier noch zu lösen blieb, bestand darin, aus den bekannten Particularlösungen einer gewissen linearen Differentialgleichung ein specielles System von Lösungen zu bilden, das jenem Zweck der Umformung entspricht, und Herr *Spitzer* suchte die Bedingungen, denen dies specielle System genügen muss, auf das Sorgfältigste zu erforschen. Tiefer noch drang Herr *Hesse* in die Natur dieser Bedingungen ein, und stellte dieselben zuerst allgemein als eine recurrirende Folge von Gleichungen dar †). Herr *Clebsch* unterwarf die Variation der einfachen Integrale, in denen mehrere abhängige Variable vorkommen, einer Untersuchung, und erlangte die zur Entscheidung des Maximums oder Minimums geeignete Transformation ihrer zweiten Variation ††). Diese Transformation setzt wieder voraus, dass aus den bekannten Particularlösungen eines gewissen Systems von linearen Differentialgleichungen ein besonderes System von Lösungen gebildet werde, dessen willkürliche Con-

---

*) Bd. XVII, pag. 68 dieses Journals.

**) Bd. VI, pag. 209 des *Liouville*schen Journals. Bd. LIV, pag. 68, Bd. LV, pag. 300 dieses Journals.

***) Sitzungsberichte der Wiener Academie vom Jahre 1854, pag. 1014.

†) Bd. LIV, pag. 227 dieses Journals.

††) Bd. LV, pag. 254 und pag. 335 dieses Journals.

stanten gewissen Bedingungen genügen müssen. In dem ersten diesen Gegenstand betreffenden Aufsatze werden diese Bedingungen in einer einfachen Form dargestellt, die aber ausser den willkürlichen Constanten noch andere Elemente enthält, und nicht die Lösung der Aufgabe gestattet, jene Constanten durch eine angemessene Zahl unabhängiger Constanten auszudrücken. Der zweite Aufsatz behandelt diese Aufgabe mit Hülfe des Mittels, dass die Variation des einfachen Integrals nach der Analogie der Untersuchungen von *Hamilton* und *Jacobi* über die mechanischen Probleme auf die Integration einer partiellen Differentialgleichung reducirt wird.

Im Laufe einer Untersuchung, die einen anderen Gegenstand betraf, kam ich zu einem Problem der Variationsrechnung, dessen besondere Verhältnisse mir die Vermuthung erregten, hier müsse sich jene Transformation der zweiten Variation unmittelbar und vollständig durchführen lassen. Ein näheres Eingehn auf diese Frage lehrte mich, dass dieselbe für eine umfassende Gattung von Integralen einer allgemeinen und einfachen Beantwortung fähig ist. Zu dieser Gattung gehören einfache Integrale, bei denen beliebig viele von der Integrationsvariable abhängige Grössen und beliebig hohe Differentialquotienten derselben vorkommen; doch gelten die Einschränkungen, dass zwischen jenen abhängigen Grössen keine Bedingungsgleichungen gegeben sind, ferner dass die höchsten vorkommenden Differentialquotienten von jeder derselben alle von derselben Orduung sind, und endlich dass wenn man die Function, deren Integral variirt werden soll, nach jenen höchsten Differentialquotienten zweimal partiell differentiirt und aus diesen zweiten partiellen Differentialquotienten die Determinante bildet, dieselbe nicht identisch verschwindet. Wie ich hoffe, wird die mitzutheilende Untersuchung die eingeführten Beschränkungen als naturgemäss erscheinen lassen; des vollkommeneren Zusammenhangs wegen habe ich mir erlaubt, die Darstellung von den Grundlagen der Variationsrechnung aus zu beginnen und für einige der schon bekannten Resultate neue Entwicklungen zu geben.

§. 1.

Es seien $y_1, y_2, \dots y_\sigma$ zu bestimmende Functionen der unabhängigen Veränderlichen x, und es sei f eine gegebene Function der Grössen $x, y_1, y_2, \dots y_\sigma$ und der Differentialquotienten $\frac{d^{\mathfrak{b}} y_{\mathfrak{a}}}{dx^{\mathfrak{b}}} = y_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$, wo $\mathfrak{a}$ die Zahlenreihe $1, 2, \dots \sigma$ und $\mathfrak{b}$ die Zahlenreihe $1, 2, \dots n$, wie in dem folgenden durch-

gehends, durchlaufen soll, dann stellt das zwischen den festen Grenzen p und q genommene Integral

$$(1.)\quad V = \int_p^q f(x, y_1, y_2, \dots y_\sigma, y_{1,1}, \dots y_{\sigma,1}, \dots y_{1,n}, \dots y_{\sigma,n})\,dx$$

die Gattung von Integralen dar, deren Variation gegenwärtig untersucht werden wird; doch muss die Function f noch die Bedingung erfüllen, dass die aus den partiellen nach $y_{a,n}$ genommenen zweiten Differentialquotienten von f gebildete Determinante

$$(2.)\quad \Delta = \Sigma \pm \frac{\partial^2 f}{\partial y_{1,n}\,\partial y_{1,n}}\;\frac{\partial^2 f}{\partial y_{2,n}\,\partial y_{2,n}}\cdots\frac{\partial^2 f}{\partial y_{\sigma,n}\,\partial y_{\sigma,n}}$$

nicht identisch verschwindet *). Denkt man sich in die Function f statt y_a den Ausdruck $y_a + \varepsilon w_a$ substituirt, in welchem ε eine kleine Grösse, w_a eine unbestimmte Function von x bedeutet, und nennt bei der nach Potenzen von ε anzustellenden Entwickelung das Aggregat der in ε und in ε^2 multiplicirten Glieder beziehungsweise $\varepsilon\varphi$ und $\varepsilon^2\psi$, so verwandelt sich das Integral V bei Vernachlässigung der Glieder von der Ordnung ε^3 in das Aggregat

$$(3.)\quad V + \varepsilon\int_p^q \varphi\,dx + \varepsilon^2\int_p^q \psi\,dx.$$

Damit nun V ein Maximum oder Minimum werde, muss seine erste Variation $\varepsilon\int_p^q \varphi\,dx$ gleich Null werden, und seine zweite Variation $2\varepsilon^2\int_p^q \psi\,dx$ ein festes negatives oder positives Zeichen haben. Da durch die Aenderung von y_a in $y_a + \varepsilon w_a$ der Differentialquotient $\frac{d^b y_a}{dx^b}$ in den Ausdruck $\frac{d^b y_a}{dx^b} + \varepsilon\frac{d^b w_a}{dx^b} = y_{a,b} + \varepsilon w_{a,b}$ übergeht, so ist φ eine homogene lineare Function der $(n+1)\sigma$ Grössen $w_a, w_{a,1}, \dots w_{a,n}$,

$$\varphi = \Sigma_a\left(\frac{\partial f}{\partial y_a} w_a + \frac{\partial f}{\partial y_{a,1}} w_{a,1} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial y_{a,n}} w_{a,n}\right)$$

zu deren Transformation *Lagrange* die Gleichung

$$(4.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial y_a} w_a + \dfrac{\partial f}{\partial y_{a,1}} w_{a,1} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial y_{a,n}} w_{a,n} \\ = \left(\dfrac{\partial f}{\partial y_a} - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial f}{\partial y_{a,1}} + \cdots + (-1)^n \dfrac{d^n}{dx^n}\dfrac{\partial f}{\partial y_{a,n}}\right) w_a \\ + \dfrac{d}{dx}\left\{F_{a,2n-1} w_a + F_{a,2n-2} w_{a,1} + \cdots F_{a,n} w_{a,n-1}\right\} \end{cases}$$

*) In dem von *Jacobi* behandelten Fall, wo $\sigma = 1$ ist, geht diese Determinante in den Ausdruck $\frac{\partial^2 f}{\partial y_{1,n}\,\partial y_{1,n}}$ über.

aufgestellt hat. Die Grössen $F_{a,2n-b}$ haben die Bedeutung

$$(5.)\quad F_{a,2n-b} = \frac{\partial f}{\partial y_{a,b}} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_{a,b+1}} + \cdots + (-1)^{n-b}\frac{d^{n-b}}{dx^{n-b}}\frac{\partial f}{\partial y_{a,n}}.$$

Das Verschwinden der ersten Variation $\varepsilon\int_p^q \varphi\, dx$ hat nun vermöge der Gleichung (4.) zur nothwendigen Folge, dass die Grössen $y_1, y_2, \ldots y_\sigma$ das System von Differentialgleichungen

$$(6.)\quad \frac{\partial f}{\partial y_a} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_{a,1}} + \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\frac{\partial f}{\partial y_{a,n}} = 0$$

befriedigen müssen, und wir fügen die Voraussetzung hinzu, dass die Grössen $w_a, w_{a,1}, \ldots w_{a,n-1}$ durch die Substitutionen $x = p$ und $x = q$ gleich Null werden sollen.

Um der zweiten Variation $2\varepsilon^2\int_p^q \psi\, dx$ eine Gestalt zu geben, welche das algebraische Vorzeichen ihres Werthes sicher zu erkennen gestattet, soll die Function ψ, welche als homogene ganze Function zweiten Grades von den $(n+1)\sigma$ Grössen $w_a, w_{a,1}, \ldots w_{a,n}$ auftritt, als das Aggregat einer homogenen ganzen Function von σ unabhängigen Elementen, und des nach x genommenen Differentialquotienten einer homogenen ganzen Function der Grössen $w_a, w_{a,1}, \ldots w_{a,n-1}$ dargestellt werden. Zur Erreichung dieses Zweckes kann man nach *Jacobis* Vorgang ein gewisses System von linearen Differentialgleichungen verwenden, das mit dem System (6.) in innigem Zusammenhange steht. Wenn das System (6.), das von der Ordnung ν sein möge, vollständig integrirt ist, und die Constanten der Integration mit $\overset{1}{c}, \overset{2}{c}, \ldots \overset{\nu}{c}$ bezeichnet werden, so gilt für eine beliebige von diesen $\overset{\gamma}{c}$ die Gleichung

$$(7.)\quad \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y_{a,b}}\right)}{\partial \overset{\gamma}{c}} = \frac{\partial \psi\left(\frac{\partial y}{\partial \overset{\gamma}{c}}\right)}{\partial\left(\frac{\partial y_{a,b}}{\partial \overset{\gamma}{c}}\right)},$$

wo, durch die Substitution $w_a = \frac{\partial y_a}{\partial \overset{\gamma}{c}}$, $w_{a,b} = \frac{\partial y_{a,b}}{\partial \overset{\gamma}{c}}$, die Function ψ in $\psi\left(\frac{\partial y}{\partial \overset{\gamma}{c}}\right)$ übergegangen ist. Es bezeichne nun z_a ein neues System von Grössen, bei denen wieder $\frac{d^b z_a}{dx^b} = z_{a,b}$ gesetzt wird, und es verwandle sich durch die Gleichung $w_a = z_a$ die Function ψ in $\psi(z)$, dann folgt aus der Differentiation des Systems (6.) nach der Constante $\overset{\gamma}{c}$ mit Hinzuziehung von (7.), dass das System

von linearen Differentialgleichungen

$$(7^a.)\qquad \frac{\partial\psi(z)}{\partial z_a}-\frac{d}{dx}\frac{\partial\psi(z)}{\partial z_{a,1}}+\cdots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}\frac{\partial\psi(z)}{\partial z_{a,n}} = 0,$$

welches wie (6.) von der ν^{ten} Ordnung ist, durch die Gleichungen

$$(8.)\qquad z_a = \frac{\partial y_a}{\partial \overset{\gamma}{c}}$$

befriedigt, und wenn $\overset{\gamma}{K}$ für $\gamma=1, 2, \ldots \nu$ beliebige Constanten sind durch die Gleichungen

$$(9.)\qquad z_a = \Sigma_\gamma \overset{\gamma}{K}\frac{\partial y_a}{\partial \overset{\gamma}{c}}$$

allgemein integrirt wird.

Die für das Folgende wesentlichen Eigenschaften dieser Grössen z_a lassen sich dadurch erkennen, dass man die Gleichungen (4.), in denen die Grössen $y_1, y_2, \ldots y_\sigma$ dem System (6.) entsprechend bestimmt, die Grössen $w_1, w_2, \ldots w_\sigma$ aber vollkommen unbestimmt sein mögen, nach einer Constante $\overset{\gamma}{c}$ differentiirt. Wird die für ein beliebiges Grössensystem $u_a = w_a$ geltende Bezeichnung

$$(10.)\qquad \chi_{a,2n-b}(u) = \frac{\partial\psi(u)}{\partial u_{a,b}}-\frac{d}{dx}\frac{\partial\psi(u)}{\partial u_{a,b+1}}+\cdots+(-1)^{n-b}\frac{d^{n-b}}{dx^{n-b}}\frac{\partial\psi(u)}{\partial u_{a,n}}$$

eingeführt, so liefert jene Differentiation die Gleichung

$$(11.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\psi\left(\dfrac{\partial y}{\partial \overset{\gamma}{c}}\right)}{\partial\left(\dfrac{\partial y_a}{\partial \overset{\gamma}{c}}\right)}w_a+\cdots+\dfrac{\partial\psi\left(\dfrac{\partial y}{\partial \overset{\gamma}{c}}\right)}{\partial\left(\dfrac{\partial y_{a,n}}{\partial \overset{\gamma}{c}}\right)}w_{a,n} \\ = \dfrac{d}{dx}\left(\chi_{a,2n-1}\left(\dfrac{\partial y}{\partial \overset{\gamma}{c}}\right)w_a+\cdots+\chi_{a,n}\left(\dfrac{\partial y}{\partial \overset{\gamma}{c}}\right)w_{a,n-1}\right). \end{cases}$$

Sobald man diese Gleichung mit der Constante $\overset{\gamma}{K}$ multiplicirt und nach γ von 1 bis ν summirt, so entsteht die Relation

$$(11^a.)\qquad \frac{\partial\psi(z)}{\partial z_a}w_a+\cdots+\frac{\partial\psi(z)}{\partial z_{a,n}}w_{a,n} = \frac{d}{dx}\left(\chi_{a,2n-1}(z)w_a+\cdots+\chi_{a,n}(z)w_{a,n-1}\right),$$

in welcher der Werth z_a nach (9.) gleich $\Sigma_\gamma \overset{\gamma}{K}\frac{\partial y_a}{\partial \overset{\gamma}{c}}$ ist.

Von dieser Relation (11^a.) wird nun ein zwiefacher Gebrauch gemacht werden. Erstens setze man die unbestimmten Grössen $w_a = z_a$ und summire

nach a von 1 bis σ; dann stellt die linke Seite von (11^a.) nach einer Grundeigenschaft der homogenen Functionen zweiter Ordnung gerade den Werth $2\psi(z)$ dar, und die rechte Seite ist ein vollständiger Differentialquotient. Mithin kommt

$$(12.)\qquad 2\psi(z) = \frac{d}{dx}\Sigma_a(\chi_{a,2n-1}(z)z_a+\cdots+\chi_{a,n}(z)z_{a,n-1}).$$

Zweitens werde statt der Grössen w_a ein System von Grössen v_a eingeführt, welches die Gleichungen (7^a.) befriedigen soll und vermittelst eines neuen Systems von Constanten $\overset{\gamma}{L}$ durch die Gleichung $v_a = \Sigma_\gamma \overset{\gamma}{L}\frac{\partial y_a}{\partial \overset{\gamma}{c}}$ dargestellt werden kann. Alsdann dürfen in (11^a.) die Grössen v_a mit den Grössen z_a vertauscht werden, und es gelten die beiden Gleichungen

$$(13.)\qquad \begin{cases} \frac{\partial\psi(z)}{\partial z_a}v_a+\cdots+\frac{\partial\psi(z)}{\partial z_{a,n}}v_{a,n} = \frac{d}{dx}(\chi_{a,2n-1}(z)v_a+\cdots+\chi_{a,n}(z)v_{a,n-1}), \\ \frac{\partial\psi(v)}{\partial v_a}z_a+\cdots+\frac{\partial\psi(v)}{\partial v_{a,n}}z_{a,n} = \frac{d}{dx}(\chi_{a,2n-1}(v)z_a+\cdots+\chi_{a,n}(v)z_{a,n-1}). \end{cases}$$

Subtrahirt man die linken und die rechten Seiten dieser Gleichungen beziehungsweise von einander und summirt die Differenzen nach dem Buchstaben a, so hat die Differenz der linken Seiten nach einer Grundeigenschaft der homogenen ganzen Functionen zweiter Ordnung die Summe Null, und es entsteht die Gleichung

$$(14.)\quad 0 = \frac{d}{dx}\Sigma_a(\chi_{a,2n-1}(z)v_a-\chi_{a,2n-1}(v)z_a+\cdots+\chi_{a,n}(z)v_{a,n-1}-\chi_{a,n}(v)z_{a,n-1}).$$

Dieselbe kann unmittelbar integrirt werden und liefert so die neue Gleichung

$$(15.)\quad \Sigma_a(\chi_{a,2n-1}(z)v_a-\chi_{a,2n-1}(v)z_a+\cdots+\chi_{a,n}(z)v_{a,n-1}-\chi_{a,n}(v)z_{a,n-1}) = \text{Const.}$$

§. 2.

Ehe die so eben angestellten Beobachtungen für die Transformation der zweiten Variation des Integrals V verwerthet werden, scheint es angemessen, die mit der Zahl ν bezeichnete Ordnung des Systems von Differentialgleichungen (6.) näher ins Auge zu fassen. Diese Ordnungszahl hängt von den Gliedern ab, welche die höchsten Differentialquotienten der Grössen y_1, y_2, ... y_σ enthalten. Da nun die linke Seite der Gleichung (6.) aus dem Ausdruck $F_{a,2n-\mathfrak{b}}$ hervorgeht, sobald $\mathfrak{b}=0$ gesetzt wird, so wollen wir allgemein die Aggregate von Gliedern angeben, welche in $F_{a,2n-\mathfrak{b}}$ die höchsten nämlich $(2n-\mathfrak{b})^{\text{ten}}$ Differentialquotienten der y_1, y_2, ... y_σ enthalten. Es sind

abgesehen von dem Factor $(-1)^{n-\mathfrak{b}}$ die Ausdrücke

$$(16.)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y_{\mathfrak{a},n}\,\partial y_{1,n}}\,\frac{d^{2n-\mathfrak{b}} y_1}{dx^{2n-\mathfrak{b}}}+\cdots+\frac{\partial^2 f}{\partial y_{\mathfrak{a},n}\,\partial y_{\sigma,n}}\,\frac{d^{2n-\mathfrak{b}} y_\sigma}{dx^{2n-\mathfrak{b}}},$$

während bei $\mathfrak{b}=n$

$$(16^a.)\qquad F_{\mathfrak{a},n} = \frac{\partial f}{\partial y_{\mathfrak{a},n}}$$

ist. Setzt man also in (16.) $\mathfrak{b}=0$ und successive $\mathfrak{a}=1,\ 2,\ \dots\ \sigma$, so hat man die Glieder, welche in der Gleichung (6.) die höchsten Differentialquotienten der $y_1,\ y_2,\ \dots\ y_\sigma$ involviren. Jetzt gilt die Bedingung, dass die aus den zweiten partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial^2 f}{\partial y_{\mathfrak{a},n}\,\partial y_{\mathfrak{a}',n}}$ (wo $\mathfrak{a}'$ wie $\mathfrak{a}$ von 1 bis σ gehen) gebildete Determinante Δ nicht identisch verschwinden darf. Deshalb kann nie der Fall eintreten, dass bei dem System von Differentialgleichungen (6.) die Factoren von irgend einem der Differentialquotienten

$$\frac{d^{2n} y_1}{dx^{2n}},\quad \frac{d^{2n} y_2}{dx^{2n}},\quad \dots\quad \frac{d^{2n} y_\sigma}{dx^{2n}}$$

in jeder der σ Gleichungen gleich Null werden, und daher ist das System Differentialgleichungen nothwendig von der Ordnung $\nu=2n\sigma$.

Behufs der Transformation der Function ψ mögen jetzt $n\sigma$ Systeme von Grössen $\overset{\beta}{u}_{\mathfrak{a}}$ gebildet werden, die für $z_{\mathfrak{a}}$ gesetzt die Gleichungen $(7^a.)$ befriedigen; hier soll $\beta=1,\ 2,\ \dots\ n\sigma$ und $\frac{d^{\mathfrak{b}} \overset{\beta}{u}_{\mathfrak{a}}}{dx^{\mathfrak{b}}} = \overset{\beta}{u}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ sein. Durch die Gleichung

$$(17.)\qquad w_{\mathfrak{a}} = \Sigma_\beta \overset{\beta}{u}_{\mathfrak{a}} \overset{\beta}{g}$$

stelle ich dann die Grössen $w_{\mathfrak{a}}$ als lineare Functionen von $n\sigma$ neuen Grössen $\overset{\beta}{g}$ dar, erhalte aber für die letztern $n\sigma-\sigma$ Bedingungsgleichungen, indem ich die Forderung ausspreche, dass die nach x genommenen Differentialquotienten der $w_{\mathfrak{a}}$ bis zum $(n-1)^{\text{ten}}$ einschliesslich nur die Grössen $\overset{\beta}{g}$ und keine Differentialquotienten derselben enthalten sollen. Dies giebt die Relationen

$$(17^a.)\qquad \begin{cases} w_{\mathfrak{a},1} = \Sigma_\beta \overset{\beta}{u}_{\mathfrak{a},1} \overset{\beta}{g}, & 0 = \Sigma_\beta \overset{\beta}{u}_{\mathfrak{a}} \dfrac{d\overset{\beta}{g}}{dx}, \\ w_{\mathfrak{a}} = \Sigma_\beta \overset{\beta}{u}_{\mathfrak{a},2} \overset{\beta}{g}, & 0 = \Sigma_\beta \overset{\beta}{u}_{\mathfrak{a},1} \dfrac{d\overset{\beta}{g}}{dx}, \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ w_{\mathfrak{a},n-1} = \Sigma_\beta \overset{\beta}{u}_{\mathfrak{a},n-1} \overset{\beta}{g}, & 0 = \Sigma_\beta \overset{\beta}{u}_{\mathfrak{a},n-2} \dfrac{d\overset{\beta}{g}}{dx}. \end{cases}$$

Der Differentialquotient $w_{a,n}$ nimmt dann diese Gestalt an:

$$(18.)\quad \begin{cases} w_{a,n} = \zeta_a + \eta_a, \\ \zeta_a = \Sigma_\beta \overset{\beta}{u}_{a,n} \overset{\beta}{g}, \\ \eta_a = \Sigma_\beta \overset{\beta}{u}_{a,n-1} \dfrac{d\overset{\beta}{g}}{dx}. \end{cases}$$

Wenn man jetzt zunächst in die Function ψ statt der Grössen w_a, $w_{a,1}$, ... $w_{a,n-1}$ die in (17.) und (17^a.) gegebenen Ausdrücke, statt der Grösse $w_{a,n}$ aber den Ausdruck ζ_a aus (18.) einführt, so möge daraus der Ausdruck Ψ hervorgehn. Giebt man hier den Grössen $\overset{\beta}{g}$ für einen Augenblick die Bedeutung von Constanten, so leuchtet es ein, dass der Ausdruck Ψ auch dadurch aus der Function ψ entsteht, dass man statt der Grössen w_a ein System von Auflösungen der Gleichungen (17^a.) substituirt, welches die Form $w_a = \Sigma_\beta \overset{\beta}{u}_a \overset{\beta}{g}$ besitzt und die Gleichungen $w_{a,b} = \Sigma_\beta \overset{\beta}{u}_{a,b} \overset{\beta}{g}$ für $b = 1, 2, \dots n$ zur Folge hat. Unter dieser momentanen Annahme tritt die Gleichung (12.) in Kraft, in welcher

$$z_{a,b} = \Sigma_\beta \overset{\beta}{u}_{a,b} \overset{\beta}{g}, \qquad \chi_{a,2n-b}(z) = \Sigma_\beta \chi_{a,2n-b}(\overset{\beta}{u}) \overset{\beta}{g}$$

zu setzen ist. Weil aber die Function Ψ dieselbe Gestalt behält, mag man sich die Grössen $\overset{\beta}{g}$ mit x veränderlich denken oder nicht, so gilt die Gleichung

$$(19.)\quad 2\Psi = \frac{d}{dx}\Sigma_a\{\Sigma_\beta \chi_{a,2n-1}(\overset{\beta}{u})\overset{\beta}{g}\,\Sigma_\beta \overset{\beta}{u}_a \overset{\beta}{g} + \cdots + \Sigma_\beta \chi_{a,n}(\overset{\beta}{u})\overset{\beta}{g}\,\Sigma_\beta \overset{\beta}{u}_{a,n-1}\overset{\beta}{g}\},$$

welche aus (12.) entstanden ist, für ganz unbeschränkte Werthe der $\overset{\beta}{g}$, sobald man nur auf der rechten Seite die angedeutete Differentiation nach x ausführt, ohne die Grössen $\overset{\beta}{g}$ als veränderliche zu behandeln. Man erreicht aber denselben Zweck, indem man zuerst die Grössen $\overset{\beta}{g}$ als Functionen von x betrachtet und dann die zu dem früheren Ausdruck des Differentialquotienten hinzukommenden Glieder durch Hinzufügung von Gliedern gleichen Werthes und ungleichen Zeichens vernichtet. So erhält man aus (19.) die neue Gleichung

$$(20.)\quad \begin{cases} 2\Psi = \dfrac{d}{dx}\Sigma_a\{\Sigma_\beta \chi_{a,2n-1}(\overset{\beta}{u})\overset{\beta}{g}\,\Sigma_\beta \overset{\beta}{u}_a \overset{\beta}{g} + \cdots + \Sigma_\beta \chi_{a,n}(\overset{\beta}{u})\overset{\beta}{g}\,\Sigma_\beta \overset{\beta}{u}_{a,n-1}\overset{\beta}{g}\} \\ \quad -\Sigma_a\{\Sigma_\beta \chi_{a,2n-1}(\overset{\beta}{u})\overset{\beta}{g}\,\Sigma_\beta \overset{\beta}{u}_a \dfrac{d\overset{\beta}{g}}{dx} + \cdots + \Sigma_\beta \chi_{a,n}(\overset{\beta}{u})\overset{\beta}{g}\,\Sigma_\beta \overset{\beta}{u}_{a,n-1}\dfrac{d\overset{\beta}{g}}{dx}\} \\ \quad -\Sigma_a\{\Sigma_\beta \chi_{a,2n-1}(\overset{\beta}{u})\dfrac{d\overset{\beta}{g}}{dx}\,\Sigma_\beta \overset{\beta}{u}_a \overset{\beta}{g} + \cdots + \Sigma_\beta \chi_{a,n}(\overset{\beta}{u})\dfrac{d\overset{\beta}{g}}{dx}\,\Sigma_\beta \overset{\beta}{u}_{a,n-1}\overset{\beta}{g}\}. \end{cases}$$

Die Einführung der Function Ψ macht es nun möglich, die Transformation der Function ψ, wenn ich so sagen darf, in vollkommener Durchsichtigkeit auszuführen. Um ψ aus Ψ zu bilden, lässt man die Werthe von w_a, $w_{a,1}$, ... $w_{a,n-1}$ ungeändert und setzt nur an die Stelle von ζ_a den zweigliedrigen Ausdruck $\zeta_a+\eta_a = w_{a,n}$. Weil aber die Grössen ζ_a in Ψ nur in der ersten und zweiten Potenz vorkommen, so hat man in aller Strenge die Entwickelung

$$(21.)\qquad 2\psi = 2\Psi+2\Sigma_a\frac{\partial\Psi}{\partial\zeta_a}\eta_a+\Sigma_a\Sigma_{a'}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\zeta_a\partial\zeta_{a'}}\eta_a\eta_{a'},$$

wo a und a' von 1 bis σ gehn, und es lässt sich bewirken, dass der Ausdruck $2\Psi+2\Sigma_a\frac{\partial\Psi}{\partial\zeta_a}\eta_a$ gleich einem vollständigen Differentialquotienten wird. Aus den Gleichungen (17^a.), (18.), (20.) und der Gleichung $\frac{\partial\Psi}{\partial\zeta_a} = \Sigma_\beta\chi_{a,n}(\overset{\beta}{u})\overset{\beta}{g}$ wird leicht die Relation

$$(22.)\qquad \left\{\begin{aligned} &2\Psi+2\Sigma_a\frac{\partial\Psi}{\partial\zeta_a}\eta_a\\ &= \frac{d}{dx}\Sigma_a\{\Sigma_\beta\chi_{a,2n-1}(\overset{\beta}{u})\overset{\beta}{g}\,\Sigma_\beta\overset{\beta}{u}_a\overset{\beta}{g}+\cdots+\Sigma_\beta\chi_{a,n}(\overset{\beta}{u})\overset{\beta}{g}\,\Sigma_\beta\overset{\beta}{u}_{a,n-1}\overset{\beta}{g}\}\\ &+\Sigma_a\Big\{\Sigma_\beta\chi_{a,2n-1}(\overset{\beta}{u})\overset{\beta}{g}\,\Sigma_\beta\overset{\beta}{u}_a\frac{d\overset{\beta}{g}}{dx}+\cdots+\Sigma_\beta\chi_{a,n}(\overset{\beta}{u})\overset{\beta}{g}\,\Sigma_\beta\overset{\beta}{u}_{a,n-1}\frac{d\overset{\beta}{g}}{dx}\Big\}\\ &-\Sigma_a\Big\{\Sigma_\beta\chi_{a,2n-1}(\overset{\beta}{u})\frac{d\overset{\beta}{g}}{dx}\Sigma_\beta\overset{\beta}{u}_a\overset{\beta}{g}+\cdots+\Sigma_\beta\chi_{a,n}(\overset{\beta}{u})\frac{d\overset{\beta}{g}}{dx}\Sigma_\beta\overset{\beta}{u}_{a,n-1}\overset{\beta}{g}\Big\}\end{aligned}\right.$$

abgeleitet. Erinnert man sich nun der Gleichung (15.), so ist klar, dass wenn für jede zwei aus der Reihe von 1 bis $n\sigma$ genommene diverse Zahlenwerthe β und β' und für einen einzelnen Werth x_0 von x die Gleichung

$$(23.)\qquad \Sigma_a(\chi_{a,2n-1}(\overset{\beta}{u})\overset{\beta'}{u}_a-\chi_{a,2n-1}(\overset{\beta'}{u})\overset{\beta}{u}_a+\cdots+\chi_{a,n}(\overset{\beta}{u})\overset{\beta'}{u}_{a,n-1}-\chi_{a,n}(\overset{\beta'}{u})\overset{\beta}{u}_{a,n-1}) = 0$$

gilt, dieselbe Gleichung für ein indefinites x richtig bleibt. Wir legen jetzt den Grössensystemen $\overset{\beta}{u}_a$ die Bedingung auf, die Gleichung (23.) in dem angegebenen Umfange zu erfüllen (wo dieselbe die Anzahl von $\frac{n\sigma(n\sigma-1)}{2}$ Gleichungen repräsentirt); dann verschwindet auf der rechten Seite von (22.) die zweite und die dritte Zeile, und $2\Psi+2\Sigma_a\frac{\partial\Psi}{\partial\zeta_a}\eta_a$ wird in der That gleich einem vollständigen Differentialquotienten. Hiermit geht die Gleichung (21.) in die folgende Gestalt über, welche die gewünschte Transformation der Function ψ darstellt:

$$(24.)\qquad \left\{\begin{aligned} 2\psi &= \frac{d}{dx}\Sigma_a\{\Sigma_\beta\chi_{a,2n-1}(\overset{\beta}{u})\overset{\beta}{g}\,\Sigma_\beta\overset{\beta}{u}_a\overset{\beta}{g}+\cdots+\Sigma_\beta\chi_{a,n}(\overset{\beta}{u})\overset{\beta}{g}\,\Sigma_\beta\overset{\beta}{u}_{a,n-1}\overset{\beta}{g}\}\\ &\qquad+\Sigma_a\Sigma_{a'}\frac{\partial^2 f}{\partial y_{a,n}\partial y_{a',n}}\eta_a\eta_{a'}.\end{aligned}\right.$$

Denn man erkennt sofort, dass

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \zeta_a \partial \zeta_{a'}} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial w_{a,n} \partial w_{a',n}} = \frac{\partial^2 f}{\partial y_{a,n} \partial y_{a',n}}$$

ist.

Um die Grössen $\overset{\beta}{g}$ durch die ursprünglichen Elemente des Variationsproblems auszudrücken, hat man sich des Systems von linearen Gleichungen

$$(25.)\quad \begin{cases} w_a = \Sigma_\beta \overset{\beta}{u}_a \overset{\beta}{g}, \\ w_{a,1} = \Sigma_\beta \overset{\beta}{u}_{a,1} \overset{\beta}{g}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ w_{a,n-1} = \Sigma_\beta \overset{\beta}{u}_{a,n-1} \overset{\beta}{g} \end{cases}$$

zu bedienen, und zur Darstellung von η_a der Gleichung

$$(26.)\quad \eta_a = w_{a,n} - \Sigma_\beta \overset{\beta}{u}_{a,n} \overset{\beta}{g}.$$

Da also die Grössen $\overset{\beta}{g}$ lineare Functionen der Grössen w_a, $w_{a,1}$, ... $w_{a,n-1}$ werden, so sieht man leicht, dass bei der Einführung des Werthes von ψ aus (24.) in die zweite Variation $2\varepsilon^2 \int_p^q \psi dx$ der ohne Integralzeichen darstellbare Theil des Ausdrucks verschwindet, weil nach der oben erwähnten allgemeinen Voraussetzung die Grössen w_a, $w_{a,1}$, ... $w_{a,n-1}$ für $x = p$ und für $x = q$ den Werth Null erhalten. Mithin kommt die Gleichung

$$(24^a.)\quad 2\int_p^q \psi dx = \int_p^q \Sigma_a \Sigma_{a'} \frac{\partial^2 f}{\partial y_{a,n} \partial y_{a',n}} \eta_a \eta_{a'} dx.$$

§. 3.

Die so eben abgeleitete Transformation beruht auf der stillschweigenden Voraussetzung, dass Systeme von Grössen $\overset{\beta}{u}_a$ aufgefunden werden können, welche für einen besondern Werth x_0 von x die vorgeschriebene Bedingung

$$(23.)\quad \Sigma_a(\chi_{a,2n-1}(\overset{\beta}{u}) \overset{\beta'}{u}_a - \chi_{a,2n-1}(\overset{\beta'}{u}) \overset{\beta}{u}_a + \cdots + \chi_{a,n}(\overset{\beta}{u}) \overset{\beta'}{u}_{a,n-1} - \chi_{a,n}(\overset{\beta'}{u}) \overset{\beta}{u}_{a,n-1}) = 0$$

erfüllen, und bei denen die zur Auflösung des Systems (25.) gehörige Determinante aus den Grössen $\overset{\beta}{u}_{a,b-1}$ nicht verschwindet. Denn nur, wenn diese Determinante nicht gleich Null ist, werden die Grössen $\overset{\beta}{g}$ bestimmte lineare

Functionen der Grössen $w_a, \dots w_{a,n-1}$. *Gegenwärtig werden wir uns mit der Aufgabe beschäftigen, die allgemeinsten Systeme von Grössen $\overset{\beta}{u}_a$ zu ermitteln, die den angegebenen Forderungen Genüge leisten.*

Um zunächst den besondern Werth x_0 von x vortheilhaft auszuwählen, erinnern wir an die durchgehends geltende Voraussetzung, dass die aus den Grössen $\frac{\partial^2 f}{\partial y_{a,n}\,\partial y_{a',n}}$ gebildete Determinante Δ nicht identisch verschwinden darf. Weil diese Grösse nur die n^{ten}, das System von Differentialgleichungen (6.) aber die $2n^{\text{ten}}$ Differentialquotienten der Grössen $y_1, y_2, \dots y_\sigma$ als die höchsten enthält, so kann auch die vollständige Integration des Systems (6.) niemals allgemein die Gleichung $\Delta = 0$ zur Folge haben. Man darf daher immer zwischen den Grenzen des Integrals V den Werth x_0 so annehmen, dass für denselben der Werth $\Delta(0)$ von Δ nicht gleich Null ist. Bezeichnet man nun die Werthe der Grössen $y_1, y_2, \dots y_\sigma$ und ihrer sämmtlichen Differentialquotienten bis zum $(2n-1)^{\text{ten}}$ einschliesslich für $x = x_0$ beziehungsweise durch

$$(27.)\quad \begin{cases} y_1(0),\ y_2(0),\ \dots y_\sigma(0);\ \dots\ y_{1,n-1}(0),\ y_{2,n-1}(0),\ \dots y_{\sigma,n-1}(0); \\ y_{1,n}(0),\ y_{2,n}(0),\ \dots y_{\sigma,n}(0);\ \dots\ y_{1,2n-1}(0),\ y_{2,2n-1}(0),\ \dots y_{\sigma,2n-1}(0), \end{cases}$$

so bilden diese $2n\sigma$ Grössen offenbar ein vollständiges oder unabhängiges System von Integrationsconstanten der Gleichungen (6.).

Aus diesem System lässt sich dann ein zweites unabhängiges System von Integrationsconstanten herleiten, das zur Bildung der gesuchten Grössen $\overset{\beta}{u}_a$ vorzugsweise geeignet ist. Es mögen die durch die Gleichung (5.) definirten Ausdrücke $F_{a,2n-b}$, wenn man in denselben statt der Grössen $y_1, y_2, \dots y_\sigma$ und ihrer Differentialquotienten, die bis zur $(2n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung sich erheben, die für $x = x_0$ eintretenden Werthe (27.) setzt, in die Ausdrücke $F_{a,2n-b}(0)$ übergehn; so haben wir ein solches System in der Reihe von Grössen

$$(28.)\quad \begin{cases} y_1(0),\ y_2(0),\ \dots y_\sigma(0);\ \dots\ y_{1,n-1}(0),\ y_{2,n-1}(0),\ \dots y_{\sigma,n-1}(0); \\ F_{1,n}(0),\ F_{2,n}(0),\ \dots F_{\sigma,n}(0);\ \dots\ F_{1,2n-1}(0),\ F_{2,2n-1}(0),\ \dots F_{\sigma,2n-1}(0). \end{cases}$$

Um zu beweisen, dass diese Grössen in der That ein System von unabhängigen Integrationsconstanten der Gleichungen (6.) darstellen, ist es nothwendig und ausreichend zu zeigen, dass, wenn man die Grössen (28.) als Functionen der Grössen (27.) betrachtet, die Functionaldeterminante der erstern in Bezug auf die letztern genommen nicht verschwinden kann. Es lehrt aber eine einfache Ueberlegung, dass, da die erste Zeile in (28.) mit der ersten Zeile in (27.) identisch ist, und da die zweite Zeile in (28.) aus n Gruppen besteht,

in denen die höchsten vorkommenden Differentialquotienten der $y_1, y_2, \dots y_\sigma$ successive von der $n^{\text{ten}}, \dots (2n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung sind, bei der Bildung dieser Functionaldeterminante nur die Ausdrücke von wesentlicher Bedeutung sind, welche in $F_{\mathfrak{a},2n-\mathfrak{b}}$ die $(2n-\mathfrak{b})^{\text{ten}}$ Differentialquotienten der $y_1, y_2, \dots y_\sigma$ enthalten. Aus der gleichartigen Gestalt dieser Ausdrücke, welche in (16.) und (16^a.) dargestellt ist, ergiebt sich für die betreffende Functionaldeterminante der Werth $(\Delta(0))^n$. Weil nun der Werth $\Delta(0)$ bei uns immer von Null verschieden ist, so gilt von dem Werth der Functionaldeterminante das gleiche, und gerade das sollte gezeigt werden.

Von nun ab wird angenommen werden, dass die Constanten (27.) durch die Constanten (28.) ausgedrückt sind, und dass also bei der Integration des Systems (6.) die Grössen $y_1, \dots y_\sigma$ durch x und durch das System von Constanten (28.) dargestellt sind; um dieselben durch das Zeichen $\overset{\gamma}{c}$ allgemein zu bezeichnen, denke man sich

$$(28^a.)\qquad y_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}-1}(0) = \overset{\mathfrak{a}+(\mathfrak{b}-1)\sigma}{c}, \quad F_{\mathfrak{a},2n-\mathfrak{b}}(0) = \overset{\mathfrak{a}+(2n-\mathfrak{b})\sigma}{c}$$

gesetzt. Dann wird für den Werth $x = x_{\shortparallel}$ die Grösse $y_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}-1} = \overset{\mathfrak{a}+(\mathfrak{b}-1)\sigma}{c}$ und die Grösse $F_{\mathfrak{a},2n-\mathfrak{b}} = \overset{\mathfrak{a}+(2n-\mathfrak{b})\sigma}{c}$ werden. Behufs der Bildung des allgemeinen Integrals der Gleichungen (7^a.) sei jetzt

$$(29.)\qquad \frac{\partial y_\mathfrak{a}}{\partial \overset{\gamma}{c}} = \overset{\gamma}{U}_\mathfrak{a}, \quad \frac{\partial y_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}}{\partial \overset{\gamma}{c}} = \overset{\gamma}{U}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$$

und es gehe die Function $\chi_{\mathfrak{a},2n-\mathfrak{b}}$ durch Einführung dieser Grössen in $\chi_{\mathfrak{a},2n-\mathfrak{b}}(\overset{\gamma}{U})$ über.

Diese Grössen $\overset{\gamma}{U}_\mathfrak{a}$ besitzen, wie man leicht einsieht, die folgenden Grundeigenschaften. Erstens wird die Grösse $\overset{\gamma}{U}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}-1}$, sobald $x = x_{\shortparallel}$ gesetzt wird, für $\mathfrak{a} = 1, 2, \dots \sigma;$ $\mathfrak{b} = 1, 2 \dots n;$ $\gamma = 1, 2, \dots 2n\sigma$, den einzigen Werth $\gamma = \mathfrak{a}+(\mathfrak{b}-1)\sigma$ ausgenommen, gleich Null, für $\gamma = \mathfrak{a}+(\mathfrak{b}-1)\sigma$ aber gleich der Einheit. Zweitens wird wegen der Gleichung

$$\frac{\partial F_{\mathfrak{a},2n-\mathfrak{b}}}{\partial \overset{\gamma}{c}} = \chi_{\mathfrak{a},2n-\mathfrak{b}}\left(\frac{\partial y}{\partial \overset{\gamma}{c}}\right)$$

die Grösse $\chi_{\mathfrak{a},2n-\mathfrak{b}}(\overset{\gamma}{U})$, sobald $x = x_{\shortparallel}$ gesetzt wird, für $\mathfrak{a} = 1, 2, \dots \sigma;$ $\mathfrak{b} = 1, 2, \dots n;$ $\gamma = 1, 2, \dots 2n\sigma$, den einzigen Werth $\gamma = \mathfrak{a}+(2n-\mathfrak{b})\sigma$ ausgenommen, gleich Null, für $\gamma = \mathfrak{a}+(2n-\mathfrak{b})\sigma$ aber gleich der Einheit.

Es bedeute nun $\overset{\beta,\gamma}{K}$ ein System von $2n^2\sigma^2$ Constanten, so hat man für die Grössen $\overset{\beta}{u}_a$ die ganz allgemeine Darstellung

$$(30.)\qquad \overset{\beta}{u}_a = \Sigma_\gamma \overset{\beta,\gamma}{K}\overset{\gamma}{U}_a,$$

insofern dieselben die Gleichungen (7^a.) befriedigen müssen; und in Folge von (30.)

$$(31.)\qquad \begin{cases} \overset{\beta}{u}_{a,b-1} = \Sigma_\gamma \overset{\beta,\gamma}{K}\overset{\gamma}{U}_{a,b-1}, \\ \chi_{a,2n-b}(\overset{\beta}{u}) = \Sigma_\gamma \overset{\beta,\gamma}{K}\chi_{a,2n-b}(\overset{\gamma}{U}). \end{cases}$$

Setzt man hier $x = x_0$, so gehn nach den Grundeigenschaften der Grössen $\overset{\gamma}{U}_a$ die Ausdrücke rechts in einzelne Constanten über, und es kommt

$$(32.)\qquad \overset{\beta}{u}_{a,b-1} = \overset{\beta,a+(b-1)\sigma}{K},\qquad \chi_{a,2n-b}(\overset{\beta}{u}) = \overset{\beta,a+(2n-b)\sigma}{K}$$

Zu Anfang dieses Paragraphen ist darauf aufmerksam gemacht worden, dass die aus den Grössen $\overset{\beta}{u}_{a,b-1}$ zu bildende Determinante nicht gleich Null werden darf. *Da aber für $x = x_0$ diese Grössen sich in die Constanten $\overset{\beta,a+(b-1)\sigma}{K}$ verwandeln, so müssen diese nothwendig so beschaffen sein, dass die aus ihnen zu bildende Determinante nicht verschwindet.* Hierauf gestützt kann man die Grössen $\overset{\beta,a+(2n-b)\sigma}{K}$ wie folgt durch die Grössen $\overset{\beta,a+(b-1)\sigma}{K}$ ausdrücken

$$(33.)\qquad \begin{cases} \overset{\beta,1+(2n-1)\sigma}{K} = \overset{\beta,1}{K}\overset{1,1}{\lambda} + \cdots + \overset{\beta,n\sigma}{K}\overset{1,n\sigma}{\lambda}, \\ \overset{\beta,2+(2n-1)\sigma}{K} = \overset{\beta,1}{K}\overset{2,1}{\lambda} + \cdots + \overset{\beta,n\sigma}{K}\overset{2,n\sigma}{\lambda}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \overset{\beta,(n+1)\sigma}{K} = \overset{\beta,1}{K}\overset{n\sigma,1}{\lambda} + \cdots + \overset{\beta,n\sigma}{K}\overset{n\sigma,n\sigma}{\lambda} \end{cases}$$

und besitzt die völlige Sicherheit, dass die neuen Grössen $\overset{a,a'}{\lambda}$ stets eindeutig bestimmt sind.

Vermöge der Gleichungen (32.) geht die zur Einschränkung der $\overset{\beta}{u}_a$ aufgestellte Gleichung (23.), die sich auf den Werth $x = x_0$ bezieht, in die folgende über, welche lediglich die Constanten K enthält:

$$(34.)\qquad \Sigma_a\Big(\overset{\beta,a+(2n-1)\sigma}{K}\overset{\beta',a}{K} - \overset{\beta',a+(2n-1)\sigma}{K}\overset{\beta,a}{K} + \cdots + \overset{\beta,a+n\sigma}{K}\overset{\beta',a+(n-1)\sigma}{K} - \overset{\beta',a+n\sigma}{K}\overset{\beta,a+(n-1)\sigma}{K}\Big) = 0.$$

Wenn man hier die Constanten $\overset{\beta,a+(2n-b)\sigma}{K}$ durch ihre Ausdrücke (33.) ersetzt, so folgt aus dem Umstande, dass die Determinante aus den Grössen $\overset{\beta,a+(b-1)\sigma}{K}$

nicht verschwinden darf, mit Nothwendigkeit, dass zwischen den Grössen $\overset{\mathfrak{a},\mathfrak{a}'}{\lambda}$ die Bedingungsgleichung

$$(35.)\qquad \overset{\mathfrak{a},\mathfrak{a}'}{\lambda} = \overset{\mathfrak{a}',\mathfrak{a}}{\lambda}$$

gelten muss, welche $\frac{n\sigma(n\sigma-1)}{2}$ Gleichungen repräsentirt.

Aus diesen Betrachtungen geht in aller Strenge das Resultat hervor, dass man den für die Grössen $\overset{\beta}{u}_{\mathfrak{a}}$ aufgestellten Forderungen in der allgemeinsten Weise genügt, indem man erstens für die $\overset{\beta,\mathfrak{a}+(\mathfrak{b}-1)\sigma}{K}$ ein ganz beliebiges System von $(n\sigma)^2$ Werthen nimmt, dessen Determinante nur nicht verschwinden darf, zweitens ein Sys n von Grössen $\overset{\mathfrak{a},\mathfrak{a}'}{\lambda}$ bildet, das nur an die Beschränkung (35.) *gebunden ist, vermittelst dieser Grössen $\overset{\mathfrak{a},\mathfrak{a}}{\lambda}$ die Constanten $\overset{\beta,\mathfrak{a}+(2n-\mathfrak{b})\sigma}{K}$ durch die Gleichungen* (33.) *ausdrückt, und diese Werthe der $\overset{\beta,\gamma}{K}$ in die Gleichung* (30.) *einführt. So entsteht der Ausdruck*

$$(36.)\ \overset{\beta}{u}_{\mathfrak{a}} = \Sigma_{\mathfrak{a}',\mathfrak{b}'} \overset{\beta,\mathfrak{a}'+(\mathfrak{b}'-1)\sigma}{K} \overset{\mathfrak{a}'+(\mathfrak{b}'-1)\sigma}{U_{\mathfrak{a}}} + \Sigma_{\mathfrak{a}',\mathfrak{b}'} \Sigma_{\mathfrak{a}'',\mathfrak{b}''} \overset{\beta,\mathfrak{a}''+(\mathfrak{b}''-1)\sigma}{K} \overset{\mathfrak{a}'+(\mathfrak{b}'-1)\sigma,\mathfrak{a}''+(\mathfrak{b}''-1)\sigma}{\lambda} \overset{\mathfrak{a}'+(2n-\mathfrak{b}')\sigma}{U_{\mathfrak{a}}}$$

wo $\mathfrak{a}'$ *und* $\mathfrak{a}''$ *von* 1 *bis* σ, $\mathfrak{b}'$ *und* $\mathfrak{b}''$ *von* 1 *bis* .. *gehn.*

§. 4.

Nachdem im Vorigen eine vollständige Bestimmung der Grössen $\overset{\beta}{u}_{\mathfrak{a}}$ gegeben ist, bleibt es übrig, die gefundenen Ausdrücke in die Gleichungen (25.), (26.) und (24ª.) einzuführen. Um den Ausdruck (36.) handgerechter zu machen, werde für $\beta' = 1, 2, \ldots n\sigma$

$$(37.)\qquad \overset{\beta'}{U}_{\mathfrak{a}} + \Sigma_{\mathfrak{a}'',\mathfrak{b}''} \overset{\beta',\mathfrak{a}''+(\mathfrak{b}''-1)\sigma}{\lambda} \overset{\mathfrak{a}''+(2n-\mathfrak{b}'')\sigma}{U_{\mathfrak{a}}} = \overset{\beta'}{V}_{\mathfrak{a}}$$

und, wo es erforderlich sein sollte, wieder $\frac{d^{\mathfrak{b}} \overset{\beta'}{V}_{\mathfrak{a}}}{dx^{\mathfrak{b}}} = \overset{\beta'}{V}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ gesetzt; dann kommt

$$(38.)\qquad \overset{\beta}{u}_{\mathfrak{a}} = \Sigma_{\mathfrak{a}',\mathfrak{b}'} \overset{\beta,\mathfrak{a}'+(\mathfrak{b}'-1)\sigma}{K} \overset{\mathfrak{a}'+(\mathfrak{b}'-1)\sigma}{V_{\mathfrak{a}}}$$

Die Substitution dieser Werthe in (25.) legt es nahe, die $\overset{\beta}{g}$ durch neue Grössen

$$(39.)\qquad \overset{\beta'}{h} = \Sigma_{\beta} \overset{\beta,\beta'}{K} \overset{\beta}{g}$$

zu ersetzen. Aus (25.) und (26.) wird dann

$$(40.)\quad \begin{cases} w_a = \Sigma_{\beta'} \overset{\beta'}{V}_a \overset{\beta'}{k} \\ w_{a,1} = \Sigma_{\beta'} \overset{\beta'}{V}_{a,1} \overset{\beta'}{k} \\ \cdots\cdots\cdots \\ w_{a,n-1} = \Sigma_{\beta'} \overset{\beta'}{V}_{a,n-1} \overset{\beta'}{k} \end{cases}$$

und

$$(41.)\quad \eta_a = w_{a,n} - \Sigma_{\beta'} \overset{\beta'}{V}_{a,n} \overset{\beta'}{k}.$$

Die Darstellung der Grössen $\overset{\beta'}{k}$ aus dem System von Gleichungen (40.) erfordert die Bildung der Determinante aus den Grössen $\overset{\beta'}{V}_{a,b-1}$, welche R heissen möge. Aus der Gleichung (39.) erkennt man aber sofort, dass die Determinante aus den Grössen $\overset{\beta}{u}_{a,b-1}$ gleich dem Product von R in die Determinante aus den Grössen $\overset{\beta,\beta'}{K}$ ist, welche nicht gleich Null sein darf. Es fällt also die zu Anfang des §. 3 ausgesprochene Forderung, dass die Determinante aus den Grössen $\overset{\beta}{u}_{a,b-1}$ nicht Null werde, mit der Forderung zusammen, dass R nicht verschwinden darf. Aus der Gleichung (37.) und den Grundeigenschaften der $\overset{\gamma}{u}_a$ folgt unmittelbar, dass R für $x = x_0$, sobald man die sämmtlichen Constanten $\overset{a,a'}{\lambda} = 0$ setzt, den Werth der Einheit annimmt. Es handelt sich also darum, wenn den $\overset{a,a'}{\lambda}$ beliebige Werthe ertheilt werden, die Integration von $V = \int_p^q f dx$ von x_0 an nur bis zu solchen Grenzwerthen p und q zu führen, dass innerhalb des Bereichs der Integration an keiner Stelle $R = 0$ wird. Unter dieser Voraussetzung erhält man die Werthe

$$(42.)\quad \begin{cases} \overset{\beta'}{k} = \Sigma_{a,b} \dfrac{\partial R}{\partial \overset{\beta'}{V}_{a,b-1}} \dfrac{w_{a,b-1}}{R}, \\ \eta_a = w_{a,n} - \Sigma_{a',b'} \Sigma_{\beta'} \overset{\beta'}{V}_{a,n} \dfrac{\partial R}{\partial \overset{\beta'}{V}_{a',b'-1}} \dfrac{w_{a',b'-1}}{R}, \end{cases}$$

welche in den transformirten Ausdruck der zweiten Variation von V

$$(24^*.)\quad 2\varepsilon^2 \int_p^q \psi\, dx = \varepsilon^2 \int_p^q \Sigma_a \Sigma_{a'} \frac{\partial^2 f}{\partial y_{a,n} \partial y_{a',n}} \eta_a \eta_{a'} dx$$

einzusetzen sind. Die Grössen $\overset{\beta'}{V}_a$, aus denen die η_a gebildet werden, können vermöge der Relationen (28*.) und (29.) auch in folgender Weise ausgedrückt

werden

$$(37^a.)\qquad \overset{a'+(b'-1)\sigma}{V_a} = \frac{\partial y_a}{\partial y_{a',b'-1}(0)} + \Sigma_{a'',b''} \overset{a'+(b'-1)\sigma,\, a''+(b''-1)\sigma}{\lambda} \frac{\partial y_a}{\partial F_{a'',2n-b''}(0)}.$$

Im Anfange der Untersuchung ist die Forderung ausgesprochen worden, dass die Function ψ als das Aggregat eines vollständigen Differentialquotienten und einer homogenen ganzen Function von nur σ unabhängigen Elementen dargestellt werde, und diese Forderung ist durch die Gleichung (24.) erfüllt worden. Denn weil die Determinante Δ nicht identisch verschwinden darf, so lässt sich die homogene ganze Function $\Sigma_a \Sigma_{a'} \frac{\partial^2 f}{\partial y_{a,n} \partial y_{a',n}} \xi_a \xi_{a'}$ der Grössen $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_\sigma$ in ein Aggregat von den Quadraten von σ unabhängigen linearen Functionen der Grössen $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_\sigma$ verwandeln. Aus diesem Grunde besteht die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass der Ausdruck (24^a.) der zweiten Variation des Integrals V ein festes Vorzeichen habe, darin, dass die Function $\Sigma_a \Sigma_{a'} \frac{\partial^2 f}{\partial y_{a,n} \partial y_{a',n}} \xi_a \xi_{a'}$ ein festes algebraisches Vorzeichen habe. Wenn diese Function für die Werthe von $x = p$ bis $x = q$ (d. i. für eine endliche Ausdehnung des Gebietes von x) gleich dem Aggregat von den Quadraten von weniger als σ unabhängigen linearen Functionen der Grössen $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_\sigma$ werden könnte, so liesse sich durch eine passende Verfügung über die σ Grössen $w_1, w_2, \dots w_\sigma$, selbst in dem Falle, dass die Function $\Sigma_a \Sigma_{a'} \frac{\partial^2 f}{\partial y_{a,n} \partial y_{a',n}} \xi_a \xi_{a'}$ ihr Zeichen niemals wechselt, ein Verschwinden derselben bewirken. Hiemit würde die zweite Variation von V verschwinden und demnach kein Criterium des Maximums oder Minimums liefern.

Bonn, den 9. December 1864.

Ueber die dritte Gattung der *Abel*schen Integrale erster Ordnung.

(Von Herrn *G. Roch* in Halle.)

Als Integrale dritter Gattung bezeichnen wir Integrale algebraischer Functionen, welche für gewisse Werthe der Variabeln, oder, in *Riemann*scher Ausdrucksweise, in bestimmten Punkten der Fläche T logarithmisch unendlich sind. Diese Fläche stellt die Verzweigungsart der betrachteten algebraischen Functionen dar, und wir wollen jetzt speciell die Integrale untersuchen, für welche diese Fläche T fünffach zusammenhängend, oder $p=2$ ist. Die Bezeichnungsweise, welche *Riemann* in seiner Abhandlung über *Abel*sche Functionen (Bd. 54 dieses Journals) eingeführt, soll hier auch festgehalten und diese Abhandlung selbst soll, der Kürze wegen, einfach als „Abhandlung" citirt werden.

Für die folgenden Entwicklungen sind einige Sätze über endlich bleibende Integrale und ϑ-Functionen nöthig, welche hier, da sie in der Abhandlung bewiesen sind, nur kurz aufgeführt zu werden brauchen.

Es existiren für $p=2$ zwei linear von einander unabhängige endlich bleibende Integrale, welche in der Form enthalten sind:

$$u = \int \frac{(as+b)\,ds}{\sqrt{(s.1-s.1-k^2s.1-l^2s.1-m^2s)}},$$

oder durch rationale Transformationen immer in diese Form gebracht werden können. Dieselbe ist schon durch die Arbeit *Rosenheims* als canonische Form eingeführt, und soll auch hier beibehalten werden. Das Radical bezeichnen wir kürzer:

$$\sqrt{(s.1-s.1-k^2s.1-l^2s.1-m^2s)} = \sqrt{(s,k,l,m)}.$$

Den Zähler im Integrale bezeichnen wir durch

$$as+b = \varphi(s).$$

Alle Functionen φ können linear durch zwei ausgedrückt werden

$$\varphi_1(s) = a_1s+b_1,$$
$$\varphi_2(s) = a_2s+b_2,$$

und daher sind alle Integrale u linear durch zwei ausdrückbar.

Die Fläche T besteht, wegen der Zweideutigkeit der Quadratwurzel, aus zwei Blättern, welche in sechs Verzweigungspunkten zusammenhängen $\left(z = 0, 1, \frac{1}{k^2}, \frac{1}{l^2}, \frac{1}{m^2}, \infty\right)$. Jeder Punkt ist daher in der Fläche T eindeutig bestimmt durch Angabe des z und des Vorzeichens der algebraischen Function $s = \sqrt{(z, k, l, m)}$; daher kann ein solcher Punkt durch (s, z) bezeichnet werden.

Ueber die Lage der Querschnitte braucht hier nichts angeführt zu werden; eine der vielen möglichen Anordnungen lernt man aus der Abhandlung von *Prym:* theoria nova funct. ultraellipticarum, Druck bei *Schade,* Berlin, kennen. Wir bezeichnen die 4 Querschnitte mit (a_1), (a_2), (b_1), (b_2). Jedes endlich bleibende Integral u kann man bis auf eine additive Constante bestimmen, indem man die Periodicitätsmoduln an zweien dieser Querschnitte, z. B. (a_1), (a_2) angiebt. Es werden nun zwei Integrale u_1, u_2 bestimmt, so dass

$$u_1 = \int \frac{\varphi_1(z)\,dz}{\sqrt{(z, k, l, m)}}, \qquad \varphi_1(z) = a_1 z + b_1$$

an (a_1) den Modul πi, an (a_2) den Modul Null hat; und dass

$$u_2 = \int \frac{\varphi_2(z)\,dz}{\sqrt{(z, k, l, m)}}, \qquad \varphi_2(z) = a_2 z + b_2$$

an (a_1) den Modul 0, an (a_2) den Modul πi hat. Dann sind die Periodicitätsmoduln an den Querschnitten (b) bestimmt, nämlich $a_{1,1}$, $a_{1,2}$ für u_1 und $a_{2,1}$, $a_{2,2}$ für u_2. Hierbei ist $a_{1,2} = a_{2,1}$ (s. Abhandlung §. 20). Diese Gleichung $a_{1,2} = a_{2,1}$ entspricht ganz der von *Rosenhain* (sur les fonctions ultraellipt. de deux var. et à quatre pér., pg. 435):

$$0 = \int_{-\infty}^{0} \frac{x\,dx}{\sqrt{(x,k,\lambda,\mu)}} \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(x,k,\lambda,\mu)}} - \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{\sqrt{(x,k,\lambda,\mu)}} \int_{0}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{(x,k,\lambda,\mu)}}$$

$$- \int_{\frac{1}{k^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{x\,dx}{\sqrt{(x,k,\lambda,\mu)}} \int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}} \frac{dx}{\sqrt{(x,k,\lambda,\mu)}} + \int_{\frac{1}{k^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{dx}{\sqrt{(x,k,\lambda,\mu)}} \int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}} \frac{x\,dx}{\sqrt{(x,k,\lambda,\mu)}}.$$

Diese Integrale u_1, u_2 werden nun als Argumente der ϑ-Function benutzt:

$$\vartheta(u_1, u_2) = \sum_{-\infty}^{\infty}{}_m \sum_{-\infty}^{\infty}{}_n e^{m^2 a_{1,1} + 2mna_{1,2} + n^2 a_{2,2} + 2mu_1 + 2nu_2},$$

$a_{1,1}$, $a_{1,2}$, $a_{2,2}$ die vorhin erwähnten Periodicitätsmoduln.

Eine solche ϑ-Function ist, da u_1, u_2 eine gemeinsame obere Grenze haben, Function dieser Grenze, und als solche in zwei Punkten der Fläche T

gleich Null (Abhandlung §. 22). Die Lage dieser Punkte hängt von den in u_1, u_2 noch willkürlichen additiven Constanten ab; es seien α_1', α_2' die Werthe von u_1, u_2 in einem Punkte $(s_1 z_1)$, α_1'', α_2'' die Werthe in $(s_2 z_2)$. In der Folge wollen wir jeden solchen Punkt kurz als Punkt α', oder α'' bezeichnen; der Punkt (s, z) ist hiernach soviel wie der Punkt u. Die Function

$$\vartheta(u_1 - \alpha_1' - \alpha_1'', u_2 - \alpha_2' - \alpha_2'')$$

wird dann, bei geeigneter Wahl der Anfangswerthe der Integrale u_1, u_2 in den beiden Punkten α', α'' verschwinden.

Hieraus folgt, dass bei dieser Bestimmung:

$$\vartheta(-\alpha_1', -\alpha_2') = \vartheta(-\alpha_1'', -\alpha_2'') = 0.$$

Die ϑ-Function ist gerade, d. h. sie erlangt denselben Werth, wenn gleichzeitig beide Argumente ins Entgegengesetzte verwandelt werden; also ist auch

$$\vartheta(\alpha_1', \alpha_2') = \vartheta(\alpha_1'', \alpha_2'') = 0,$$

oder, da die Punkte α', α'' beliebige sind, so ist

$$\vartheta(u_1, u_2) = 0,$$

sobald die Argumente u_1, u_2 eine gemeinsame obere Grenze haben. Die letzte Gleichung ist also als Auflösung der Differentialgleichungen

$$\frac{du_1}{dz} = \frac{\varphi_1(z)}{\sqrt{(z, k, l, m)}}, \quad \frac{du_2}{dz} = \frac{\varphi_2(z)}{\sqrt{(z, k, l, m)}}$$

anzusehen.

Jede Function $\varphi = az + b$ wird in zwei übereinanderliegenden Punkten der Fläche T gleich Null; bei der vorhin genannten Bestimmung der Anfangswerthe haben die additiven Constanten in den Integralen u_1, u_2 solche Werthe, dass

$$(\alpha_1' + \alpha_1'', \alpha_2' + \alpha_2'') \equiv (0, 0),$$

wenn α', α'' solche über einander liegende, d. h. zu demselben Werthe von z gehörige Punkte sind (s. §. 23). Ferner haben dann die Integrale in den 6 Verzweigungspunkten Werthe

$$(u_1, u_2) \equiv \left(\tfrac{1}{2}(\varepsilon_1' \pi i + \varepsilon_1 a_{1,1} + \varepsilon_2 a_{1,2}), \tfrac{1}{2}(\varepsilon_2' \pi i + \varepsilon_1 a_{2,1} + \varepsilon_2 a_{2,2})\right),$$

wo ε, ε' Null oder 1 und

$$\varepsilon_1 \varepsilon_1' + \varepsilon_2 \varepsilon_2' \equiv 1 \quad (\text{mod. } 2)$$

(s. *Prym,* theoria nova etc. p. 36, oder meinen Aufsatz über Doppeltangenten an Curven vierter Ordnung). Der Kürze wegen soll die ϑ-Function

$$\vartheta(u_1 - \alpha_1' - \alpha_1'', u_2 - \alpha_2' - \alpha_2''),$$

da hier nie von elliptischen ϑ-Functionen (solchen mit einem Argumente) die Rede ist, mit

$$\vartheta(u-\alpha'-\alpha'')$$

bezeichnet werden. Die Function $\vartheta(u+\alpha'+\alpha'')$ ist dann Null in den beiden Punkten $-\alpha'$, $-\alpha''$, oder, nach dem Früheren, in den Punkten, welche mit α', α'' respective dasselbe z gemeinschaftlich haben.

Dies sind neben den bekannten Eigenschaften der ϑ-Function (Abhandlung §. 17) die Sätze, die wir in den folgenden Entwicklungen nöthig haben werden.

Untersuchen wir nun den Quotienten

$$Q = \frac{\vartheta(u+u'-\alpha)}{\vartheta(u+u'-\beta)}.$$

Derselbe ist, als Function des Punktes u betrachtet, nur Null in α und unendlich in β; $\lg Q$ ist daher in beiden Punkten logarithmisch unendlich. Zu beiden Seiten der Querschnitte (a_1), (a_2) haben die ϑ-Functionen gleiche Werthe; dagegen ist am Querschnitte (b_1):

$$\underset{+}{\vartheta}(u+u'-\alpha) = \underset{-}{\vartheta}(u+u'-\alpha).e^{-2(u_1+u'_1-\alpha_1)-a_{1,1}},$$
$$\underset{+}{\vartheta}(u+u'-\beta) = \underset{-}{\vartheta}(u+u'-\beta).e^{-2(u_1+u'_1-\beta_1)-a_{1,1}},$$

wenn wir durch die unter ϑ angebrachten Zeichen $+$, $-$ die Werthe der ϑ auf positiver oder negativer Seite des Querschnittes unterscheiden. Am Querschnitte (b_2) finden die Beziehungen statt

$$\underset{+}{\vartheta}(u+u'-\alpha) = \underset{-}{\vartheta}(u+u'-\alpha).e^{-2(u_2+u'_2-\alpha_2)-a_{2,2}},$$
$$\underset{+}{\vartheta}(u+u'-\beta) = \underset{-}{\vartheta}(u+u'-\beta).e^{-2(u_2+u'_2-\beta_2)-a_{2,2}}.$$

Daher hat $\log Q$, wenn wir von ganzen Vielfachen von $2\pi i$ absehen, an den Querschnitten (a_1), (a_2), (b_1), (b_2) respective die Periodicitätsmoduln:

$$0,\ 0,\ +2(\alpha_1-\beta_1),\ +2(\alpha_2-\beta_2).$$

Dieselben sind von der Lage des Punktes u' unabhängig; ist Q_1 der Werth von Q für eine andere Lage, etwa u'', dieses Punktes, so hat daher $\lg Q-\lg Q_1$ an allen vier Querschnitten die Periodicitätsmoduln Null; ferner ist diese Differenz, oder $\lg\frac{Q}{Q_1}$, als Function von u betrachtet, überall endlich, da Q und Q_1 nur gleichzeitig, und dann von derselben Ordnung, Null oder unendlich werden, mithin ist $\lg Q-\lg Q_1$ von u ganz unabhängig; $\lg Q$ muss, da es von

u' gerade so abhängt wie von u, die Summe zweier symmetrisch gebauten Ausdrücke sein, deren einer nur von u, der andere nur von u' abhängt; sei z_1 der in u' stattfindende Werth von z, so ist $\lg Q$ die Summe zweier Integrale dritter Gattung, mit den oberen Grenzen z und z_1, welche wie $\sqrt{(z,k,l,m)}$ verzweigt sind und es muss eine Gleichung geben von der Form:

$$(1.)\qquad \lg\frac{\vartheta(u+u'-\alpha)}{\vartheta(u+u'-\beta)} = \int_{\zeta}^{z}\frac{f(z)\,dz}{\sqrt{(z,k,l,m)}} + \int_{\zeta_1}^{z_1}\frac{f(z)\,dz}{\sqrt{(z,k,l,m)}} + \text{Const.}$$

Wir bestimmen nun zunächst die rationale Function $f(z)$. Der Ausdruck:

$$\frac{d}{dz}\lg\frac{\vartheta(u+u'-\alpha)}{\vartheta(u+u'-\beta)} = \frac{f(z)}{\sqrt{(z,k,l,m)}}$$

ist von z_1 unabhängig. Wir wählen, um ihn zu bestimmen, z_1 so, dass

$$(u_1+u_1',\ u_2+u_2') \equiv (0,0).$$

Dann sind Zähler und Nenner von Q gleich Null und es muss:

$$\frac{d}{dz}\lg\frac{\vartheta(u+u'-\alpha)}{\vartheta(u+u'-\beta)}$$

$$= \frac{\vartheta(u+u'-\beta)\dfrac{d\vartheta(u+u'-\alpha)}{dz} - \vartheta(u+u'-\alpha)\dfrac{d\vartheta(u+u'-\beta)}{dz}}{\vartheta(u+u'-\alpha)\,\vartheta(u+u'-\beta)}$$

nach der Regel behandelt werden, wie der Werth von Brüchen von der Form $\frac{0}{0}$ bestimmt wird. Wird Zähler und Nenner zweimal nach z differentiirt, da nach einmaliger Differentiation noch beide Null sind, so entsteht:

$$(2.)\qquad \frac{d}{dz}\lg\frac{\vartheta(u+u'-\alpha)}{\vartheta(u+u'-\beta)} = \frac{1}{2}\,\frac{\dfrac{d^2\vartheta(u+u'-\alpha)}{dz^2}}{\dfrac{d\vartheta(u+u'-\alpha)}{dz}} - \frac{1}{2}\,\frac{\dfrac{d^2\vartheta(u+u'-\beta)}{dz^2}}{\dfrac{d\vartheta(u+u'-\beta)}{dz}}.$$

Hier ist rechts $u_1+u_1' = u_2+u_2' = 0$ zu setzen,

$$(3.)\qquad \frac{d\vartheta(u+u'-\alpha)}{dz} = \big(\vartheta_1'(-\alpha)\varphi_1(z)+\vartheta_2'(-\alpha)\varphi_2(z)\big)\frac{1}{\sqrt{(z,k,l,m)}},$$

wenn

$$\frac{d\vartheta(v_1,v_2)}{dv_1} = \vartheta_1'(v),\qquad \frac{d\vartheta(v_1,v_2)}{dv_2} = \vartheta_2'(v)$$

gesetzt wird. Ferner

$$(4.)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2\vartheta(u+u'-\alpha)}{dz^2} \\ = \big(\vartheta_{1,1}''(-\alpha)\varphi_1^2(z)+2\vartheta_{1,2}''(-\alpha)\varphi_1(z)\varphi_2(z)+\vartheta_{2,2}''(-\alpha)\varphi_2^2(z)\big)\dfrac{1}{\sqrt{(z,k,l,m)}^2} \\ +\vartheta_1'(-\alpha)\dfrac{d}{dz}\dfrac{\varphi_1(z)}{\sqrt{(z,k,l,m)}}+\vartheta_2'(-\alpha)\dfrac{d}{dz}\dfrac{\varphi_2(z)}{\sqrt{(z,k,l,m)}}. \end{cases}$$

Dies liefert den Werth für $f(z)$, welcher in (1.) einzuführen ist. Hier bezeichnen $\vartheta''_{1,1}(v)$, etc. die Werthe $\frac{d^2\vartheta(v_1, v_2)}{dv_1^2}$, etc. Bemerkenswerth wird diese Formel, wenn der Punkt β mit dem Punkte α ein gemeinsames z hat, also

$$(\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2) \equiv (0, 0)$$

ist. Hierfür soll auch allein die fertige Formel hingeschrieben werden, zumal bei den analogen Entwicklungen für mehr als vierfach periodische Functionen der dieser Annahme entsprechende Fall zugleich der allgemeinste ist.

Wir betrachten dann den Quotienten $Q = \frac{\vartheta(u+u'-\alpha)}{\vartheta(u+u'+\alpha)}$, und schreiben:

$$(5.)\quad \lg\frac{\vartheta(u+u'-\alpha)}{\vartheta(u+u'+\alpha)} = \int_\zeta^z \frac{f(z,a)\,dz}{\sqrt{(z,k,l,m)}} + \int_{\zeta_1}^{z_1} \frac{f(z,a)\,dz}{\sqrt{(z,k,l,m)}} + \text{Const.}$$

Berücksichtigen wir, dass

$$\vartheta'_1(-\alpha) = -\vartheta'_1(\alpha), \qquad \vartheta_2(-\alpha) = -\vartheta'_2(\alpha),$$
$$\vartheta''_{1,1}(-\alpha) = \vartheta''_{1,1}(\alpha), \qquad \vartheta''_{1,2}(-\alpha) = \vartheta''_{1,2}(\alpha), \qquad \vartheta''_{2,2}(-\alpha) = \vartheta''_{2,2}(\alpha),$$

so entsteht aus (2.), (3.), (4.):

$$(6.)\quad f(z, a) = -\frac{\vartheta''_{1,1}(a)\varphi_1^2(z) + \vartheta''_{1,2}(a)2\varphi_1(z)\varphi_2(z) + \vartheta''_{2,2}(a)\varphi_2^2(z)}{\vartheta'_1(a)\varphi_1(z) + \vartheta'_2(a)\varphi_2(z)}.$$

In der That ist der Nenner von $f(z, a)$ Null für $z = a$; denn da $\vartheta(\alpha) = 0$, so ist auch $\frac{d\vartheta(\alpha)}{da}$ oder

$$\vartheta'_1(\alpha)\,\varphi_1(a) + \vartheta'_2(\alpha)\,\varphi_2(a) = 0.$$

Wir kommen nun zur Bestimmung der additiven Constanten in (5.).

Hierzu machen wir von folgender Eigenschaft der ϑ-Function Gebrauch, die sofort aus ihren bekannten Eigenschaften (Abhandlung §. 17) hervorgeht; sind nämlich m_1, m_2 ganze Zahlen, so ist:

$$\vartheta(v_1 + m_1 a_{1,1} + m_2 a_{1,2},\, v_2 + m_1 a_{2,1} + m_2 a_{2,2})$$
$$= e^{-2(m_1 v_1 + m_2 v_2) - (m_1^2 a_{1,1} + 2mn a_{1,2} + n^2 a_{2,2})}\,\vartheta(v_1, v_2).$$

Sind ζ und ζ_1 zwei Verzweigungswerthe von $\sqrt{(z,k,l,m)}$, und werden z, z_1 gleich ζ und ζ_1 gemacht, so ist:

$$(7.)\quad \begin{cases} u_1 + u'_1 = \tfrac{1}{2}(m'_1\pi i + m_1 a_{1,1} + m_2 a_{1,2}), \\ u_2 + u'_2 = \tfrac{1}{2}(m'_2\pi i + m_1 a_{1,2} + m_2 a_{2,2}), \end{cases}$$

m'_1, m'_2, m_1, m_2 ganzen Zahlen. Daher ist für diese Werthe von z und z_1:

$$\frac{\vartheta(u+u'-\alpha)}{\vartheta(u+u'+\alpha)} = \frac{\vartheta(\alpha-u-u')}{\vartheta(\alpha+u+u')}$$
$$= e^{2(m_1(\alpha_1-u_1-u'_1)+m_2(\alpha_2-u_2-u'_2))+m_1^2 a_{1,1}+2m_1m_2a_{1,2}+m_2^2a_{2,2}}$$

oder mit Benutzung der Werthe für $u+u'$:

$$\lg\frac{\vartheta(u+u'-\alpha)}{\vartheta(u+u'+\alpha)} = 2m_1\alpha_1+2m_2\alpha_2-(m_1m_1'+m_2m_2')\pi i.$$

Die vollständige Formel (5.) lautet daher:

$$(8.)\quad \left\{\begin{aligned}&\lg\frac{\vartheta(u+u'-\alpha)}{\vartheta(u+u'+\alpha)}\\ &=\int_\zeta^z\frac{f(z,a)dz}{\sqrt{(z,k,l,m)}}+\int_{\zeta_1}^{z_1}\frac{f(z,a)dz}{\sqrt{(z,k,l,m)}}+2m_1\alpha_1+2m_2\alpha_2-(m_1m_1'+m_2m_2')\pi i;\end{aligned}\right.$$

hierbei müssen ζ und ζ_1 zwei von einander verschiedene Verzweigungspunkte sein. Sobald nämlich $\zeta=\zeta_1$, ist für $z=\zeta$, $z_1=\zeta$;

$$(u_1+u_1',\, u_2+u_2') \equiv (0,0);$$

haben jetzt im Verzweigungspunkte ζ u_1 und u_2 die Werthe:

$$(9.)\quad \tfrac{1}{2}(\varepsilon_1'\pi i+\varepsilon_1 a_{1,1}+\varepsilon_2 a_{1,2}),\quad \tfrac{1}{2}(\varepsilon_2'\pi i+\varepsilon_1 a_{1,2}+\varepsilon_2 a_{2,2}),$$

so sind $\vartheta(u+u'-\alpha)=\vartheta(u+u'+\alpha)=0$; der Quotient beider Grössen muss nach der Regel behandelt werden für Brüche von der Form $\frac{0}{0}$, und hat jetzt den Werth

$$-e^{4\varepsilon_1\alpha_1+4\varepsilon_2\alpha_2}.$$

Wird $\lg(-1)=\pi i$ gesetzt, so lautet jetzt die vollständige Formel (5.):

$$(10.)\quad \lg\frac{\vartheta(u+u'-\alpha)}{\vartheta(u+u'+\alpha)} = \int_\zeta^z\frac{f(z,a)dz}{\sqrt{(z,k,l,m)}}+\int_\zeta^{z_1}\frac{f(z,a)dz}{\sqrt{(z,k,l,m)}}+4\varepsilon_1\alpha_1+4\varepsilon_2\alpha_2+\pi i.$$

Aus den Formeln (8.) und (10.) kann man die Werthe der ganzen Integrale dritter Gattung entnehmen; als ganze Integrale sollen die von einem Verzweigungspunkte ζ bis zu einem andern erstreckten Integrale bezeichnet werden.

Aus (10.) folgt, wenn $z=z_1=\eta$ gesetzt wird, und η einen von ζ verschiedenen Verzweigungswerth bezeichnet, in welchem u_1, u_2 die Werthe haben:

$$(11.)\quad \tfrac{1}{2}(\eta_1'\pi i+\eta_1 a_{1,1}+\eta_2 a_{1,2}),\quad \tfrac{1}{2}(\eta_2'\pi i+\eta_1 a_{2,1}+\eta_2 a_{2,2}),$$

$$(12.)\quad 2\int_\zeta^\eta\frac{f(z,a)dz}{\sqrt{(z,k,l,m)}} = 4(\eta_1-\varepsilon_1)\alpha_1+4(\eta_2-\varepsilon_2)\alpha_2.$$

In der Nähe von $z=a$ ist

$$\int\frac{f(z,a)dz}{\sqrt{(z,k,l,m)}} = \int\frac{dz}{z-a}.$$

Unser Integral kann daher um ganze Vielfache von $2\pi i$ verschiedene Werthe erlangen; dasselbe gilt für $\lg\frac{\vartheta(u+u'-\alpha)}{\vartheta(u+u'+\alpha)}$, und es können daher auf der rech-

ten Seite von (12.) auch solche Vielfache addirt werden. Durch Division mit 2 würde dann unser ganzes Integral in (12.) möglicher Weise um πi andere Werthe erlangen, und dies darf, wenn das Vorzeichen von $\sqrt{(s,k,l,m)}$ fixirt ist, nicht stattfinden. Die genauere Bestimmung wäre durch die Formel (8.) möglich, indess werden wir später auf anderem Wege kürzer hierzu gelangen.

Ist $z = a$ selbst der Verzweigungswerth ζ, so haben α_1, α_2 die Werthe (9.) und es ist:

$$(13.)\quad \begin{cases} \lg \dfrac{\vartheta(u+u'-\alpha)}{\vartheta(u+u'+\alpha)} \\ = 2\varepsilon_1(u_1+u_1'-\alpha_1)+2\varepsilon_2(u_2+u_2'-\alpha_2)+\varepsilon_1(\varepsilon_1 a_{1,1}+\varepsilon_2 a_{1,2})+\varepsilon_2(\varepsilon_1 a_{2,1}+\varepsilon_2 a_{2,2}) \\ = \pi i+2\varepsilon_1(u_1+u_1')+2\varepsilon_2(u_2+u_2'), \end{cases}$$

von ganzen Vielfachen von $2\pi i$ abgesehen. Daher ist jetzt

$$(14.)\quad f(z,a) = 2\varepsilon_1\varphi_1(z)+2\varepsilon_2\varphi_2(z).$$

Wir haben bis jetzt den Ausdruck

$$\lg \frac{\vartheta(u+u'-a)}{\vartheta(u+u'+a)} = \log \frac{\vartheta(\alpha-u-u')}{\vartheta(\alpha+u+u')}$$

als Function von z und z_1 betrachtet. Derselbe hat, als Function von a angesehen, ganz ähnliche Eigenschaften. Er ist dann ein Integral dritter Gattung, aber nach a integrirt, welches in den vier Punkten logarithmisch unendlich wird, die zu $a = z$, $a = z_1$ in der Fläche T gehören. Dies Integral hat an den Querschnitten (a_1), (a_2) die Periodicitätsmoduln Null (oder ganze Vielfache von $2\pi i$), an (b_1), (b_2) die Periodicitätsmoduln:

$$4(u_1+u_1'),\qquad 4(u_2+u_2').$$

Das Integral kann daher als eine Summe zweier Integrale angesehen werden, von denen das erste nur in $a = z$ logarithmisch unendlich wird, und an den vier Querschnitten (a_1), (a_2), (b_1), (b_2) respective die Periodicitätsmoduln hat:

$$0,\quad 0,\quad 4u_1,\quad 4u_2.$$

Das zweite Integral muss dann in $a = z_1$ logarithmisch unendlich werden, und die Periodicitätsmoduln

$$0,\quad 0,\quad 4u_1',\quad 4u_2'$$

haben. Jedes dieser Integrale hat also genau die Eigenschaften, wie die vorhin entwickelten Integrale, nur a und z, oder respective a und z_1 mit einander vertauscht. Setzen wir (nach (6.)):

$$(15.)\quad f(a,z) = -\frac{\vartheta_{1,1}''(u)\varphi_1^2(a)+2\vartheta_{1,2}''(u)\varphi_1(a)\varphi_2(a)+\vartheta_{2,2}''(u)\varphi_2^2(a)}{\vartheta_1'(u)\varphi_1(a)+\vartheta_2'(u)\varphi_2(a)},$$

so muss sein:

$$\lg \frac{\vartheta(u+u'-\alpha)}{\vartheta(u+u'+\alpha)} = \int^a \frac{f(a,z)\,da}{\sqrt{(a,k,l,m)}} + \int^a \frac{f(a,z_1)\,da}{\sqrt{(a,k,l,m)}} + \text{Const.}$$

Der Werth der Constanten bestimmt sich einfach, wenn wir als Anfang der Integration den Verzweigungswerth ζ nehmen, in welchem α_1, α_2 die Werthe (9.) haben. Dann ist der Werth der linken Seite nach (13.) gleich

$$\pi i + 2\varepsilon_1(u_1+u_1') + 2\varepsilon_2(u_2+u_2');$$

die vollständige Formel ist folglich:

$$(16.)\quad \left\{\begin{aligned} &\lg \frac{\vartheta(u+u'-\alpha)}{\vartheta(u+u'+\alpha)} \\ &= \int_\zeta^a \frac{f(a,z)\,da}{\sqrt{(a,k,l,m)}} + \int_\zeta^a \frac{f(a,z_1)\,da}{\sqrt{(a,k,l,m)}} + 2\varepsilon_1(u_1+u_1') + 2\varepsilon_2(u_2+u_2') + \pi i. \end{aligned}\right.$$

Die Vergleichung dieser Formel mit (8.) oder (10.) giebt die Vertauschung von Parameter und Argument für Integrale dritter Gattung. Man kann aber, und dies ist bemerkenswerth, die Gleichheit von nur zwei Integralen herstellen, statt der Gleichheit von Summen zweier Integrale. Legen wir in (10.) den Punkt z_1 nach ζ, so wird nach (14.):

$$f(a,z_1) = 2\varepsilon_1\varphi_1(a) + 2\varepsilon_2\varphi_2(a)$$

und wir erhalten:

$$\begin{aligned} &\int_\zeta^z \frac{f(z,a)\,dz}{\sqrt{(z,k,l,m)}} + 4\varepsilon_1\alpha_1 + 4\varepsilon_2\alpha_2 \\ &= \int_\zeta^a \frac{f(a,z)\,da}{\sqrt{(a,k,l,m)}} + 2\int_\zeta^a \frac{\varepsilon_1\varphi_1(a)+\varepsilon_2\varphi_2(a)}{\sqrt{(a,k,l,m)}}\,da + 2\varepsilon_1(u_1+u_1') + 2\varepsilon_2(u_2+u_2'). \end{aligned}$$

Rechts fallen die Werthe von u_1', u_2' heraus, da z_1 gleich ζ ist, und es entsteht:

$$(17.)\quad \int_\zeta^z \frac{f(z,a)\,dz}{\sqrt{(z,k,l,m)}} - 2\varepsilon_1 u_1 - 2\varepsilon_2 u_2 = \int_\zeta^a \frac{f(a,z)\,da}{\sqrt{(a,k,l,m)}} - 2\varepsilon_1\alpha_1 - 2\varepsilon_2\alpha_2.$$

Diese Formel liefert jetzt auch die genauen Werthe der ganzen Integrale. Legen wir nämlich z nach dem Verzweigungspunkte η, in welchem u_1, u_2 die Werthe (11.) besitzen, so ist, analog (14.):

$$f(a,z) = 2\eta_1\varphi_1(a) + 2\eta_2\varphi_2(a)$$

und die Ausführung der Formel (17.) ergiebt:

$$(18.)\quad \int_\zeta^\eta \frac{f(z,a)\,dz}{\sqrt{(z,k,l,m)}} = 2(\eta_1-\varepsilon_1)\alpha_1 + 2(\eta_2-\varepsilon_2)\alpha_2 + ((\varepsilon_1\eta_1'+\varepsilon_1'\eta_1)+(\varepsilon_2\eta_2'+\varepsilon_2'\eta_2))\pi i.$$

Wie schon erwähnt, ist:

$$\varepsilon_1\varepsilon_1' + \varepsilon_2\varepsilon_2' \equiv \eta_1\eta_1' + \eta_2\eta_2' \equiv 1, \quad (\text{mod. } 2);$$

die Integrale können nun immer um beliebige ganze Vielfache von $2\pi i$ geändert werden; addiren wir, was daher erlaubt ist, auf der rechten Seite von (18.) den Werth

$$\pi i(\varepsilon_1\varepsilon_1'+\varepsilon_2\varepsilon_2'+\eta_1\eta_1'+\eta_2\eta_2'),$$

so geht (18.) über in:

$$(19.)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_\zeta^\eta \frac{f(z,a)\,dz}{\sqrt{(z,k,l,m)}} \\ = 2(\eta_1-\varepsilon_1)\alpha_1+2(\eta_2-\varepsilon_2)\alpha_2+((\varepsilon_1+\eta_1)(\varepsilon_1'+\eta_1')+(\varepsilon_2+\eta_2)(\varepsilon_2'+\eta_2'))\pi i. \end{cases}$$

Der Factor von πi ist congruent 1 oder 0 nach dem Modul 2, je nachdem

$$\sqrt{\frac{z-\eta}{z-\zeta}}$$

eine gerade oder eine ungerade Charakteristik hat, mit Charakteristik nach *Riemann* den Complex bezeichnet:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1+\eta_1 & \varepsilon_2+\eta_2 \\ \varepsilon_1'+\eta_1' & \varepsilon_2'+\eta_2' \end{pmatrix} = \left(\sqrt{\frac{z-\eta}{z-\zeta}}\right).$$

Aus diesen jetzt entwickelten Formeln kann man die Darstellung der Integrale zweiter Gattung entnehmen. Hiermit, sowie mit den Ausdrücken der Integrale dritter Gattung der allgemeinsten algebraischen Functionen will ich mich ein anderes Mal beschäftigen.

Halle, 1865.

Beitrag zur Theorie der ebenen Rouletten.

(Von Herrn *R. Hennig* zu Gnesen.)

Rollt auf einer ebenen Curve als Basis eine andere ohne zu gleiten, so beschreibt jeder mit der letzteren fest verbundene Punkt eine gewisse Bahn, *Roulette* genannt.

Betrachtet man beide Curven als Grenzen von geradlinigen Polygonen, so ist die Roulette Grenze eines Polygons von lauter Kreisbogen, woraus folgt, — da der Kreisbogen und die Roulette in dem entsprechenden Punkte dieselbe Tangente haben —, dass die Normale einer Roulette in einem bestimmten Punkte derselben stets durch den augenblicklichen Berührungspunkt der Grund- und Rollcurve hindurchgeht.

Ist dieser zugehörende Berührungspunkt, wie hier vorausgesetzt wird, für jeden Punkt der Roulette bekannt, so ist durch ihn die Normale und also auch die Tangente für jeden Punkt der Roulette bestimmt.

Im Folgenden soll zunächst die Bestimmung und einfache geometrische Construction des Krümmungsmittelpunktes — als des Schnittpunktes zweier unendlich nahen Normalen — für einen beliebigen Punkt einer Roulette hergeleitet werden, wenn ausser dem zugehörenden Berührungspunkte noch die Krümmungskreise der Grund- und Rollcurve in demselben gegeben sind.

Die Anwendung dieser Construction auf die einfachen Kreisrouletten wird zu Folgerungen führen, deren Verallgemeinerung den weiteren Inhalt dieser Notiz ausmacht.

I. Construction des Krümmungskreises bei Rouletten.

A. Es werde zunächst der Fall betrachtet, in welchem die Grund- und die Rollcurve *Kreise* mit den Radien R und r sind, und der die Roulette als Bahn beschreibende Punkt P auf dem Umfange des rollenden Kreises liegt, also der Fall der gewöhnlichen Kreisrouletten (Epi- und Hypocycloide).

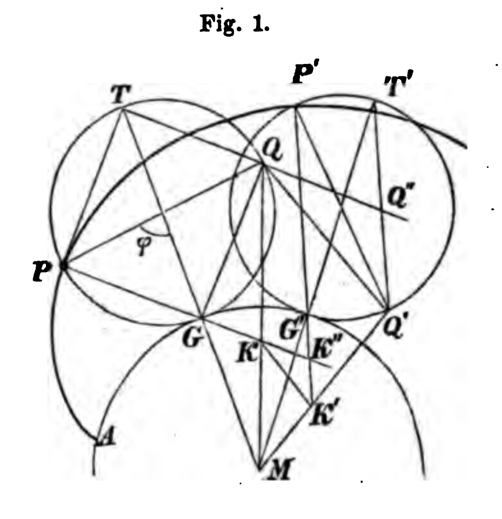
Alle Punkte des rollenden Kreises beschreiben congruente Rouletten, jedoch in anderer Lage; insbesondere beschreibt der dem Punkte P diametral gegenüberliegende Punkt des rollenden Kreises Q, der Gegenpunkt von P, eine Roulette, welche in Bezug auf die Roulette des Punktes P deren Gegenroulette heisst.

Ist G der augenblickliche Berührungspunkt, so ist der Winkel PGQ immer ein Rechter, also die Tangente der Roulette in P parallel der Normale der Gegenroulette in Q und umgekehrt. Die Tangenten beider Curven in P und Q schneiden sich auf dem Rollkreise in T, dem Gegenpunkte von G.

Dann hat man den Satz: (Fig. 1.)

Die Verbindungslinie des Mittelpunktes M des Grundkreises mit dem Gegenpunkt Q von P schneidet die Normale PG im Krümmungsmittelpunkte K für den Punkt P der Roulette.

Fig. 1.



Beweis. Es ist zu zeigen, dass K der Durchschnittspunkt zweier unendlich nahen Normalen der Roulette im Punkte P ist. — P' sei ein Punkt der Roulette in der Nähe von P, Q' sein Gegenpunkt, G' der zugehörende augenblickliche Berührungspunkt, T' der Gegenpunkt von G'. Man ziehe die Normale $P'G'$, welche die erste Normale in K'' schneidet und selbst von MQ' in K' geschnitten wird; ferner ziehe man KK', QQ' und die Tangenten TQ und $T'Q'$, welche sich in Q'' schneiden. Die beiden Dreiecke $QQ''Q'$ und $KK''K'$ sind einander ähnlich, weil ihre Seiten beziehlich parallel sind. Es ist nämlich $PGKK''$ parallel TQQ'', $P'G'K''K'$ parallel $T'Q''Q'$ und, weil $MK:MQ = MG:MT = R:R \pm 2r = MG':MT' = MK':MQ'$, auch KK' parallel QQ'. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $QQ''Q'$ und $KK''K'$ und ihrem constanten Verhältnisse folgt, dass sie gleichzeitig unendlich klein werden, also ist K die Grenzlage von K'', wenn der Punkt P' sich dem Punkte P und somit Q' und Q'' sich dem Punkte Q als Grenze nähern. Also ist K Mittelpunkt des Krümmungskreises der Roulette für den Punkt P *).

Aus dieser Herleitung ergeben sich auf einfache Weise folgende bekannte Beziehungen.

---

*) Auf andere als die obige Weise hergeleitet geben diese Construction: *von Gerstner* Handbuch der Mechanik. Wien 1834. Band 3. S. 42 und 43. *Zehme*, Elementare und analytische Behandlung der verschiedenen Cycloiden. Iserlohn und Elberlfed 1854.

1. Die Evolute einer Kreisroulette ist eine der Gegenroulette ähnliche und mit dem Mittelpunkt des Grundkreises als äusserem Aehnlichkeitspunkt ähnlich liegende Curve, der Grösse nach sich zu dieser verhaltend wie $R:R\pm 2r$, wo das obere Zeichen für die Epicykloide, das untere für die Hypocykloide gilt.

2. Der Krümmungsradius ϱ hat die Länge

$$\varrho = PK = PG + GK = TQ + GK = 2GK\left(1 \pm \frac{r}{R}\right).$$

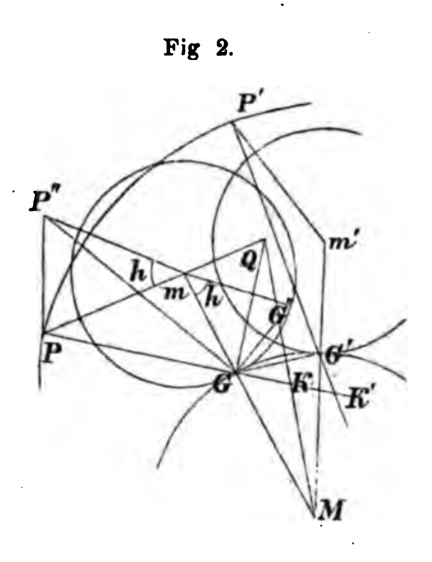
3. Da der Krümmungsradius gleich ist der Länge der Evolute vom Punkt K bis zu ihrem Scheitel A, und diese Evolute wieder eine Kreisroulette ist, so ist in dem Obigen zugleich die Rectification der Kreisrouletten enthalten; und zwar verhält sich der Bogen der Evolute von K bis A zu der Strecke GK wie $2\left(1 \pm \frac{r}{R}\right)$ zu 1. Die Strecke GK (PT) hängt bloss von dem Radius des rollenden Kreises der Roulette und der Grösse des Wälzungswinkels ab. Daher ist die (algebraische) Summe zweier solcher entsprechenden Bogen, eines Epicycloidenbogens und eines Hypocycloidenbogens, welche von demselben Kreise beschrieben werden, der auf den beiden Seiten eines anderen rollt, und demselben Werthe des Wälzungswinkels entsprechen, gleich $4GK$ und unabhängig von dem Radius des Grundkreises. Lässt man den Kreis sich beiderseits zur Hälfte abrollen, so wird GK gleich dem Durchmesser des Rollkreises der Roulette, also wird die Summe beider Bogen achtmal so gross als dieser Radius. Lässt man den Kreis sich einmal abrollen, so beträgt die Summe beider Bogen das Sechszehnfache des Radius des Rollkreises.

Das Verhältniss $\frac{r}{R}$ kann ganz beliebig sein, auch seinen Werth während des Rollens ändern, ohne dass sich die Summe der Längen beider Rouletten ändert; d. h. die Basis kann irgend ein Kreis sein, aus Kreisbogen bestehen, die stetig in einander übergehen, oder irgend ein beliebige Curve sein, deren Tangente ihre Richtung stetig ändert; man hat den Satz:

Rollen zwei Kreise mit dem Radius r beiderseits auf irgend einer Basis von der Länge $2r\pi$, so beschreiben die Punkte, in welchen dieselben anfänglich die Basis berühren, eine aus zwei Rouletten zusammengesetzte geschlossene Bahn von der Länge des Sechszehnfachen des Radius des rollenden Kreises.

Der Inhalt der von dieser Curve umspannten Fläche ist ebenfalls von der Gestalt der Grundcurve unabhängig und gleich der sechsfachen Fläche des rollenden Kreises, was sich aus *Steiners* Arbeit „Ueber den Krümmungsschwerpunkt ebener Curven", dieses Journal, Band 21, ergiebt.

B. Liegt der die Roulette beschreibende Punkt nicht auf dem Umfange des Rollkreises, so führt eine der obigen ähnliche Construction zur Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes.



Man ziehe (Fig. 2) im Punkte P der Roulette die Normale PG und errichte in G auf PG eine Senkrechte, welche die Gerade Pm in Q trifft, dann schneidet die Gerade QM die Normale PG im Krümmungsmittelpunkte K.

Es sei P' ein dem Punkte P benachbarter Punkt; $P'G'$ sei die Normale im Punkte P' und G'' sei der Punkt des Rollkreises, welcher mit dem Punkte G' des Grundkreises zur Berührung gelangt. Construirt man $P''mG$ congruent $P'm'G'$, so ist Winkel PmP'' gleich Winkel $G''mG$ gleich dem Zuwachs h des Wälzungswinkels und dem entsprechend ist Winkel GMG' gleich $\frac{Gm}{MG}h$. Die beiden Normalen PG und $P'G'$ schneiden sich im Punkte K'.

Es ist die Grenzlage zu bestimmen, der sich K' nähert, wenn P' sich dem Punkte P ohne Grenze nähert. Zu diesem Zweck kann man $PK'P'$ als Kreissector betrachten, dann ist die Grenze von PK' gleich der Grenze des Quotienten aus PP' und dem zum Centriwinkel $PK'P'$ und dem Radius Eins gehörenden Kreisbogen.

Fasst man den Grund- und den Rollkreis als Grenzen geradliniger Polygone auf, so ergiebt sich die Länge des Bogenelementes PP' der Roulette als Länge eines Kreisbogens, dessen Radius gleich PG und dessen Centriwinkel gleich ist der Summe oder Differenz der Aussenwinkel der Polygone. Die Tangenten in den Punkten G und G'' machen einen Winkel gleich h, die Tangenten in G und G' einen solchen gleich $\frac{Gm}{MG}h$. Das Rollpolygon erfährt also eine Drehung um den Winkel $h\left(\frac{MG+Gm}{MG}\right)$ gleich $\frac{Mm}{MG}$ um eine Ecke, deren Abstand von G für kleine Werthe von h von der Ordnung der Grösse h ist. Es ist also bis auf Grössen zweiter Ordnung in Bezug auf h der Bogen PP' gleich

$$GP\frac{Mm}{GM}h.$$

Der Winkel $PK'P'$, der im Nenner des Ausdruckes für PK' steht, ist gleich

Winkel $G'MG$ plus Winkel $P''GP$; der erstere ist gleich $h\frac{Gm}{GM}$; die Grösse des zweiten ergiebt sich aus den Dreiecken GPP'' und PmP'' als gleich

$$2\sin\frac{h}{2}\,\frac{Pm}{P''G}\sin P''PG$$

oder bis auf Grössen von der Ordnung h^2 gleich

$$h\frac{Pm}{PG}\cos mPG \text{ gleich } h\frac{Pm}{PQ}.$$

Setzt man diese Werthe ein, so erhält man: für immer kleiner werdende Werthe von h nähert sich PK' dem Grenzwerthe

$$PK = \frac{GP.Mm.PQ}{Gm.PQ+GM.Pm}.$$

Dieses ist aber genau der Werth von PK, der zufolge der obigen Construction erhalten wird.

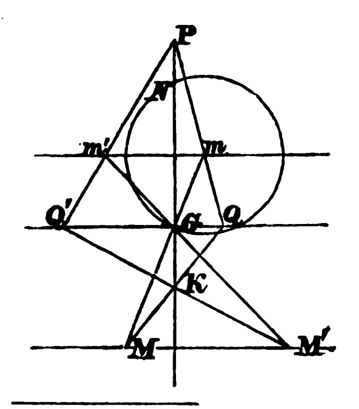
Betrachtet man nämlich MQ als Transversale des Dreiecks PGm, so ist

$$PK.GM.mQ = GK.mM.PQ,$$
$$GK = PK-PG,$$
$$PK(GM.mQ-mM.PQ) = -PG.mM.PQ,$$
$$PK(Gm.PQ+GM.Pm) = PG.mM.PQ.$$

Hiermit ist die Richtigkeit der oben gegebenen Construction dargethan, welche bisher noch nicht bekannt gewesen zu sein scheint *).

Man kann also eine unendliche Anzahl von Kreispaaren construiren, für welche als Grund- und Rollcurven die Rouletten im Punkte P die Normale und den Krümmungsradius gemein haben; es ist dazu bloss nöthig, dass für jedes Paar sich nach obiger Construction derselbe Punkt K ergebe. Es werde hier die Schaar aller Wälzungskreise betrachtet, welche die Normale in denselben zwei Punkten schneiden und denselben augenblicklichen Berührungspunkt haben. Der geometrische Ort der Mittelpunkte m (Fig. 3) ist die Normale auf PG durch m, der Ort der Punkte Q ist die Gerade GQ, die entsprechenden Punktreihen m' und Q' sind durch den Punkt P projectivisch ähnlich. Zieht man $m'G$ und $Q'K$, welche sich in M' schneiden, so ist der Ort von M' der Durchschnitt der beiden projectivischen Strahlenbüschel $(G)m'$ und $(K)Q'$, deren zwei ent-


Fig. 3.



*) *Liouville*, tome X, pag. 150. *Salmon*, Higher plane curves p. 216.

sprechende Strahlen GP und KG zusammenfallen; dieser Ort ist demnach eine Gerade senkrecht auf PG. Insbesondere ist in dem Durchschnittspunkte dieser Geraden mit PG der Mittelpunkt des Grundkreises construirt, auf welchem ein Kreis mit dem Durchmesser NG rollen muss, damit der Punkt P eine Curve mit dem Krümmungsradius PK beschreibe.

Umgekehrt ergiebt sich hieraus die Construction des Krümmungsmittelpunktes für den Fall, für welchen die obige Construction den Dienst versagt: Wenn die Punkte P, m und M in gerader Linie liegen, ziehe man durch m, G und M Senkrechte auf PG, ziehe beliebig $Pm'Q'$ und $m'GM'$, so schneidet $M'Q'$ die Normale PG im Krümmungsmittelpunkte K.

Statt der drei Parallelen durch m, G, M kann man sich auch bei dieser Construction dreier Geraden bedienen, die durch jene Punkte gehen und sich in demselben Punkte ausserhalb PG schneiden, wovon man sich überzeugt, wenn man von einem Punkte des Raumes aus die vorige Construction auf eine durch die Gerade PG gehende Ebene projicirt.

Da die Ellipse auch zu diesen Kreisrouletten (B.) gehört, so ist hiermit eine neue Construction des Krümmungsradius der Ellipse gegeben.

C. Für die allgemeinen Rouletten erhält man den Krümmungsradius für einen beliebigen Punkt, indem man an Stelle der Grundcurve und der Rollcurve deren Krümmungskreise im augenblicklichen Berührungspunkte substituirt und die für den vorigen Fall angegebene Construction anwendet.

II. Umfang und Inhalt von zweiseitigen Rouletten.

Rollen zwei symmetrische ebene Curven als Rollcurven auf verschiedenen Seiten einer anderen Curve als Grundcurve, welche sich auf dieser stets in entsprechenden Punkten berühren, so mögen die beiden Rouletten, welche von einem mit der einen Rollcurve festgedachten und seinem symmetrischen mit der anderen festgedachten beschrieben werden, in ihrer Vereinigung eine zweiseitige Roulette oder Doppelroulette heissen.

Ein specieller Fall bot sich oben dar, wo beide Curven Kreise waren und der beschreibende Punkt auf dem Umfange des rollenden lag; es wurde auch der Satz bewiesen, dass bei *beliebiger Basis* der Umfang einer solchen durch einmaliges Abwälzen erzeugten Kreisdoppelroulette gleich dem Sechszehnfachen des Radius des beschreibenden Kreises sei.

Es soll nun gezeigt werden, *dass der Umfang und der Inhalt einer Doppelroulette unabhängig ist von der Gestalt der Grundcurve.*

Je zwei entsprechende Punkte der Doppelroulette liegen symmetrisch gegen die Tangente der Grundcurve im augenblicklichen Berührungspunkt; die Verbindungslinien jener Punkte mit diesem sind Normalen der Doppelroulette; also ist diese die Enveloppe einer Schaar von Kreisen, die ihre Mittelpunkte auf der Grundcurve haben, deren Radien nur von der Rollcurve abhangen und gleich sind dem Abstande des beschreibenden Punktes von dem augenblicklich zur Berührung gelangten Punkte. Es erhellt dies, wenn man die Grund- und Rollcurve als Grenzen geradliniger Polygone ansieht.

Vermöge dieser Eigenschaft kann man zu jeder Curve, deren Normalen sämmtlich eine andere Curve schneiden, eine entsprechende Curve construiren, so dass beide in Bezug auf jene als Grundcurve einer Doppelroulette angehören: Ziehe im Punkte P der Curve die Normale, welche in G die Grundcurve schneidet, construire in G die Tangente der Grundcurve, fälle auf dieselbe von P ein Loth und verlängere dasselbe um die eigene Länge bis P', so ist der Punkt P' der dem Punkte P entsprechende Punkt der Doppelroulette.

Lässt man die eine Curve zu einem Punkte P ausarten, so wird die Construction folgende: Fälle von P aus auf alle Tangenten der Grundcurve Lothe und verlängere dieselben um ihre eigene Länge. Man erhält also eine der *Fusspunktencurve* des Punktes P ähnliche und ähnlich liegende Curve, doppelt so gross als jene, welche mit dem Punkte P als Doppelroulette aufgefasst werden kann. Die Rollcurve ist symmetrisch der Grundcurve, der beschreibende Punkt der symmetrische des Punktes P. Mit dieser Eigenschaft der Fusspunktencurven ist zugleich die Construction der Tangente und des Krümmungsradius für dieselben gegeben.

Umgekehrt kann man, wenn eine Curve und in ihrer Ebene ein Punkt gegeben sind, nach der Curve fragen, in Bezug auf welche die gegebene eine Fusspunktencurve ist; diese Curve ist die Enveloppe der zweiten Schenkel aller rechten Winkel, deren Scheitel auf der gegebenen Curve liegen und deren andere Schenkel durch den gegebenen Punkt gehen.

Hiermit kann man die Aufgabe lösen: Welche Curve muss auf einer ihr symmetrischen rollen, damit ein mit ihrer Ebene festgedachter Punkt eine gegebene Curve beschreibe?

Nur für einen Kegelschnitt und einen Brennpunkt desselben als Pol ist die Fusspunktencurve ein *Kreis*, also nur durch das Rollen zweier congruenter Kegelschnitte aufeinander, welche sich in entsprechenden Punkten berühren, kann auf diese Weise ein Kreis beschrieben werden, und zwar sind

die Brennpunkte des rollenden Kegelschnitts die Punkte, deren Rouletten Kreise sind.

Fragt man nach der Basis, auf der eine Curve rollen muss, um beiderseits Kreise als Rouletten zu erzeugen, so ist diese auch ein Kegelschnitt und zwar ist der vorige Fall in diesem enthalten.

Der oben ausgesprochene Satz über die Unabhängigkeit des Umfangs und Inhalts von Doppelrouletten von der Gestalt der Grundcurve wird zuerst für Polygone bewiesen und daraus für Curven geschlossen. Die entsprechenden Seiten der beiden Polygone dürfen der Einfachheit wegen als beziehlich gleich angenommen werden.

Ist nun an einer Ecke der Aussenwinkel des rollenden Polygons durch seinen Bogen gemessen τ, der Aussenwinkel des Grundpolygons an der entsprechenden Ecke σ, der Abstand des bahnbeschreibenden Punktes r, so beschreibt dieser Punkt, wenn sich das Polygon ausserhalb um die Ecke dreht, einen Kreisbogen von der Länge $r(\tau+\sigma)$, beim Drehen innerhalb einen Bogen von der Länge $r(\tau-\sigma)$, also ist die *algebraische* Summe beider Bogenelemente gleich $2r\tau$, also unabhängig von der Grundcurve.

In gleicher Weise wird die Constanz des Flächeninhalts geschlossen. Der Flächenraum besteht bei zwei Polygonen aus zweierlei Theilen, die einen sind Dreiecke, die anderen Kreissectoren; die Summe der Dreiecke macht den Inhalt des rollenden Polygons; je zwei zusammengehörende Kreissectoren haben die Inhalte $r^2(\tau+\sigma)$ und $r^2(\tau-\sigma)$; ihre *algebraische* Summe ist also gleich $2r^2\tau$ und demnach unabhängig von der Grundcurve. Die Hälfte der Summe der zweiten Theile lässt sich für sich zusammenhangend darstellen, indem man den Kreissector $r^2\tau$ auf den Aussenwinkel τ abträgt. Geht dann das Polygon in eine Curve über, so erhält man die Construction: Man trage auf die Tangente der Curve nach einer bestimmten Seite hin die Länge des Abstandes des Punktes der Curve vom beschreibenden Punkte ab, so ist der Flächenraum, welcher von der so bestimmten Tangente überstrichen wird, plus dem Sector, begrenzt von dem betreffenden Bogen der Rollcurve und den Radien nach seinen Endpunkten, gleich der Hälfte des Inhalts der von dem Punkte beschriebenen Doppelroulette, während sich der bewusste Bogen auf irgend einer Curve abwälzt. Es ist hierbei angenommen, dass der Flächenraum der Doppelroulette am Anfange und Ende durch die Normalen begrenzt sei.

Zu bemerken ist, dass nur in dem Falle Umfang und Inhalt in dem gewöhnlichen Sinne genommen werden kann, wenn für alle entsprechenden

Punkte der Grund- und der Rollcurve die Krümmung der Rollcurve grösser ist als die der Grundcurve, weil sonst sowohl Umfang als Inhalt der inneren Roulette negativ zu nehmen sind. Die Constanz des Flächeninhalts der Doppelrouletten lässt sich übrigens unmittelbar aus der bereits erwähnten Arbeit *Steiners* „Ueber den Krümmungsschwerpunkt ebener Curven" herleiten, wo allgemein und principiell die Bestimmung des Flächeninhalts der einzelnen Rouletten ausgeführt ist.

Mit Hülfe des bewiesenen Satzes gelingt in einigen Fällen die Rectification von Curven und die Quadratur von Flächenräumen.

Rollt eine Ellipse mit der grossen Axe $2a$ auf einer geraden Linie, so beschreibt jeder der Brennpunkte eine wellenförmige Bahn und zwar ist die Länge einer Welle gleich $2a\pi$, der Inhalt der von dem Bogen, der Geraden und den zwei End-Normalen eingeschlossenen Fläche $2a^2\pi$.

Beweis. Man lasse die Ellipse auf einer ihr congruenten rollen, so dass sich beide in entsprechenden Punkten berühren, so besteht die Doppelroulette, welche jeder Brennpunkt beschreibt, aus einem Kreise mit dem Umfange $4a\pi$ und dem Inhalt $4a^2\pi$ und einem Punkte; daraus folgt die Richtigkeit der obigen Angaben, weil bei der geraden Linie als Grundcurve die beiderseitigen Rouletten symmetrisch sind. Ebenso ist die Rectification eines bestimmten Stückes der Curve auf die Rectification eines Kreisbogens zurückführbar.

Es möge noch der Fall näher betrachtet werden, in welchem die Rollcurve zwar auch wie in dem oben betrachteten Falle ein Kreis ist, aber der beschreibende Punkt nicht auf dem Umfange liegt, sondern sich im Abstande k vom Mittelpunkte befindet.

Für zwei Polygone mit beziehlich gleichen Seiten, deren entsprechende Aussenwinkel τ und σ ein constantes Verhältniss $R:r$ haben, verhält sich jeder beim Rollen ausserhalb beschriebene Kreisbogen zu dem entsprechenden beim Rollen innerhalb beschriebenen wie $\tau+\sigma$ zu $\tau-\sigma$, also das ganze äussere Kreisbogenpolygon zu dem inneren wie $R+r$ zu $R-r$. Dies bleibt gültig für den Fall zweier *Kreise* mit den Radien r und R, weil bei gleichen Bogen die Tangentenwinkel sich stets umgekehrt verhalten wie die Radien. Es verhält sich also bei denselben Grenzen der Wälzungswinkel der Epicykloidenbogen zum Hypocykloidenbogen wie $R+r$ zu $R-r$.

Mit Hülfe dieses Satzes kann man die Rectification *aller Doppelrouletten*, bei denen die Rollcurve ein Kreis ist, auf die Rectification von Ellipsenbogen

zurückführen. Wählt man nämlich $R=2r$, so ist die betreffende Hypocykloide eine Ellipse mit den Halbaxen $r+k$ und $r-k$; der zugehörende Epicykloidenbogen ist $\frac{2+1}{2-1}=3$ mal so gross als der entsprechende Ellipsenbogen. Also ist die Summe zweier entsprechenden Bogen einer Doppelroulette, beschrieben von einem Kreise als Rollcurve, viermal so gross als der entsprechende von demselben Punkte beim Rollen des Kreises innerhalb eines zweimal so grossen beschriebene Ellipsenbogen.

Gnesen, im Juli 1864.

Ueber die Anziehungscomponente eines geraden elliptischen Cylinders in der Richtung der Axe, wenn die Elementaranziehung irgend einer Potenz der Entfernung umgekehrt proportional ist.

(Von Herrn *F. Grube* zu Hamburg.)

Das Potential von Körperschalen, die von zwei ähnlichen Flächen zweiten Grades irgend welcher Art begrenzt werden, hat Herr *Mehler* (Bd. 60, p. 321 dieses Journals) nach der etwas modificirten *Dirichlet*schen Methode des discontinuirlichen Factors für den allgemeinen Fall bestimmt, dass die Elementaranziehung der p^{ten} Potenz der Entfernung umgekehrt proportional ist. Die sich ergebenden Formeln gelten zunächst nur für ein zwischen 2 und 4 enthaltenes p; jedoch durch Voraussetzung eines etwas allgemeineren Anziehungsgesetzes leitet Herr *Mehler* aus den Formeln für ein gegebenes p die entsprechenden für ein um zwei Einheiten grösseres her. Nun hat die in der Richtung der Axe genommene Componente eines geraden elliptischen Cylinders (welche ich kurz die X-Componente nennen werde) ursprünglich fast ganz dieselbe Form wie das Potential der von zwei ähnlichen Flächen zweiten Grades begrenzten Körper. Für das letztere hat man nämlich bei dem allgemeineren von Herrn *Mehler* eingeführten Anziehungsgesetze, nach welchem das Potential der Elementaranziehung

$$\frac{1}{p-1}\,\frac{dm}{(r^2+\omega)^{\frac{1}{2}(p-1)}} \quad \text{statt} \quad \frac{1}{p-1}\,\frac{dm}{r^{p-1}}$$

ist, folgenden Ausdruck

$$\frac{1}{p-1}\iiint\frac{dx\,dy\,dz}{(r^2+\omega)^{\frac{1}{2}(p-1)}},$$

wo

$$r^2 = (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2,$$

und wo die Integrationen sich auf alle Werthe der Veränderlichen erstrecken, die der Ungleichheit

$$h < \frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\beta}+\frac{z^2}{\gamma}+2\lambda x+2\mu y+2\nu z < k$$

genügen; für die X-Componente der Attraction des geraden elliptischen Cylinders erhält man (ohne Voraussetzung des allgemeineren Anziehungsgesetzes)

die Differenz zweier dem vorstehenden ganz analogen Ausdrücke von der Form

$$\frac{1}{p-1}\iint\frac{dy\,dz}{(r^2+k)^{\frac{1}{2}(p-1)}},$$

wo

$$r^2 = (y-b)^2+(z-c)^2,$$

und wo die Integrationen sich auf alle Werthe von y, z erstrecken, die der Ungleichheit

$$0<\frac{y^2}{\alpha^2}+\frac{z^2}{\beta^2}<1$$

genügen. Die von Herrn *Mehler* eingeführte Grösse ω bietet sich also hier von selbst in der Grösse k dar. Es lag daher nahe auch auf den vermöge der *Dirichlet*schen Methode ermittelten Ausdruck für die X-Componente des Cylinders, der zunächst für ein zwischen 1 und 3 liegendes p gilt, die *Mehler*sche Methode anzuwenden, um daraus die Formeln für ein beliebiges p herzuleiten. Da die Resultate theils wegen ihrer Einfachheit, theils wegen ihres allgemeinen Charakters ein Interesse haben dürften, so erlaube ich mir, ihre Entwicklung im Folgenden auszuführen. — Ich werde wiederholten Gebrauch von der Bezeichnungsart des Herrn *Sarrus* machen, wonach das Zeichen

$$\Big|^{x_1} f(x)$$

dasjenige bedeutet, was man erhält, wenn man in $f(x)$ für x den Werth x_1 einsetzt, und das Zeichen

$$\Big|_{x_1}^{x_2} f(x)$$

dasjenige, was man erhält, wenn man in $f(x)$ einmal x_2, dann x_1 setzt, und die beiden Resultate von einander subtrahirt.

§. 1.

Bestimmung der X-Componente der Attraction des geraden elliptischen Cylinders für $p = 1$ excl. bis $p = 3$ incl.

Die Halbaxen der elliptischen Basis des Cylinders seien α, β, die Entfernungen des angezogenen Punktes von der unteren und oberen Basis a und a_1, die Coordinaten desselben bezogen auf die Axen der Basis b und c. Die X-Componente werde, wenn die Elementaranziehung umgekehrt proportional der p^{ten} Potenz der Entfernung ist, durch X_p bezeichnet. Man hat zunächst

$$(1.)\quad X_p = \Big|_{a^2}^{a_1^2}\frac{1}{p-1}\iint\frac{dy\,dz}{(r^2+k)^{\frac{1}{2}(p-1)}};$$

wo das Substitutionszeichen sich auf den Buchstaben k bezieht, wo

$$r^2 = (y-b)^2+(z-c)^2,$$

und wo die Grenzen der Integration durch die Ungleichheit

$$\frac{y^2}{\alpha^2}+\frac{z^2}{\beta^2}<1$$

bestimmt sind.

Wendet man auf diese Formel die *Dirichlet*sche Methode des discontinuirlichen Factors an, und verfolgt genau den von *Dirichlet* zur Bestimmung des Potentials des Ellipsoides eingeschlagenen Weg, so erhält man

$$(2.)\quad X_p = \Big|_{\alpha^2}^{\alpha_1^2} \frac{\pi\alpha\beta}{2\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5-p}{2}\right)}\int_\sigma^\infty \frac{s^{-\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}}\left(1-\frac{k}{s}-\frac{b^2}{\alpha^2+s}-\frac{c^2}{\beta^2+s}\right)^{\frac{1}{2}(3-p)}ds}{\sqrt{(\alpha^2+s)(\beta^2+s)}},$$

wo σ die positive Wurzel der cubischen Gleichung

$$(\text{I.})\quad 1-\frac{k}{s}-\frac{b^2}{\alpha^2+s}-\frac{c^2}{\beta^2+s} = 0$$

bedeutet.

Diese Formel gilt ihrer Herleitung gemäss von $p=1$ excl. bis $p=3$ excl. Um nun X_p nach der *Mehler*schen Methode für jedes p zu erhalten, müssen wir zuerst die Gültigkeit dieser Formel für $p=3$ incl. nachweisen.

Ich zeige 1) dass der durch Gleichung (1.) definirte Ausdruck X_p, 2) dass der auf der rechten Seite von (2.) stehende Ausdruck in der Nähe von $p=3$ stetige Functionen von p sind. Ist beides erwiesen, so gilt die Formel (2.), da sie für $p=3-\delta$ gilt, wo δ beliebig klein sein kann, auch für $p=3$.

1) Ist $f(x,p)$ eine stetige Function von p, und hat die Differenz $a-b$ einen endlichen Werth, so ist auch $\int_b^a f(x,p)dx$ eine stetige Function von p. Wendet man diesen bekannten Satz zweimal auf das Doppelintegral für X_p in (1.) an, so ergiebt sich die Richtigkeit der Behauptung, dass X_p eine stetige Function von p ist.

2) Der vor dem Integral in (2.) stehende Factor $\dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5-p}{2}\right)}$ ist für $p=3$ eine stetige Function. Um zu zeigen, dass das Integral selbst eine stetige Function von p in der Nähe von $p=3$ ist, setze ich einmal für p den Werth 3 und zweitens den Werth $3-\delta$, und zeige, dass die Dif-

ferenz der resultirenden Integrale gleichzeitig mit δ gegen Null abnimmt. Es ist also zu zeigen, dass das Integral

$$J = \int_\sigma^\infty \frac{ds(1-F(s)^\delta)}{s^2\sqrt{\left(1+\frac{\alpha^2}{s}\right)\left(1+\frac{\beta^2}{s}\right)}},$$

in welchem

$$F(s) = s-k-\frac{b^2 s}{\alpha^2+s}-\frac{c^2 s}{\beta^2+s}$$

gesetzt ist, für gegen Null abnehmende Werthe von δ verschwindet. Während s von σ bis ∞ wächst, nimmt $F(s)$ die Werthe von 0 bis ∞ an. Setzen wir $F(s) = s_1$, so wird

$$J = \int_0^\infty \frac{ds_1(1-s_1^\delta)}{s^2\varphi(s)},$$

wo

$$\varphi(s) = \left(1-\frac{k}{s}-\frac{b^2}{\alpha^2+s}-\frac{c^2}{\beta^2+s}+\frac{k}{s}+\frac{b^2 s}{(\alpha^2+s)^2}+\frac{c^2 s}{(\beta^2+s)^2}\right)\sqrt{\left(1+\frac{\alpha^2}{s}\right)\left(1+\frac{\beta^2}{s}\right)}.$$

Der Ausdruck der Function $\varphi(s)$ zeigt mit Hülfe von (I.), dass dieselbe in dem Intervalle $s_1 = 0$ bis $s_1 = \infty$ oder $s = \sigma$ bis $s = \infty$ stets positiv bleibt und überall auch an den Grenzen endlich ist. Demnach ändert der Factor $\frac{1}{s^2\varphi(s)}$ unter dem Integralzeichen von J innerhalb der Integrationsgrenzen sein Zeichen nicht, und es ist daher

$$J = R.\int_0^\infty \frac{ds_1}{s^2\varphi(s)},$$

wo R ein zwischen dem innerhalb der Integrationsgrenzen stattfindenden Maximum und Minimum von $1-s_1^\delta$ liegender Werth ist. Das Maximum von $1-s_1^\delta$ findet statt für den kleinsten Werth von s_1, also an der unteren Grenze, das Minimum an der oberen Grenze. Da nun das Nullwerden von s_1, ebenso wie das Unendlichwerden von s_1 unabhängig ist von dem Verschwinden von δ, und also s_1^δ für $\delta = 0$ auch an den Grenzen den Werth 1 behält, so sieht man, dass für $\delta = 0$ das Maximum und das Minimum verschwinden. Demnach hat also R und auch J den Werth Null, und die linke Seite von (2.) ist daher stetig bis $p = 3$ inclusive.

§. 2.

Bestimmung von X_p für ein beliebiges p.

Aus (1.) ergiebt sich die auch für $p = 1$ gültige Relation

$$(3.)\quad X_{p+2} = -\frac{2}{p+1}\frac{dX_p}{dk}$$

und allgemein

$$(4.)\quad X_{p+2n} = (-1)^n \frac{2}{p+1}\,\frac{2}{p+3}\cdots\frac{2}{p+2n-1}\,\frac{d^n X_p}{dk^n}.$$

Mit Hülfe dieser Relation und der Formel (2.) können wir X_p für jeden Werth von p ermitteln. Wollten wir aber den Ausdruck für X_p in (2.) nach k unter dem Integralzeichen differentiiren, so würde die Function unter dem Integralzeichen für $s=\sigma$ nach der Differentiation unendlich werden. Wir führen deshalb nach der *Mehler*schen Methode in (2.) statt s eine neue Variable σ ein vermöge der Gleichung

$$\sigma = s\Big(1-\frac{b^2}{\alpha^2+s}-\frac{c^2}{\beta^2+s}\Big).$$

Verfolgen wir nun genau den von Herrn *Mehler* eingeschlagenen Weg, so finden wir

$$(5.)\quad X_{p+2n} = \Big|_{a^2}^{\alpha_1^2} \frac{(-1)^n\pi}{2\Gamma\big(\frac{p+2n+1}{2}\big)\Gamma\big(\frac{5-p}{2}\big)} \int_k^\infty d\sigma\,(\sigma-k)^{\frac{1}{2}(3-p)}\frac{d^n}{d\sigma^n}\Big(\frac{1}{s\sqrt{(\alpha^2+s)(\beta^2+s)}}\,\frac{ds}{d\sigma}\Big),$$

$$(6.)\quad X_{3+2n} = \Big|_{a^2}^{\alpha_1^2} \frac{(-1)^{n-1}\pi\alpha\beta}{2(n+1)!}\,\frac{d^{n-1}}{d\sigma^{n-1}}\Big[\frac{\{(\sigma+\alpha^2)(\sigma+\beta^2)\}^{n-\frac{1}{2}}}{\sigma\{(\sigma-\sigma_1)(\sigma-\sigma_2)\}^n}\Big],$$

wo σ_1 und σ_2 die beiden negativen Wurzeln der cubischen Gleichung (I.) bezeichnen.

X_1 ergiebt sich folgendermassen. Es ist

$$-X_3 = \frac{dX_1}{dk}.$$

Setzt man in (2.) $p=1$, und differentiirt den resultirenden Werth nach k, so erhält man den aus (2.) für $p=3$ resultirenden Werth mit dem entgegengesetzten Zeichen, also nach §. 1 $-X_3$. Der für $p=1$ aus (2.) resultirende Werth stellt also wirklich X_1 dar. Aus den Formeln (2.), (5.), (6.) erkennt man folgende Sätze:

Ist die Elementaranziehung umgekehrt proportional irgend einer geraden Potenz der Entfernung, so ist die X-Componente eines geraden elliptischen Cylinders immer ausdrückbar durch ganze elliptische Integrale. Ist die Elementaranziehung umgekehrt proportional der ersten oder dritten Potenz der Entfernung, so ist die X-Componente aus logarithmischen Functionen zusammengesetzt. Ist endlich die Elementaranziehung umgekehrt proportional irgend einer ungeraden Potenz der Entfernung, grösser als die dritte, so ist die X-Componente aus rein algebraischen Functionen zusammengesetzt.

§. 3.

Independente Darstellung von X_{2n+2}.

Für X_2 lässt sich noch ein anderer Ausdruck aufstellen als der, welcher aus (2.) resultirt. Dieser zweite Ausdruck erscheint grade für unsern Zweck sehr geeignet, indem sich aus ihm sehr leicht eine independente Darstellung für X_{2n+2} durch ganze elliptische Integrale gewinnen lässt. Es ist nämlich *)

$$X_2 = \Big|_{\alpha^2}^{\alpha_1^2}\left[-2\pi\varepsilon\sqrt{k}+\int_0^{2\pi}\sqrt{k+\Phi}\,\Phi'\,d\varphi\right],$$

wo

$$\Phi = (\alpha\cos\varphi-b)^2+(\beta\sin\varphi-c)^2,$$

$$\Phi' = \frac{\alpha\beta-b\beta\cos\varphi-c\alpha\sin\varphi}{\Phi}.$$

Die Grösse ε hat den Werth 1 oder 0, jenachdem der angezogene Punkt innerhalb des Mantels und dessen Verlängerung oder ausserhalb liegt. Hieraus erhält man

$$X_{2n+2} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\Big|_{\alpha^2}^{\alpha_1^2}\left[2\pi\varepsilon k^{-\frac{1}{2}(2n-1)}-\int_0^{2\pi}\frac{\Phi'\,d\varphi}{(k+\Phi)^{n-1}\sqrt{k+\Phi}}\right].$$

Für den Kreiscylinder lässt sich die Wurzel leicht in die canonische Form bringen. Führt man nämlich statt φ eine neue Variable ein vermöge der Gleichung

$$\cos\varphi = 2\sin\varphi_1^2-1$$

und setzt

$$\lambda^2=\frac{4\alpha b}{k+(\alpha+b)^2},\qquad \lambda_1^2=\frac{4\alpha b}{(\alpha+b)^2},\qquad \lambda_2^2=\frac{2b}{\alpha+b},$$

so wird für den Kreiscylinder

$$(7.)\quad \begin{cases} X_{2n+2} = \dfrac{2}{(2n-1)(2n+1)}\Big|_{\alpha^2}^{\alpha_1^2}\Big[\varepsilon\pi k^{-\frac{1}{2}(2n-1)}-\dfrac{2\alpha}{\alpha+b}(k+(\alpha+b)^2)^{-\frac{1}{2}(2n-1)}\times \\ \qquad\qquad \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{(1-\lambda_2^2\sin\varphi^2)\,d\varphi}{(1-\lambda_1^2\sin\varphi^2)(1-\lambda^2\sin\varphi^2)^{n-1}\sqrt{1-\lambda^2\sin\varphi^2}}\Big]. \end{cases}$$

Auf dem Mantel **) des kreisförmigen Cylinders wird

$$(8.)\quad \begin{cases} X_{2n+2} = \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\Big|_{\alpha^2}^{\alpha_1^2}\Big[\pi k^{-\frac{1}{2}(2n-1)}-2(k+4\alpha^2)^{-\frac{1}{2}(2n-1)}\times \\ \qquad\qquad \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{(1-\lambda^2\sin\varphi^2)^{n-1}\sqrt{1-\lambda^2\sin\varphi^2}}\Big] \end{cases}$$

---

*) *Schloemilchs* Zeitschrift für Math. u. Physik, 9. Jahrgang, S. 278.

**) Unter Mantel und Axe verstehe ich hier und im Folgenden auch die Verlängerung des Mantels und der Axe.

und auf der Axe

$$(9.)\qquad X_{2n+2} = \frac{2\pi}{(2n-1)(2n+1)}\Big|_{a^2}^{a_1^2}\left[k^{-\frac{1}{2}(2n-1)}-(k+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}(2n-1)}\right].$$

Ich bemerke noch, dass für den elliptischen Cylinder Herr *Clebsch* die Wurzel in die canonische Form gebracht hat, in einer Bemerkung zu der Abhandlung des Herrn *Röthig* „Das Potential eines rechtwinkligen homogenen Cylinders" (dieses Journal Bd. 61). Herr *Röthig* findet noch einen dritten wesentlich verschiedenen Ausdruck für X_2, der aber dieselbe Wurzelgrösse enthält.

§. 4.
Specielle Fälle.

Setzt man in (2.) $p=1$, so erhält man den aus logarithmischen und algebraischen Functionen gebildeten Ausdruck

$$X_1 = \frac{\pi\alpha\beta}{2}\Big|_{a^2}^{a_1^2}\Bigg[\frac{2}{\alpha^2-\beta^2}\,\frac{b^2(\sigma+\beta^2)-c^2(\sigma+\alpha^2)}{\varDelta}$$
$$+\frac{k}{\alpha\beta}\log\frac{\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}+\alpha\beta}{\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}+\frac{\alpha\beta}{\sigma}(\alpha\beta+\varDelta)}-\log\Big(\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}+\sigma+\varDelta\Big)\Bigg],$$

wo

$$\varDelta = \sqrt{(\alpha^2+\sigma)(\beta^2+\sigma)}.$$

Für den kreisförmigen Cylinder erhält man aus (2.), wenn man $c=0$ setzt,

$$(10.)\qquad X_1 = \frac{\pi\alpha^2}{2}\Big|_{a^2}^{a_1^2}\Big[\frac{k}{\alpha^2}\log\frac{\sigma}{\sigma+\alpha^2}-\log(\sigma+\alpha^2)-\frac{b^2}{\sigma+\alpha^2}\Big].$$

Für $p=3$ erhält man aus (2.) für X_3 den logarithmischen Ausdruck

$$X_3 = \frac{\pi}{2}\Big|_{a^2}^{a_1^2}\log\Big(1+\frac{2\alpha\beta}{(\alpha^2+\beta^2)\sigma}(\alpha\beta+\varDelta)\Big),$$

und hieraus für den kreisförmigen Cylinder

$$(11.)\qquad X_3 = \frac{\pi}{2}\Big|_{a^2}^{a_1^2}\log\Big(1+\frac{\alpha^2}{\sigma}\Big).$$

Hieraus bekommen wir X_5 mit Anwendung von (3.); einfacher aber ergiebt sich X_5 aus (6.), nämlich

$$X_5 = \frac{\pi\alpha\beta}{4}\Big|_{a^2}^{a_1^2}\frac{\varDelta}{\sigma(\sigma-\sigma_1)(\sigma-\sigma_2)},$$

und für den kreisförmigen Cylinder

$$X_5 = \frac{\pi\alpha^2}{4}\Big|_{\alpha^2}^{\alpha_1^2} \frac{1}{\sigma(\sigma-\sigma_1)}.$$

Führt man hierin für σ und σ_1 ihre Werthe ein, so erhält man für den kreisförmigen Cylinder

$$(12.)\quad X_5 = \frac{\pi}{8}\Big|_{\alpha^2}^{\alpha_1^2}\Big[\frac{1}{k} - \frac{1}{\sqrt{k^2+2(a^2+b^2)k+(a^2-b^2)^2}} + \frac{a^2-b^2}{k\sqrt{k^2+2(a^2+b^2)k+(a^2-b^2)^2}}\Big].$$

Für das Naturgesetz ($p = 2$) ergiebt sich aus (2.)

$$X_2 = 2\alpha\beta\Big|_{\alpha^2}^{\alpha_1^2}\int_\sigma^\infty \frac{\left(1-\frac{k}{s}-\frac{b^2}{\alpha^2+s}-\frac{c^2}{\beta^2+s}\right)ds}{\sqrt{s(s+\alpha^2)(s+\beta^2)-k(s+\alpha^2)(s+\beta^2)-b^2s(s+\beta^2)-c^2s(s+\alpha^2)}}.$$

Es ist leicht, die hierin enthaltenen elliptischen Integrale auf die Normalform zu bringen, was ich in *Schloemilchs* Zeitschrift a. a. O. ausgeführt habe. Für den kreisförmigen Cylinder nimmt der vorstehende Ausdruck keine wesentlich einfachere Gestalt an. Weit einfachere Ausdrücke erhält man aus (7.) für X_2 und X_4. Bezeichnet man die ganzen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}},\quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}\,d\varphi,$$

wie üblich, durch K und E, und führt man die *Jacobi*sche Transcendente Z ein, so erhält man für den kreisförmigen Cylinder

$$X_2 = \Big|_{\alpha^2}^{\alpha_1^2}\Big[-2\pi\sqrt{k}+\frac{2(a^2-b^2)K}{\sqrt{k+(a+b)^2}}+2\sqrt{k+(a+b)^2}\,E+\frac{\pi\sqrt{k}}{K'}g+2\sqrt{k}KZ(g,\lambda')\Big],$$

$$X_4 = \tfrac{2}{3}\Big|_{\alpha^2}^{\alpha_1^2}\Big[\frac{\pi}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\pi g}{2K'}-\frac{1}{\sqrt{k}}KZ(g,\lambda')-\frac{K}{\sqrt{k+(a+b)^2}}\Big],$$

worin der Modulus $\lambda^2 = \frac{4ab}{k+(a+b)^2}$ und

$$\sin\mathrm{am}(g,\lambda') = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+(a-b)^2}}.$$

Aus den vorstehenden Formeln oder aus (8.) erhält man die für den Mantel gültigen Formeln

$$X_2 = \Big|_{\alpha^2}^{\alpha_1^2}\big[-\pi\sqrt{k}+2\sqrt{k+4a^2}\,E\big]$$

$$X_4 = \tfrac{1}{3}\Big|_{\alpha^2}^{\alpha_1^2}\Big[\frac{\pi}{\sqrt{k}}-\frac{2K}{\sqrt{k+4a^2}}\Big]\qquad \lambda^2 = \frac{4a^2}{k+4a^2}.$$

§. 5.

Independente Darstellung von X_{5+2n} auf der Axe und auf dem Mantel eines kreisförmigen Cylinders.

Bezeichnet man die Entfernungen des angezogenen Punktes von den Rändern durch ϱ_1 und ϱ, so wird auf der Axe eines kreisförmigen Cylinders nach (10.) und (11.)

$$X_1 = \pi \log \frac{a_1^{a_1^2} \varrho^{\varrho^2}}{a^{a^2} \varrho_1^{\varrho_1^2}},$$

$$X_3 = -\pi \log \frac{a_1 \varrho}{a \varrho_1}.$$

Aus (12.) folgt

$$X_5 = \frac{\pi}{4} \Big|_{a^2}^{a_1^2} \Big[\frac{1}{k} - \frac{1}{a^2+k}\Big],$$

und daraus vermittelst (4.)

$$(9'.) \qquad X_{5+2n} = \frac{\pi}{2(n+1)(n+2)} \Big[\frac{1}{a_1^{2n+2}} - \frac{1}{\varrho_1^{2n+2}} - \Big(\frac{1}{a^{2n+2}} - \frac{1}{\varrho^{2n+2}}\Big)\Big].$$

Vermöge der Formeln (9.) und (9'.) hat man das einfache Resultat, dass sowohl für grade als ungrade m (mit Ausnahme der beiden Werthe 1 und 3)

$$X_m = \frac{2\pi}{(m-1)(m-3)} \Big[\frac{1}{a_1^{m-3}} + \frac{1}{\varrho^{m-3}} - \Big(\frac{1}{a^{m-3}} + \frac{1}{\varrho_1^{m-3}}\Big)\Big].$$

Ist also die Elementaranziehung umgekehrt proportional irgend einer ganzen Potenz der Entfernung (mit Ausnahme der ersten und dritten), so zieht ein kreisförmiger Cylinder jeden Punkt seiner Axe an mit einer Intensität, die proportional ist der Differenz aus den Summen der um drei kleineren Potenzen der beiden reciproken Entfernungen des Punktes vom Centrum der einen und vom Rande der anderen Basis.

Auf dem Mantel des kreisförmigen Cylinders wird

$$X_1 = \frac{\pi}{2} \Big|_{a^2}^{a_1^2} \Big[k \log \frac{\sqrt{k^2+4k\alpha^2}-k}{2\alpha^2} - \alpha^2 \log(2\alpha^2+k+\sqrt{k^2+4k\alpha^2}) + \frac{\sqrt{k^2+4k\alpha^2}-k}{2}\Big],$$

$$X_3 = \frac{\pi}{2} \log \frac{a(a_1+r_1)}{a_1(a+r)},$$

wo r_1 und r die grössten Entfernungen des angezogenen Punktes von den beiden Rändern bezeichnen.

Aus (12.) erhält man ferner für den Mantel

$$X_5 = \frac{\pi}{8} \Big|_{a^2}^{a_1^2} \Big[\frac{1}{k} - \frac{1}{\sqrt{k^2+4\alpha^2 k}}\Big],$$

und daraus vermöge (4.)

$$X_{5+2n} = \frac{\pi}{4(n+1)(n+2)}\Big[\frac{1}{a_1^{2n+2}}-\frac{1}{a^{2n+2}}$$

$$-\frac{1}{n!}\sum_{p=0}^{p\overline{\overline{<}}\frac{1}{2}n}\frac{\{n(n-1)\dots(p+1)\}^2}{(n-2p)!}\alpha^{4p}\Big\{\frac{(a_1^2+2\alpha^2)^{n-2p}}{(a_1r_1)^{2n+1}}-\frac{(a^2+2\alpha^2)^{n-2p}}{(ar)^{2n+1}}\Big\}\Big],$$

wo $(n-2p)!$ für $p=\frac{1}{2}n$ der Einheit gleich zu setzen ist. Ueber die hier angewandte Entwicklung von $\frac{d^n(c+x^2)^{-\frac{1}{2}}}{dx^n}$ vergleiche man *Sohnckes* „Sammlung von Aufgaben aus der Differential- und Integralrechnung", Seite 39.

§. 6.

Grenzfälle.

Schliesslich wollen wir noch untersuchen, was auf der Axe und dem Mantel eines kreisförmigen Cylinders aus X_p wird, erstens wenn die Höhe h wächst, zweitens wenn der Radius wächst, drittens wenn der angezogene Punkt sich der Basis nähert. Ich werde diese drei Grenzausdrücke von X_p respective durch $\text{Lim}_h X_p$, $\text{Lim}_a X_p$ und $\text{lim}_\alpha X_p$ bezeichnen. Es ergeben sich für dieselben folgende Formeln, die ich der leichteren Uebersicht wegen zuzusammenstelle.

Auf der Axe.

$$\text{Lim}_h X_1 = -\pi\alpha^2\log h,$$

$$\text{Lim}_h X_3 = -\pi\log\frac{\varrho}{a},$$

$$\text{Lim}_h X_m = -\frac{2\pi}{(m-1)(m-3)}\Big(\frac{1}{a^{m-3}}-\frac{1}{\varrho^{m-3}}\Big),$$

$$\text{Lim}_a X_1 = -\pi(a_1^2-a^2)\log a,$$

$$\text{Lim}_a X_3 = -\pi\log\frac{a_1}{a},$$

$$\text{Lim}_a X_m = -\frac{2\pi}{(m-1)(m-3)}\Big(\frac{1}{a^{m-3}}-\frac{1}{a_1^{m-3}}\Big),$$

$$\text{lim}_\alpha X_1 = \pi(h^2\log h+a^2\log a-\varrho_1^2\log\varrho_1),$$

$$\text{lim}_\alpha X_2 = -2\pi(h+a-\varrho_1),$$

$$\text{Lim}_h\text{lim}_\alpha X_2 = -2\pi a,$$

$$\text{lim}_\alpha X_3 = \pi\log a,$$

$$\text{lim}_\alpha X_m = -\frac{2\pi}{(m-1)(m-3)}\frac{1}{a^{m-3}}.$$

Auf dem Mantel.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Lim}_h X_1 &= -\pi \alpha^2 \log h,\\
\mathrm{Lim}_h X_3 &= -\frac{\pi}{2}\log\frac{a+r}{2a},\\
\mathrm{Lim}_h X_m &= -\Big|^{a^2} V\Big(\text{während } X_m = \Big|_{a^2}^{a_1^2} V\Big),\\[1ex]
\mathrm{Lim}_a X_1 &= \frac{\pi}{2}(a_1^2-a^2)\log \alpha,\\
\mathrm{Lim}_a X_3 &= -\frac{\pi}{2}\log\frac{a_1}{a},\\
\mathrm{Lim}_a X_m &= -\frac{\pi}{(m-1)(m-3)}\Big(\frac{1}{a^{m-3}}-\frac{1}{a_1^{m-3}}\Big),\\[1ex]
\mathrm{lim}_a X_1 &= \frac{\pi}{2}\Big(h^2\log\frac{h(r_1-h)}{2a^2}-\alpha^2\log\frac{2a^2+h^2+hr_1}{2a^2}+\frac{h(r_1-h)}{2}\Big)\\
\mathrm{lim}_a X_2 &= -h\pi-4\alpha+2r_1 E\Big(\text{mod. } \lambda=\frac{2\alpha}{r_1}\Big),\\
\mathrm{Lim}_h \mathrm{lim}_a X_2 &= -4\alpha,\\
\mathrm{lim}_a X_3 &= \frac{\pi}{2}\log a,\\
\mathrm{lim}_a X_m &= -\frac{\pi}{(m-1)(m-3)}\frac{1}{a^{m-3}},
\end{aligned}
$$

Aus den vorstehenden Formeln erkennt man Folgendes:

Während die Höhe oder der Radius wächst, wächst auch X_1, sowohl auf der Axe als auf dem Mantel, und zwar wie der Logarithmus der Höhe oder des Radius; hingegen wenn $p > 1$, nähert sich X_p einer bestimmten endlichen Grenze. Mit wachsender Höhe nähert sich X_1 auf der Axe und auf dem Mantel, sowie überall derselben Grenze.

Bei wachsendem Radius wird X_p für jedes p auf dem Mantel halb so gross als auf der Axe.

Wenn der angezogene Punkt sich der Basis nähert, so nähern sich X_1 und X_2 bestimmten endlichen Grenzen, während für $p \gtreqless 3$ X_p wächst, und zwar für $p = 3$ proportional dem Logarithmus, für $p > 3$ proportional der um drei Einheiten kleineren Potenz der reciproken Entfernung des Punktes von der Oberfläche.

Auf dem Mantel, in der Nähe des Randes, ist (bei endlichem Radius und endlicher Höhe) die X-Componente halb so gross, als in allen anderen Punkten in der Nähe der Basis, wenn $p \gtreqless 3$.

Wenn die Anziehung nach dem Naturgesetz erfolgt, sind noch folgende Sätze bemerkenswerth:

Bei wachsendem Radius wird die X-Componente für alle äusseren auf der Axe und auf dem Mantel liegenden Punkte constant, und der Höhe des Cylinders proportional.

Ein Punkt erleidet dieselbe Anziehung auf der Oberfläche einer Kugel und am Ende der Axe eines unendlich hohen Cylinders, dessen Radius $\frac{2}{3}$ *vom Radius der Kugel beträgt.*

Die X-Componente ist auf dem Rande eines unendlich hohen Cylinders rational ausdrückbar.

Die X-Componenten auf dem Rande und am Ende der Axe eines unendlich hohen Cylinders verhalten sich zu einander wie der Radius eines Kreises zum Quadranten.

Hamburg, im December 1864.

Ueber die aus Einheitswurzeln gebildeten complexen Zahlen von periodischem Verhalten, insbesondere die Bestimmung der Klassenanzahl derselben.

(Von Herrn *L. Fuchs*.)

Der Theorie der aus den Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen hat *Kummer* gewisse Perioden zu Grunde gelegt, auf welche sich namentlich die Definition der idealen Primfactoren stützt (s. dieses Journal Bd. 35 und Abhandlungen der Berl. Acad. 1856). Diese Perioden habe ich für den Fall, dass der Grad der Einheitswurzel durch eine zusammengesetzte Zahl angegeben wird, in einer früheren Arbeit (dieses Journal Bd. 61) einer näheren Untersuchung unterworfen. Das Folgende bezieht sich auf eine Art complexer Zahlen, welche mit diesen Perioden im engsten Zusammenhange stehen. Es sei nämlich ω eine primitive n^{te} Wurzel der Einheit, und x eine Zahl, die mit n keinen gemeinschaftlichen Theiler hat, so bilden im Falle, dass n eine einfache Primzahl ist, die aus den mit x gebildeten Perioden entstehenden complexen Zahlen die allgemeinste Form der complexen Zahlen $f(\omega)$, welchen die Eigenschaft $f(\omega^x) = f(\omega)$ zukommt. Anders verhält es sich im Allgemeinen im Falle, dass n keine einfache Primzahl ist. Hier sind die aus den Perioden gebildeten complexen Zahlen nur besondere Formen der allgemeineren Art complexer Zahlen, welche nur durch die Eigenschaft $f(\omega^x) = f(\omega)$ definirt sind. Mit diesen complexen Zahlen will ich mich im Folgenden beschäftigen, und namentlich die Anzahl der Klassen der idealen Zahlen derselben bestimmen. Die Klassenanzahl der einfachen complexen Zahlen, welche *Kummer* (Monatsberichte der Acad. Januar 1863) schon angegeben hat, entspricht übrigens dem besonderen Falle, wo $x = 1$ ist.

1.

Es sei ω eine primitive Wurzel der Gleichung $x^n = 1$, wo n eine beliebige ganze Zahl ist, ferner x eine Zahl, die mit n keinen gemeinschaftlichen Theiler hat, so ist der Ausdruck

$$\pi_r = \omega^r + \omega^{rx} + \omega^{rx^2} + \cdots$$

soweit fortgesetzt, bis das erste Glied wiederkehrt, die Periode, welche *Kummer*

der Theorie der aus der Wurzel ω gebildeten complexen Zahlen zu Grunde gelegt hat (vergl. die Abh. gelesen in der Academie der Wiss. 18. Decbr. 1856). — Ist r zu n prim und gehört x (mod n) zum Exponenten τ, so enthält π_r genau τ Glieder. — Die Periode π_r ist die einfachste der complexen Zahlen $f(\omega)$, welche so beschaffen sind, dass $f(\omega^x) = f(\omega)$. Wir werden daher alle complexen Zahlen der letzteren Art, mit Rücksicht auf diese Eigenschaft, als complexe Zahlen in π bezeichnen.

Es sei nun $\varphi(\omega)$ ein idealer Primfactor der nicht in n enthaltenen realen Primzahl q in der Theorie der complexen Zahlen in ω, und x die niedrigste Potenz von x, die congruent einer Potenz von q (mod n), so ist das Product der conjugirten Factoren:

$$\psi(\omega) = \varphi(\omega)\varphi(\omega^x)\varphi(\omega^{x^2})\dots\varphi(\omega^{x^{\gamma-1}})$$

als idealer Primfactor von q in der Theorie der complexen Zahlen in π anzusehen.

Es sei ferner p eine $a$mal in n enthaltene Primzahl; setzt man $\frac{n}{p^a} = n'$ und bezeichnet mit ω' eine primitive Wurzel der Gleichung $x^{n'} = 1$, mit $\chi(\omega')$ einen idealen Primfactor von p in der Theorie der complexen Zahlen in ω, und ist endlich x^s die niedrigste Potenz von x, die congruent einer Potenz von p (mod n'), so ist

$$\eta(\omega') = \chi(\omega')\chi(\omega'^x)\chi(\omega'^{x^2})\dots\chi(\omega'^{x^{s-1}})$$

als idealer Primfactor von p in der Theorie der complexen Zahlen in π anzusehen.

Sind überhaupt x und q zwei Zahlen, die mit n keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, so ist die Entscheidung über die niedrigste Potenz der einen, die einer Potenz der anderen (mod n) congruent ist, für das Folgende wesentlich nothwendig, so dass ich erst auf diese Frage näher eingehen muss.

2.

Zunächst ergiebt sich folgender Satz:

Es sei x^f die niedrigste Potenz von x, die einer Potenz von q (mod n) *congruent ist, q^g die niedrigste Potenz von q, die einer Potenz von x congruent ist, und gehören x und q* (mod n) *respective zu den Exponenten τ und t, so ist $\frac{\tau}{f} = \frac{t}{g}$.*

Denn erstlich ist ersichtlich, dass f und g Theiler respective von τ und t sein müssen. Es sei daher $mg = t$ und $q^g \equiv x^\alpha$ mod n, so ist $m\alpha \equiv 0$

$\bmod \tau$, und es ist m als die kleinste der Zahlen, wofür die letztere Congruenz erfüllt ist, ein Theiler von τ, und $\frac{\tau}{m}$ der grösste gemeinschaftliche Theiler von α und τ. Da ferner f ein gemeinschaftlicher Theiler von τ und α ist, so ist $\frac{\tau}{m} = Af$ oder $\frac{\tau g}{t} = Af$, wo A eine ganze Zahl. Aus demselben Grunde ist $\frac{tf}{\tau} = Bg$, wo B eine ganze Zahl. Multiplicirt man beide Gleichungen mit einander, so erhält man $AB = 1$, d. h. $A = B = 1$: daher $\frac{t}{g} = \frac{\tau}{f}$, wie behauptet wurde.

Ferner beweist man ohne Mühe den Satz:

Ist n eine Primzahlpotenz, und dividirt man t durch den grössten gemeinschaftlichen Theiler von t und τ, und bezeichnet den Quotienten mit t', so ist $q^{t'}$ die niedrigste Potenz von q, die congruent ist einer Potenz von x $(\bmod n)$.

Schwieriger ist die genauere Bestimmung der niedrigsten Potenz q^g in dem allgemeinen Falle, dass n eine zusammengesetzte Zahl ist. Wir gelangen dahin auf dem folgenden Wege. Ich beschränke mich hierbei auf den Fall, dass n eine ungerade Zahl ist, weil in dem anderen Falle, wo n gerade ist, nur einige Modificationen erforderlich sind. Ferner wird das Gesetz in seiner Allgemeinheit schon an dem Falle, dass n nur drei verschiedene Primzahlpotenzen enthält, sichtbar.

Es sei daher $n = p^{\pi} p_1^{\pi_1} p_2^{\pi_2}$, wo p, p_1, p_2 verschiedene ungerade Primzahlen sind; es gehöre x respective $\bmod p^{\pi}$, $p_1^{\pi_1}$, $p_2^{\pi_2}$ zu den Exponenten δ, δ_1, δ_2, ebenso q zu den Exponenten d, d_1, d_2. Es seien ferner, indem ich mich des Zeichens $(k, l, \ldots s)$ für das kleinste Vielfache der Zahlen $k, l, \ldots s$ bediene, c, c_1, c_2 resp. die grössten gemeinschaftlichen Theiler von δ und (δ_1, δ_2), δ_1 und (δ, δ_2), δ_2 und (δ, δ_1), und man setze $\frac{\delta}{c} = \delta'$, $\frac{\delta_1}{c_1} = \delta'_1$, $\frac{\delta_2}{c_2} = \delta'_2$. Bezeichnet man alsdann mit v, v_1, v_2 respective die grössten gemeinschaftlichen Theiler von d und δ', d_1 und δ'_1, d_2 und δ'_2, und die auf p^{π}, $p_1^{\pi_1}$, $p_2^{\pi_2}$ bezüglichen Indices respective mit Ind, Ind_1, Ind_2, so dass

$$\text{Ind}\, q = rb, \qquad \text{Ind}_1 q = r_1 b_1, \qquad \text{Ind}_2 q = r_2 b_2,$$
$$\text{Ind}\, x = \varrho\beta, \qquad \text{Ind}_1 x = \varrho_1 \beta_1, \qquad \text{Ind}_2 x = \varrho_2 \beta_2,$$

wo b und β, b_1 und β_1, b_2 und β_2 die grössten gemeinschaftlichen Theiler der Indices von q und x respective mit $\varphi(p^{\pi})$, $\varphi(p_1^{\pi_1})$, $\varphi(p_2^{\pi_2})$ sind, so findet das folgende System von Congruenzen statt:

$$(1.)\begin{cases} \frac{d}{v}\operatorname{Ind} q \equiv \eta\frac{\delta'}{v} c \operatorname{Ind} x \mod \varphi(p^a), & \text{wo } \eta\varrho \equiv r \mod \delta, \\ \frac{d_1}{v_1}\operatorname{Ind}_1 q \equiv \eta_1\frac{\delta'_1}{v_1} c_1 \operatorname{Ind}_1 x \mod \varphi(p_1^{a_1}), & \text{wo } \eta_1\varrho_1 \equiv r_1 \mod \delta_1, \\ \frac{d_2}{v_2}\operatorname{Ind}_2 q \equiv \eta_2\frac{\delta'_2}{v_2} c_2 \operatorname{Ind}_2 x \mod \varphi(p_2^{a_2}), & \text{wo } \eta_2\varrho_2 \equiv r_2 \mod \delta_2. \end{cases}$$

Bezeichnet man mit i, i_1, i_2 die grössten gemeinschaftlichen Theiler von $\frac{d}{v}$, $\frac{d_1}{v_1}$, $\frac{d_2}{v_2}$ respective mit $\left(\frac{d_1}{v_1}, \frac{d_2}{v_2}\right)$, $\left(\frac{d}{v}, \frac{d_2}{v_2}\right)$, $\left(\frac{d}{v}, \frac{d_1}{v_1}\right)$, so erhält man aus den Congruenzen (1.) die folgenden:

$$(2.)\begin{cases} \left(\frac{d}{v}, \frac{d_1}{v_1}, \frac{d_2}{v_2}\right)\operatorname{Ind} q \equiv \eta\frac{\delta'}{v}\frac{\left(\frac{d_1}{v_1}, \frac{d_2}{v_2}\right)}{i} c \operatorname{Ind} x \mod \varphi(p^a), \\ \left(\frac{d}{v}, \frac{d_1}{v_1}, \frac{d_2}{v_2}\right)\operatorname{Ind}_1 q \equiv \eta_1\frac{\delta'_1}{v_1}\frac{\left(\frac{d}{v}, \frac{d_2}{v_2}\right)}{i_1} c_1 \operatorname{Ind}_1 x \mod \varphi(p_1^{a_1}), \\ \left(\frac{d}{v}, \frac{d_1}{v_1}, \frac{d_2}{v_2}\right)\operatorname{Ind}_2 q \equiv \eta_2\frac{\delta_2}{v_2}\frac{\left(\frac{d}{v}, \frac{d_1}{v_1}\right)}{i_2} c_2 \operatorname{Ind}_2 x \mod \varphi(p_2^{a_2}). \end{cases}$$

Hat man aber eine Zahl z so zu bestimmen, dass

$$z \equiv a \mod m, \quad z \equiv b \mod m_1, \quad z \equiv c \mod m_2,$$

wo a, b, c, m, m_1, m_2 beliebige Zahlen bedeuten, und sind λ, μ, ν respective die grössten gemeinschaftlichen Theiler von m und m_1, m und m_2, m_1 und m_2, so ist bekanntlich erforderlich, dass

$$a-b \equiv 0 \mod \lambda, \quad a-c \equiv 0 \mod \mu, \quad b-c \equiv 0 \mod \nu.$$

Diese Bedingungen sind aber auch zur Existenz der gesuchten Zahl z genügend. Denn zunächst kann man eine Zahl x finden derart, dass $x \equiv a \mod m$, und $x \equiv b \mod m_1$. Man bestimme nun eine Zahl z durch die Congruenzen $z \equiv x \mod (m, m_1)$, $z \equiv c \mod m_2$, so ist zu deren Existenz nothwendig und hinreichend, dass $x - c \equiv 0 \mod \varphi$, wenn φ der grösste gemeinschaftliche Theiler von (m, m_1) und m_2 ist. Diese Bedingung ist aber offenbar erfüllt und die zuletzt gefundene Zahl z die gesuchte.

Da δ', δ_1, δ'_2 Zahlen sind, wovon nicht zwei einen gemeinschaftlichen Theiler haben, und daher die grössten gemeinschaftlichen Theiler je zweier der Grössen δ mit denen der entsprechenden Grössen c zusammenfallen, so kann man daher eine Zahl s finden, derart dass

$$(3.)\quad \begin{cases} s \equiv \eta \dfrac{\delta'}{v} \dfrac{\left(\frac{d_1}{v_1}, \frac{d_2}{v_2}\right)}{i} c & \bmod \delta, \\[2ex] s \equiv \eta_1 \dfrac{\delta_1}{v_1} \dfrac{\left(\frac{d}{v}, \frac{d_2}{v_2}\right)}{i_1} c_1 & \bmod \delta_1, \\[2ex] s \equiv \eta_2 \dfrac{\delta'_2}{v_2} \dfrac{\left(\frac{d}{v}, \frac{d_1}{v_1}\right)}{i_2} c_2 & \bmod \delta_2. \end{cases}$$

Hieraus geht mit Rücksicht auf die Congruenzen (2.) hervor, dass $\left(\frac{d}{v}, \frac{d_1}{v_1}, \frac{d_2}{v_2}\right)$ ein Multiplum des kleinsten Exponenten g ist, für den q^g congruent einer Potenz von x (mod n).

Haben $\frac{d}{v}$, $\frac{d_1}{v_1}$, $\frac{d_2}{v_2}$ respective mit c, c_1, c_2 die grössten gemeinschaftlichen Theiler χ, χ_1, χ_2, so sind $v\chi$, $v_1\chi_1$, $v_2\chi_2$ respective die grössten gemeinschaftlichen Theiler von d und δ, d_1 und δ_1, d_2 und δ_2; es sind daher nach dem zweiten der am Anfange dieser Nummer gegebenen Sätze $\frac{d}{v\chi}$, $\frac{d_1}{v_1\chi_1}$, $\frac{d_2}{v_2\chi_2}$ respective die kleinsten Exponenten, für die eine Potenz von q congruent einer Potenz von x respective mod p^n, $p_1^{n_1}$, $p_2^{n_2}$. Es bleiben daher die Congruenzen (1.) nach ihren bezüglichen Moduln richtig, wenn man beide Seiten derselben respective durch χ, χ_1, χ_2 dividirt. Hieraus ergiebt sich, dass man die Congruenzen (2.) respective durch $\frac{\chi\left(\frac{d_1}{v_1}, \frac{d_2}{v_2}\right)}{i}$, $\frac{\chi_1\left(\frac{d}{v}, \frac{d_2}{v_2}\right)}{i_1}$, $\frac{\chi_2\left(\frac{d}{v}, \frac{d_1}{v_1}\right)}{i_2}$ dividiren darf, ohne die Moduln zu dividiren. Offenbar ist aber der gesuchte Exponent g ein Vielfaches von $\left(\frac{d}{v\chi}, \frac{d_1}{v_1\chi_1}, \frac{d_2}{v_2\chi_2}\right)$, daher ist die Zahl, durch welche $\left(\frac{d}{v}, \frac{d_1}{v_1}, \frac{d_2}{v_2}\right)$ zu dividiren ist, um g zu geben, ein gemeinschaftlicher Theiler von $\frac{\chi\left(\frac{d_1}{v_1}, \frac{d_2}{v_2}\right)}{i}$, $\frac{\chi_1\left(\frac{d}{v}, \frac{d_2}{v_2}\right)}{i_1}$, $\frac{\chi_2\left(\frac{d}{v}, \frac{d_1}{v_1}\right)}{i_2}$. Da man aber durch den grössten gemeinschaftlichen Theiler dieser drei Zahlen jede der Congruenzen (2.), unbeschadet ihrer Richtigkeit nach ihren bezüglichen Moduln, dividiren darf, so folgt,

dass $g = \dfrac{\left(\frac{d}{v}, \frac{d_1}{v_1}, \frac{d_2}{v_2}\right)}{\psi}$, *wenn* ψ *der grösste Factor des eben erwähnten grössten gemeinschaftlichen Theilers ist, für den noch eine Zahl* s' *ermittelt werden*

kann, die den folgenden Bedingungen genügt:

$$(4.)\quad \begin{cases} s' \equiv \eta \dfrac{\delta'}{v} \dfrac{\left(\frac{d_1}{v_1}, \frac{d_2}{v_2}\right) c}{i\psi} & \bmod \delta, \\[2ex] s' \equiv \eta_1 \dfrac{\delta_1}{v_1} \dfrac{\left(\frac{d}{v}, \frac{d_2}{v_2}\right) c_1}{i_1 \psi} & \bmod \delta_1, \\[2ex] s' \equiv \eta_2 \dfrac{\delta_2'}{v_2} \dfrac{\left(\frac{d}{v}, \frac{d_1}{v_1}\right) c_2}{i_2 \psi} & \bmod \delta_2. \end{cases}$$

Ich behaupte jetzt, dass ψ mit $\frac{d}{vi}$, $\frac{d_1}{v_1 i_1}$, $\frac{d_2}{v_2 i_2}$ keinen gemeinschaftlichen Theiler hat. Denn gesetzt ψ habe mit $\frac{d}{vi}$ einen gemeinschaftlichen Theiler σ, so ist sofort zu sehen, dass σ als Factor von $\frac{\chi\left(\frac{d_1}{v_1}, \frac{d_2}{v_2}\right)}{i}$ oder auch von $\frac{c\left(\frac{d_1}{v_1}, \frac{d_2}{v_2}\right)}{i}$ ein Factor von c sein muss, weil $\frac{\left(\frac{d_1}{v_1}, \frac{d_2}{v_2}\right)}{i}$ mit $\frac{d}{vi}$ keinen gemeinschaftlichen Theiler hat. Daher hat σ auch keinen Factor mit η gemeinschaftlich, weil dieser sonst (s. Congruenz (1.)) auch Factor von r wäre, was nicht möglich ist, weil r zu d prim ist. Ferner enthielten die Coefficienten von c_1 und c_2 in der zweiten und dritten Congruenz (2.) den Factor σ. Der Bedeutung der Grössen c gemäss muss aber jeder Primfactor von c in einer der beiden Grössen c_1 oder c enthalten sein. Irgend ein Primfactor μ von σ muss daher auch in c_1 oder c_2 enthalten sein, und zwar mindestens in einer dieser beiden Grössen so oft als in c, es sei dies in c_1, alsdann erfordert das Bestehen der Congruenzen (4.), dass $\frac{c}{\sigma}$ diesen Primfactor noch ebenso oft als c_1 enthält, was aber absurd ist. Da man ebenso beweisen kann, dass ψ weder mit $\frac{d_1}{v_1 i_1}$, noch mit $\frac{d_2}{v_2 i_2}$ einen gemeinschaftlichen Theiler hat, so folgt, dass ψ der grösste Factor des grössten gemeinschaftlichen Theilers von $\frac{\chi(i_1, i_2)}{i}$, $\frac{\chi_1(i, i_2)}{i_1}$, $\frac{\chi_2(i, i_1)}{i_2}$ ist, wofür noch die Congruenzen (4.) eine Lösung zulassen. Aber ψ muss offenbar auch ein Theiler von (χ, χ_1, χ_2) und daher auch von (c, c_1, c_2) sein; es ist also ψ der grösste Factor des grössten gemeinschaftlichen Theilers von $\frac{\chi(i_1, i_2)}{i}$, $\frac{\chi_1(i, i_2)}{i_1}$, $\frac{\chi_2(i, i_1)}{i_2}$, (c, c_1, c_2), wofür noch die Congruenzen (4.)

lösbar sind, indem man jetzt unter χ, χ_1, χ_2 respective die grössten gemeinschaftlichen Theiler von i, i_1, i_2 und c, c_1, c_2 versteht.

Zum Bestehen der Congruenzen (4.) ist aber nach einem oben angeführten Satze das Bestehen des Systems der folgenden Congruenzen nothwendig und hinreichend:

$$\eta\frac{\delta'}{v}\,\frac{\left(\frac{d_1}{v_1},\frac{d_2}{v_2}\right)c}{i\psi}-\eta_1\frac{\delta'_1}{v_1}\,\frac{\left(\frac{d}{v},\frac{d_2}{v_2}\right)c_1}{i_1\psi}\equiv 0 \mod \varpi_2,$$

$$\eta\frac{\delta'}{v}\,\frac{\left(\frac{d_1}{v_1},\frac{d_2}{v_2}\right)c}{i\psi}-\eta_2\frac{\delta'_2}{v_2}\,\frac{\left(\frac{d}{v},\frac{d_1}{v_1}\right)c_2}{i_2\psi}\equiv 0 \mod \varpi_1,$$

$$\eta_1\frac{\delta'_1}{v_1}\,\frac{\left(\frac{d}{v},\frac{d_2}{v_2}\right)c_1}{i_1\psi}-\eta_2\frac{\delta'_2}{v_2}\,\frac{\left(\frac{d}{v},\frac{d_1}{v_1}\right)c_2}{i_2\psi}\equiv 0 \mod \varpi,$$

wo ϖ_2, ϖ_1, ϖ, respective die grössten gemeinschaftlichen Theiler von c und c_1, c und c_2, c_1 und c_2 sind.

Multiplicirt man die erste dieser Congruenzen mit $\rho\rho_1$, die zweite mit $\rho\rho_2$, die dritte mit $\rho_1\rho_2$, so werden dadurch den linken Seiten keine neuen Factoren der bezüglichen Moduln hinzugefügt, weil diese respective zu den Zahlen $\rho\rho_1$, $\rho\rho_2$, $\rho_1\rho_2$ prim sind. Da nun $\eta\rho\equiv r \mod c$, $\eta_1\rho_1\equiv r_1 \mod c_1$, $\eta_2\rho_2\equiv r_2 \mod c_2$, so verwandelt sich das letzte System von Congruenzen in das folgende:

$$r\rho_1\frac{\delta'}{v}\,\frac{\left(\frac{d_1}{v_1},\frac{d_2}{v_2}\right)c}{\psi i}-r_1\rho\,\frac{\delta'_1}{v_1}\,\frac{\left(\frac{d}{v},\frac{d_2}{v_2}\right)c_1}{\psi i_1}\equiv 0 \mod \varpi_2,$$

$$r\rho_2\frac{\delta'}{v}\,\frac{\left(\frac{d_1}{v_1},\frac{d_2}{v_2}\right)c}{\psi i}-r_2\rho\,\frac{\delta'_2}{v_2}\,\frac{\left(\frac{d}{v},\frac{d_1}{v_1}\right)c_2}{\psi i_2}\equiv 0 \mod \varpi_1,$$

$$r_1\rho_2\frac{\delta'_1}{v_1}\,\frac{\left(\frac{d}{v},\frac{d_2}{v_2}\right)c_1}{\psi i_1}-r_2\rho_1\frac{\delta'_2}{v_2}\,\frac{\left(\frac{d}{v},\frac{d_1}{v_1}\right)c_2}{\psi i_2}\equiv 0 \mod \varpi.$$

Diese Congruenzen setzen wir in andere $\mod \psi$ um; dann können wir dieselben respective durch $\frac{d_2}{v_2 i_2}$, $\frac{d_1}{v_1 i_1}$, $\frac{d}{vi}$ dividiren. Man erhält alsdann:

$$r\rho_1\frac{\delta'}{v}\,\frac{d_1}{v_1 i_1}\,\frac{(i_1,i_2)}{i}\,\frac{c}{\varpi_2}-r_1\rho\,\frac{\delta'_1}{v_1}\,\frac{d}{vi}\,\frac{(i,i_1)}{i_1}\,\frac{c_1}{\varpi_2}\equiv 0 \mod \psi,$$

$$r\rho_2\frac{\delta'}{v}\,\frac{d_2}{v_2 i_2}\,\frac{(i_1,i_2)}{i}\,\frac{c}{\varpi_1}-r_2\rho\,\frac{\delta'_2}{v_2}\,\frac{d}{vi}\,\frac{(i,i_1)}{i_2}\,\frac{c_2}{\varpi_1}\equiv 0 \mod \psi,$$

$$r_1\rho_2\frac{\delta'_1}{v_1}\,\frac{d_2}{v_2 i_2}\,\frac{(i,i_2)}{i_1}\,\frac{c_1}{\varpi}-r_2\rho_1\frac{\delta'_2}{v_2}\,\frac{d_1}{v_1 i_1}\,\frac{(i,i_1)}{i_2}\,\frac{c_2}{\varpi}\equiv 0 \mod \psi.$$

Es ist aber, wie schon bemerkt, $(c, c_2) \equiv 0 \bmod c_1$, daher $\frac{c}{\varpi_2} \cdot \frac{c_2}{\varpi_1} : \frac{c_1}{\varpi_2}$ eine ganze Zahl, oder $\frac{c_2}{\varpi_1} = A \frac{c_1}{\varpi_2}$, wo A eine ganze Zahl. Ebenso findet man $\frac{c_1}{\varpi_2} = B \frac{c_2}{\varpi_1}$, wo B eine ganze Zahl. Multiplicirt man die beiden letzten Gleichungen, so erhält man $AB = 1$, d. h. $A = B = 1$. Daher ist $\frac{c}{\varpi_2} = \frac{(c, c_2)}{c_1}$. Analog ist $\frac{c_1}{\varpi_2} = \frac{(c_1, c_2)}{c}$, $\frac{c}{\varpi_1} = \frac{(c, c_1)}{c_2}$, $\frac{c_2}{\varpi_1} = \frac{(c_1, c_2)}{c}$, $\frac{c_1}{\varpi} = \frac{(c, c_1)}{c_2}$, $\frac{c_2}{\varpi} = \frac{(c, c_2)}{c_1}$.

Man hat also als Resultat unserer Untersuchung über den kleinsten Exponenten g, für den q^g congruent einer Potenz von x (mod n),

dass $g = \frac{d}{vi} \frac{d_1}{v_1 i_1} \frac{d_2}{v_2 i_2} \frac{(i, i_1, i_2)}{\psi}$, *wenn* ψ *der grösste Factor des grössten gemeinschaftlichen Theilers von* $\frac{\chi(i_1, i_2)}{i}$, $\frac{\chi_1(i, i_2)}{i_1}$, $\frac{\chi_2(i, i_1)}{i_2}$, (c, c_1, c_2) *ist, für welchen das folgende System von Congruenzen noch identisch erfüllt ist:*

$$(5.) \quad \begin{cases} r\varrho_1 \frac{\delta'}{v} \frac{d_1}{v_1 i_1} \frac{(i_1, i_2)}{i} \frac{(c, c_2)}{c_1} - r_1 \varrho \frac{\delta'_1}{v_1} \frac{d}{vi} \frac{(i, i_2)}{i_1} \frac{(c_1, c_2)}{c} \equiv 0 \quad \bmod \psi, \\ r\varrho_2 \frac{\delta'}{v} \frac{d_2}{v_2 i_2} \frac{(i_1, i_2)}{i} \frac{(c, c_1)}{c_2} - r_2 \varrho \frac{\delta'_2}{v_2} \frac{d}{vi} \frac{(i, i_1)}{i_2} \frac{(c_1, c_2)}{c} \equiv 0 \quad \bmod \psi, \\ r_1 \varrho_2 \frac{\delta'_1}{v_1} \frac{d_2}{v_2 i_2} \frac{(i, i_2)}{i_1} \frac{(c, c_1)}{c_2} - r_2 \varrho_1 \frac{\delta'_2}{v_2} \frac{d_1}{v_1 i_1} \frac{(i, i_1)}{i_2} \frac{(c, c_2)}{c_1} \equiv 0 \quad \bmod \psi, \end{cases}$$

wo χ, χ_1, χ_2 *die grössten gemeinschaftlichen Theiler respective von* i *und* c, i_1 *und* c_1, i_2 *und* c_2 *sind.*

3.

Unter Beibehaltung der Bezeichnungen in No. 1 und 2 ist die Anzahl der conjugirten idealen Primfactoren einer nicht in n enthaltenen Primzahl q in der Theorie der complexen Zahlen in π gleich $\frac{\varphi(n)}{tf}$. Enthält eine complexe Zahl in π, $f(\omega)$, genau m ideale Primfactoren von q, so enthält die Norm derselben, nämlich

$$Nf(\omega) = f(\omega^{r_1}) f(\omega^{r_2}) \dots f(\omega^{r_\nu}),$$

wo $\nu = \frac{\varphi(n)}{\tau}$ und $r_1, r_2, \dots r_\nu$ die ν Zahlen sind, welche kleiner als n und prim zu n und wovon der Quotient je zweier nicht congruent einer Potenz von x (mod n), genau die Potenz q^{mg}, da $\frac{\varphi(n)}{\tau} : \frac{\varphi(n)}{tf} = \frac{tf}{\tau} = g$ (nach No. 2). Bedeutet G den kleinsten Exponenten, für den p congruent einer Potenz von

$x \pmod{n'}$, so findet man ebenso, dass die Norm einer complexen Zahl in π, $f(\omega)$, welche genau M ideale Primfactoren von p enthält, genau den Factor p^{MG} hat.

Hieraus ergiebt sich, dass die Norm einer complexen Zahl in π, $f(\omega)$, die Gestalt hat:

$$Nf(\omega) = p^{MG} p_1^{M_1 G_1} p_2^{M_2 G_2} \dots q^{mg} q_1^{m_1 g_1} q_2^{m_2 g_2} \dots,$$

wenn $M, M_1, M_2, \dots m, m_1, m_2, \dots$ ganze Zahlen und $G_1, G_2, \dots g_1, g_2, \dots$ eine ähnliche Bedeutung wie respective G und g haben.

Ideale Zahlen in π gehören zu derselben Klasse, wenn sie mit derselben idealen Zahl in π multiplicirt eine wirkliche complexe Zahl in π zum Producte geben, d. h. eine complexe Zahl $F(\omega)$ mit der Eigenschaft $F(\omega^x) = F(\omega)$. — Man beweist nach den Principien von *Kummer*, dass es nur eine endliche Anzahl verschiedener Klassen giebt.

Ehe wir nun zur Bestimmung der Anzahl dieser Klassen übergehen, wollen wir eine Bemerkung machen, wodurch die Betrachtungen vereinfacht werden.

In meiner oben erwähnten Arbeit habe ich die Bedingungen für das Verschwinden einer Periode π_r, deren Index r zu n prim ist (einer *primitiven* Periode, wie ich sie dort genannt habe) angegeben. Aus diesen Bedingungen geht hervor, dass man einen Factor d von n finden könne, derart dass die Periode π_{rd} nicht verschwinde, und dass wenn d der kleinste der Factoren von n ist, welcher dieses bewirkt, jeder andere von derselben Art ein Multiplum von d sein müsse. Ist d der kleinste Factor von n, für den π_{rd} nicht mehr verschwindet, so ist $d.\varphi\left(\frac{n}{d}\right) = \varphi(n)$. In dem Ausdrucke, in welchen sich π_{rd} nur auf *eine* Weise setzen lässt, nämlich:

$$\pi_{rd} = b_0 + b_1 \omega^d + b_2 \omega^{2d} + \dots + b_{\varphi\left(\frac{n}{d}\right)-1} \omega^{\left(\varphi\left(\frac{n}{d}\right)-1\right)d}$$

sind daher die Exponenten von ω kleiner als $\varphi(n)$.

Ist nun $f(\omega)$ eine wirkliche complexe Zahl in π, so ist

$$f(\omega) = f(\omega^x) = f(\omega^{x^2}) = \dots = f(\omega^{x^{\tau-1}}),$$

daher $\tau f(\omega) = F(\pi)$, wo $F(\pi)$ eine nur die Perioden enthaltende complexe Zahl ist. Sind nun die Bedingungen erfüllt, welche für das Verschwinden der primitiven Perioden nothwendig und hinreichend sind, und ist d der kleinste Factor von n, für den π_{rd} nicht mehr verschwindet, so wird also nach der

eben gemachten Bemerkung $F(\pi)$ eine aus den Wurzeln der Gleichung $x^{\frac{n}{d}} = 1$ gebildete complexe Zahl sein, in welcher die sämmtlichen Exponenten von ω kleiner als $\varphi(n)$ sind. Sie lässt sich daher auf die Gestalt bringen:

$$F(\pi) = c_0 + c_1\omega^d + c_2\omega^{2d} + \cdots + c_{\varphi\left(\frac{n}{d}\right)-1}\,\omega^{d\left(\varphi\left(\frac{n}{d}\right)-1\right)},$$

wo die Exponenten von ω kleiner als $\varphi(n)$ sind. Aus der Gleichung $\tau f(\omega) = F(\pi)$ folgt daher, dass sämmtliche Grössen c durch τ theilbar sind, dass also $f(\omega)$ selbst einer aus den Wurzeln der Gleichung $x^{\frac{n}{d}} = 1$ gebildeten complexen Zahl gleich ist, also einer auf eine Gleichung niedrigeren Grades bezüglichen complexen Theorie angehört. Hieraus folgt, *dass wir uns im Folgenden auf solche Werthe von x beschränken können, wofür die primitiven Perioden nicht verschwinden.*

4.

Um die Klassenanzahl der complexen Zahlen in π zu bestimmen, muss man den Grenzwerth der Reihe

$$(1.)\quad R = (s-1)\Sigma\frac{1}{[Nf(\omega)]^s}\quad \text{für}\quad s = 1$$

ermitteln. In dieser Reihe ist die Summation auf alle nicht durch blosse Einheitsfactoren verschiedenen idealen oder wirklichen complexen Zahlen in π zu erstrecken, und der Norm die in der No. 3 angegebene Bedeutung beizulegen. Diese Reihe ist mit der folgenden gleichbedeutend:

$$R = (s-1)\Sigma\frac{1}{p^{MGs}.p_1^{M_1G_1s}.p_2^{M_2G_2s}\ldots q^{mgs}.q_1^{m_1g_1s}.q_2^{m_2g_2s}\ldots},$$

worin man über alle realen Primzahlen $q, q_1, q_2, \ldots$ die nicht in n enthalten sind, und über alle positiven ganzzahligen Werthe von $M, M_1, M_2, \ldots$ $m, m_1, m_2, \ldots$ summiren muss. Es sei Θ der Exponent, zu dem x (mod n') gehört, t' der Exponent, zu dem p nach demselben Modul gehört, α der kleinste Exponent, für den x^α congruent einer Potenz von p (mod n'), und man bezeichne die Grösse $\frac{\varphi(n)}{tf} = \frac{\varphi(n)}{\tau g}$ mit u, und die Grösse $\frac{\varphi(n')}{t'\alpha} = \frac{\varphi(n')}{\Theta G}$ mit U, und lege den Grössen $u_1, u_2, \ldots U_1, U_2, \ldots$ eine ähnliche Bedeutung respective für $q_1, q_2, \ldots p_1, p_2, \ldots$ bei, so findet man

$$(2.)\ R = (s-1)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p^{Gs}}}\right)^U\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_1^{G_1s}}}\right)^{U_1}\ldots\Pi\left(\frac{1}{1-\frac{1}{q^{gs}}}\right)^u.\Pi\left(\frac{1}{1-\frac{1}{q_1^{g_1s}}}\right)^{u_1}\ldots,$$

wo jedes Productenzeichen Π sich auf alle diejenigen unendlich vielen nicht in n enthaltenen Primzahlen bezieht, für die g oder u denselben Werth haben, und die Anzahl der verschiedenen Producte mit der Anzahl aller möglichen Werthe von g oder u übereinstimmt.

Es ist nun dieser Ausdruck R in ein Product mit endlicher Factorenanzahl zu verwandeln, derart dass jeder Factor eine bestimmbare Reihe wird. Diese Umwandlung, welche für gewöhnliche complexe Zahlen ohne Mühe geleistet werden kann, ist für die complexen Zahlen in n mit Schwierigkeiten verknüpft. Es war dazu die in No. 2 vorausgeschickte Untersuchung über den kleinsten Exponenten g, für den q^g congruent einer Potenz von x (mod n) wird, unumgänglich nöthig, wie aus der folgenden Nummer noch deutlicher hervorgehen wird.

Ich darf mich in den ferneren Entwickelungen der besseren Uebersicht wegen auf den Fall, wo n ungerade ist, beschränken, da die Behandlung des Falles, wo n gerade ist, nur einige leichte Modificationen erfordert.

5.

Es seien $e, e_1, e_2, \ldots$ Zahlen respective aus den Reihen $0, 1, \ldots \frac{\varphi(p^{\pi})}{\delta'}-1$, $0, 1, \ldots \frac{\varphi(p_1^{\pi_1})}{\delta'_1}-1$, $0, 1, \ldots \frac{\varphi(p_2^{\pi_2})}{\delta'_2}-1, \ldots$, *welche der Congruenz*

$$(1.)\qquad e\varrho\frac{\tau}{c}+e_1\varrho_1\frac{\tau}{c_1}+e_2\varrho_2\frac{\tau}{c_2}+\cdots\equiv 0 \mod \tau$$

genügen, so ist

$$(2.)\qquad \left(\frac{1}{1-\frac{1}{q^{gs}}}\right)^u = \prod_{e,e_1,e_2,\ldots}\frac{1}{1-\frac{\xi^{e\delta'\operatorname{Ind}q}\,\xi_1^{e_1\delta'_1\operatorname{Ind}_1 q}\,\xi_2^{e_2\delta'_2\operatorname{Ind}_2 q}\cdots}{q^s}},$$

wo $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ respective primitive Wurzeln der Gleichungen $\xi^{\varphi(p^{\pi})}=1$, $\xi_1^{\varphi(p_1^{\pi_1})}=1$, $\xi_2^{\varphi(p_2^{\pi_2})}=1, \ldots$ *sind, und das Productenzeichen* $\prod\limits_{e,e_1,e_2,\ldots}$ *sich auf alle Werthcombinationen von $e, e_1, e_2, \ldots$ bezieht, welche der Congruenz* (1.) *genügen.*

Um diese Umformung zu begründen, muss gezeigt werden:

1) dass $\xi^{e\delta'\operatorname{Ind}q}\,\xi_1^{e_1\delta'_1\operatorname{Ind}_1 q}\,\xi_2^{e_2\delta'_2\operatorname{Ind}_2 q}\ldots$, wenn $e, e_1, e_2, \ldots$ der Congruenz (1.) genügen, eine g^{te} Wurzel der Einheit ist;

2) dass jede der g Wurzeln der Gleichung $x^g = 1$ in dem Producte Π vorkommt, und zwar jede $u$mal.

$e, e_1, \ldots$

Die Allgemeinheit des Verfahrens ist wiederum schon an dem Falle $n = p^{\alpha} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$ ersichtlich. Da q^g congruent ist einer Potenz von $\varkappa$ (mod n), so darf man setzen: $q^g \equiv \varkappa^h$ mod n, und es ist

$$\left(\xi^{e\delta'\,\mathrm{Ind}\,q}\,\xi_1^{e_1\delta'_1\,\mathrm{Ind}_1 q}\,\xi_2^{e_2\delta'_2\,\mathrm{Ind}_2 q}\right)^g = \left(\xi^{e\delta'\,\mathrm{Ind}\,\varkappa}\,\xi_1^{e_1\delta'_1\,\mathrm{Ind}_1 \varkappa}\,\xi_2^{e_2\delta'_2\,\mathrm{Ind}_2 \varkappa}\right)^h$$

Bezeichnet nun w eine primitive Wurzel der Gleichung $x^{(c,\,c_1,\,c_2)} = 1$, so ist

$$\xi^{e\delta'\,\mathrm{Ind}\,\varkappa} = w^{e\varrho\frac{(c,\,c_1,\,c_2)}{c}}, \qquad \xi_1^{e_1\delta'_1\,\mathrm{Ind}_1 \varkappa} = w^{e_1\varrho_1\frac{(c,\,c_1,\,c_2)}{c_1}},$$

$$\xi_2^{e_2\delta'_2\,\mathrm{Ind}_2 \varkappa} = w^{e_2\varrho_2\frac{(c,\,c_1,\,c_2)}{c_2}}$$

Daher ist

$$\left(\xi^{e\delta'\,\mathrm{Ind}\,\varkappa}\,\xi_1^{e_1\delta'_1\,\mathrm{Ind}_1 \varkappa}\,\xi_2^{e_2\delta'_2\,\mathrm{Ind}_2 \varkappa}\right)^h = w^{\left[e\varrho\frac{(c,\,c_1,\,c_2)}{c} + e_1\varrho_1\frac{(c,\,c_1,\,c_2)}{c_1} + e_2\varrho_2\frac{(c,\,c_1,\,c_2)}{c_2}\right]h} = 1,$$

weil die Congruenz (1.) gleichbedeutend ist mit:

$$(3.)\quad e\varrho\frac{(c,\,c_1,\,c_2\ldots)}{c} + e_1\varrho_1\frac{(c,\,c_1,\,c_2\ldots)}{c_1} + e_2\varrho_2\frac{(c,\,c_1,\,c_2\ldots)}{c_2} + \cdots \equiv 0 \mod (c, c_1, c_2, \ldots).$$

Hieraus ergiebt sich, dass der Ausdruck $\xi^{e\delta'\,\mathrm{Ind}\,q}\,\xi_1^{e_1\delta'_1\,\mathrm{Ind}_1 q}\,\xi_2^{e_2\delta'_2\,\mathrm{Ind}_2 q}$ eine g^{te} Wurzel der Einheit ist, und dieses war zuerst zu beweisen.

Es sei jetzt

$$\xi^{e\delta'\,\mathrm{Ind}\,q}\,\xi_1^{e_1\delta'_1\,\mathrm{Ind}_1 q}\,\xi_2^{e_2\delta'_2\,\mathrm{Ind}_2 q} = \xi^{e'\delta'\,\mathrm{Ind}\,q}\,\xi_1^{e'_1\delta'_1\,\mathrm{Ind}_1 q}\,\xi_2^{e'_2\delta'_2\,\mathrm{Ind}_2 q},$$

wo e, e_1, e_2, e', e'_1, e'_2 zwei der Congruenz (1.) oder (3.) genügende Werthsysteme der obigen Zahlenreihen sind. Man hat alsdann:

$$(4.)\quad \xi^{(e'-e)\delta'\,\mathrm{Ind}\,q}\,\xi_1^{(e'_1-e_1)\delta'_1\,\mathrm{Ind}_1 q}\,\xi_2^{(e'_2-e_2)\delta'_2\,\mathrm{Ind}_2 q} = 1.$$

Ist s eine primitive Wurzel der Gleichung $s^{\left(\frac{d}{v},\,\frac{d_1}{v_1},\,\frac{d_2}{v_2}\right)} = 1$, so ist

$$\xi^{\delta'\,\mathrm{Ind}\,q} = s^{r\frac{\delta'}{v}\frac{\left(\frac{d_1}{v_1},\,\frac{d_2}{v_2}\right)}{i}}, \qquad \xi_1^{\delta'_1\,\mathrm{Ind}_1 q} = s^{r_1\frac{\delta'_1}{v_1}\frac{\left(\frac{d}{v},\,\frac{d_2}{v_2}\right)}{i_1}},$$

$$\xi_2^{\delta'_2\,\mathrm{Ind}_2 q} = s^{r_2\frac{\delta'_2}{v_2}\frac{\left(\frac{d}{v},\,\frac{d_1}{v_1}\right)}{i_2}};$$

die Gleichung (4.) erfordert daher, dass

$$(5.)\quad \begin{cases} (e'-e)r\frac{\delta'}{v}\frac{\left(\frac{d_1}{v_1},\frac{d_2}{v_2}\right)}{i}+(e'_1-e_1)r_1\frac{\delta'_1}{v_1}\frac{\left(\frac{d}{v},\frac{d_2}{v_2}\right)}{i_1}+(e'_2-e_2)r_2\frac{\delta'_2}{v_2}\frac{\left(\frac{d}{v},\frac{d_1}{v_1}\right)}{i_2}\equiv 0 \\ \qquad\qquad \mod\left(\frac{d}{v},\frac{d_1}{v_1},\frac{d_2}{v_2}\right). \end{cases}$$

Aus dieser Congruenz folgt aber sofort, dass

$$(6.)\quad e'-e=\alpha\frac{d}{vi},\quad e'_1-e_1=\alpha_1\frac{d_1}{v_1 i_1},\quad e'_2-e_2=\alpha_2\frac{d_2}{v_2 i_2},$$

wo α, α_1, α_2 ganze Zahlen sind. Man hat daher statt der Congruenz (5.) die folgende:

$$(7.)\quad \alpha r\frac{\delta'}{v}\frac{(i_1,i_2)}{i}+\alpha_1 r_1\frac{\delta'_1}{r_1}\frac{(i,i_2)}{i_1}+\alpha_2 r_2\frac{\delta'_2}{v_2}\frac{(i,i_1)}{i_2}\equiv 0 \mod(i,i_1,i_2).$$

Multiplicirt man aber die erste der Gleichungen (6.) mit $\varrho\frac{(c,c_1,c_2)}{c}$, die zweite mit $\varrho_1\frac{(c,c_1,c_2)}{c_1}$, die dritte mit $\varrho_2\frac{(c,c_1,c_2)}{c_2}$ und addirt, so erhält man mit Rücksicht auf die Congruenz (3.)

$$(8.)\quad \alpha\varrho\frac{d}{ri}\frac{(c,c_1,c_2)}{c}+\alpha_1\varrho_1\frac{d_1}{v_1 i_1}\frac{(c,c_1,c_2)}{c_1}+\alpha_2\varrho_2\frac{d_2}{v_2 i_2}\frac{(c,c_1,c_2)}{c_2}\equiv 0 \mod(c,c_1,c_2).$$

Wenn zwischen einer Anzahl disponibeler Grössen eine Congruenz (mod m) besteht, so ist die Anzahl der zulässigen Werthe der m^{te} Theil der Anzahl aller Grössen. Daher ist in Folge der Congruenz (1.) die Anzahl der Factoren des Productes in der Gleichung (2.) gleich

$$\frac{\frac{\varphi(p^n)}{\delta'}\cdot\frac{\varphi(p_1^{n_1})}{\delta'_1}\cdot\frac{\varphi(p_2^{n_2})}{\delta'_2}}{(c,c_1,c_2)}=\frac{\varphi(n)}{\tau}.$$

Aus den Gleichungen (6.) und den Congruenzen (7.) und (8.) folgt aber, dass eine im Producte Π der Gleichung (2.) vorkommende g^{te} Wurzel der Einheit genau $\dfrac{\varphi(n)}{\tau\frac{d}{vi}\frac{d_1}{v_1 i_1}\frac{d_2}{v_2 i_2}\frac{(i,i_1,i_2)}{\sigma}}$ mal vorkommt, wenn σ der grösste Factor des grössten gemeinschaftlichen Theilers von (i,i_1,i_2) und (c,c_1,c_2) ist, für den als Modul die Congruenzen:

$$(9.)\quad \begin{cases} \alpha r\frac{\delta'}{v}\frac{(i_1,i_2)}{i}+\alpha_1 r_1\frac{\delta'_1}{v_1}\frac{(i,i_2)}{i_1}+\alpha_2 r_2\frac{\delta'_2}{v_2}\frac{(i,i_1)}{i_2}\equiv 0 \mod\sigma, \\ \alpha\varrho\frac{d}{vi}\frac{(c_1,c_2)}{c}+\alpha_1\varrho_1\frac{d_1}{v_1 i_1}\frac{(c,c_2)}{c_1}+\alpha_2\varrho_2\frac{d_2}{v_2 i_2}\frac{(c,c_1)}{c_2}\equiv 0 \mod\sigma \end{cases}$$

die eine eine identische Folge der anderen ist. Hierzu ist aber nothwendig und hinreichend, dass identisch

$$(10.)\quad \begin{cases} r\varrho_1 \frac{\delta'}{v} \frac{d_1}{v_1 i_1} \frac{(i_1, i_2)}{i} \frac{(c, c_2)}{c_1} - r_1 \varrho \frac{\delta'_1}{v_1} \frac{d}{vi} \frac{(i, i_2)}{i_1} \frac{(c_1, c_2)}{c} \equiv 0 \quad \operatorname{mod} \sigma, \\ r\varrho_2 \frac{\delta'}{v} \frac{d_2}{v_2 i_2} \frac{(i_1, i_2)}{i} \frac{(c, c_1)}{c_2} - r_2 \varrho \frac{\delta'_2}{v_2} \frac{d}{vi} \frac{(i, i_1)}{i_2} \frac{(c_1, c_2)}{c} \equiv 0 \quad \operatorname{mod} \sigma, \\ r_1 \varrho_2 \frac{\delta'_1}{v_1} \frac{d_2}{v_2 i_2} \frac{(i, i_2)}{i_1} \frac{(c, c_1)}{c_2} - r_2 \varrho_1 \frac{\delta'_2}{v_2} \frac{d_1}{v_1 i_1} \frac{(i, i_1)}{i_2} \frac{(c, c_2)}{c_1} \equiv 0 \quad \operatorname{mod} \sigma. \end{cases}$$

Es ist in diesem Systeme von Congruenzen und in dem Systeme (9.) zu beachten, dass $(c, c_1, c_2) = (c, c_1) = (c, c_2) = (c_1, c_2)$.

Der Modul σ darf mit keiner der Zahlen $\frac{d}{vi}$, $\frac{d_1}{v_1 i_1}$, $\frac{d_2}{v_2 i_2}$, $\frac{\delta'}{v}$, $\frac{\delta_1}{v_1}$, $\frac{\delta'_2}{v_2}$ einen gemeinschaftlichen Theiler haben. Denn gesetzt σ hätte mit $\frac{d}{vi}$ einen gemeinschaftlichen Theiler β, so wäre β nach der ersten Congruenz (10.) auch Theiler von $r\varrho_1 \frac{d_1}{v_1 i_1} \frac{\delta'}{v} \frac{(i_1, i_2)}{i} \frac{(c, c_2)}{c_1}$. Da er aber zu $r \frac{d_1}{v_1 i_1} \frac{\delta'}{v} \frac{(i_1, i_2)}{i}$ prim und Theiler von $c_1 \frac{(c, c_2)}{c_1}$ ist, so ist er entweder Theiler von $\frac{(c, c_2)}{c_1}$ oder auch kein Theiler von $\varrho_1 \frac{(c, c_2)}{c_1}$, da ϱ_1 zu c_1 prim ist; also müsste der gemeinschaftliche Theiler β von σ und $\frac{d}{vi}$ ein Theiler von $\frac{(c, c_2)}{c_1}$ sein. Ebenso folgt aus der zweiten Congruenz (10.), dass β ein Theiler von $\frac{(c, c_1)}{c_2}$ sein müsste; was aber absurd ist, da $\frac{(c, c_2)}{c_1}$ und $\frac{(c, c_1)}{c_2}$ keinen gemeinschaftlichen Theiler haben (s. No. 2). Auf eine ähnliche Weise wird gezeigt, dass σ mit $\frac{d_1}{v_1 i_1}$ und $\frac{d_2}{v_2 i_2}$ keinen gemeinschaftlichen Theiler hat. — Es habe ferner σ mit $\frac{\delta'}{v}$ einen gemeinschaftlichen Theiler γ, so müsste dieser nach der ersten Congruenz (10.) Theiler von $r_1 \varrho \frac{\delta'_1}{v_1} \frac{d}{vi} \frac{(i, i_2)}{i_1} \frac{(c_1, c_2)}{c}$ sein. Da er aber zu $\varrho \frac{\delta'_1}{v_1} \frac{d}{vi} \frac{(c_1, c_2)}{c}$ prim ist, so müsste er ein Theiler von $r_1 \frac{(i, i_2)}{i_1}$ sein. Nun aber ist derselbe Theiler von $i_1 \frac{(i, i_2)}{i_1}$, folglich entweder Theiler von $\frac{(i, i_2)}{i_1}$ oder auch nicht Theiler von $r_1 \frac{(i, i_2)}{i_1}$, da r_1 zu i_1 prim ist; also müsste γ Theiler von $\frac{(i, i_2)}{i_1}$ sein. Ebenso folgt aus der zweiten Congruenz (10.), dass γ Theiler von $\frac{(i, i_1)}{i_2}$ sein müsste,

was aber absurd ist, da $\frac{(i, i_1)}{i_1}$ und $\frac{(i, i_1)}{i_2}$ keinen gemeinschaftlichen Theiler haben. Auf ähnliche Weise wird gezeigt, dass σ mit $\frac{\delta'_1}{v_1}$ und $\frac{\delta'_2}{v_2}$ keinen gemeinschaftlichen Theiler hat.

Ein gemeinschaftlicher Theiler ε von σ und $\frac{(c_1, c_2)}{c}$ muss nach der ersten Congruenz (10.) auch Theiler von $r\varrho_1 \frac{\delta'}{v} \frac{d_1}{v_1 i_1} \frac{(i_1, i_2)}{i} \frac{(c, c_1)}{c_1}$ sein. Da er aber prim zu $\frac{d_1}{v_1 i_1} \frac{(c, c_1)}{c_1} \frac{\delta'}{v}$ und Theiler von $i \frac{(i_1, i_2)}{i}$ ist, so ist er entweder Theiler von $\varrho_1 \frac{(i_1, i_2)}{i}$ oder auch nicht Theiler von $r\varrho_1 \frac{(i_1, i_2)}{i}$, weil r zu i prim ist. Wäre daher ε nicht Theiler von $\frac{(i_1, i_2)}{i}$, so müsste es mit ϱ_1 einen gemeinschaftlichen Theiler haben, welcher also zu c_1 prim ist. Aus der zweiten Congruenz (10.) würde man schliessen, dass dieser Theiler auch prim zu c_2 wäre. Es ist aber unmöglich, dass irgend ein Divisor von ε, welches selbst Theiler von $\frac{(c_1, c_2)}{c}$ ist, prim zu c_1 und zu c_2 sei. Also müsste der grösste gemeinschaftliche Theiler von σ und $\frac{(c_1, c_2)}{c}$ auch Theiler von $\frac{(i_1, i_2)}{i}$ sein. Umgekehrt heisse ζ der grösste gemeinschaftliche Theiler von σ und $\frac{(i_1, i_2)}{i}$, so muss dieser nach der ersten Congruenz (10.) Theiler von $r_1 \varrho \frac{\delta'_1}{v_1} \frac{d}{vi} \frac{(i, i_1)}{i_1} \frac{(c_1, c_2)}{c}$ sein. Er ist aber prim zu $\frac{\delta'_1}{v_1} \frac{d}{vi} \frac{(i, i_1)}{i_1}$ und Theiler von $c \frac{(c_1, c_2)}{c}$, daher entweder Theiler von $r_1 \frac{(c_1, c_2)}{c}$ oder auch nicht Theiler von $r_1 \varrho \frac{(c_1, c_2)}{c}$, weil ϱ zu c prim ist. Wäre daher ζ nicht Theiler von $\frac{(c_1, c_2)}{c}$, so müsste es mit r_1 einen gemeinschaftlichen Theiler haben, welcher also zu i_1 prim wäre. Aus der zweiten Congruenz (10.) würde man schliessen, dass dieser Theiler auch prim zu i_2 wäre. Es ist aber unmöglich, dass irgend ein Divisor von ζ, welches selbst Theiler von $\frac{(i_1, i_2)}{i}$ ist, prim zu i_1 und i_2 sei. Also ist der grösste gemeinschaftliche Theiler von σ und $\frac{(i_1, i_2)}{i}$ auch Theiler von $\frac{(c_1, c_2)}{c}$. Aus beiden Schlüssen zusammen ergiebt sich, dass der grösste gemeinschaftliche Theiler von σ und $\frac{(i_1, i_2)}{i}$ mit dem grössten gemeinschaftlichen Theiler von σ und $\frac{(c_1, c_2)}{c}$ übereinstimmt. Da aber σ Divisor von $i \frac{(i_1, i_2)}{i}$ und $c \frac{(c_1, c_2)}{c}$ ist, so folgt, wenn man mit χ den grössten gemein-

schaftlichen Theiler von i und c bezeichnet, dass σ ein gemeinschaftlicher Theiler von $\chi\frac{(i_1, i_2)}{i}$ und (c, c_1, c_2) ist. Aehnlich schliesst man, dass σ ein gemeinschaftlicher Theiler von $\chi_1\frac{(i, i_2)}{i_1}$ und (c, c_1, c_2) und auch von $\chi_2\frac{(i, i_1)}{i_2}$ und (c, c_1, c_2) ist, wo χ_1 und χ_2 respective die grössten gemeinschaftlichen Theiler von i_1 und c_1 und von i_2 und c_2 bedeuten. Daher ist σ der grösste Divisor des grössten gemeinschaftlichen Theilers der vier Zahlen $\chi\frac{(i_1, i_2)}{i}$, $\chi_1\frac{(i, i_2)}{i_1}$, $\chi_2\frac{(i, i_1)}{i_2}$, (c, c_1, c_2), für den noch die Congruenzen (10.) bestehen.

Vergleicht man das System der Congruenzen (10.) mit dem Systeme (5.) in No. 2, so ergiebt sich, dass σ mit dem dortigen ψ übereinstimmt, daher ist

$$\frac{d}{vi}\frac{d_1}{v_1 i_1}\frac{d_2}{v_2 i_2}\frac{(i, i_1, i_2)}{\sigma} = \frac{d}{vi}\frac{d_1}{v_1 i_1}\frac{d_2}{v_2 i_2}\frac{(i, i_1, i_2)}{\psi} = g.$$

Daher kommt eine im Producte Π der Gleichung (2.) vorhandene g^{te} Wurzel der Einheit genau $\frac{\varphi(n)}{\tau g} = u$ mal vor; und da die Anzahl aller vorkommenden gleich $\frac{\varphi(n)}{\tau}$, so folgt, dass alle g^{ten} Wurzeln der Einheit vorkommen, und jede u mal. Dieser Nachweis war das zweite Erforderniss zur Begründung der Gleichung (2.).

Sind e'_1, e'_2, ... wieder Zahlen respective aus den Reihen 0, 1, ... $\frac{\varphi(p_1^{n_1})}{\delta''_1}-1$, 0, 1, ... $\frac{\varphi(p_2^{n_2})}{\delta''_2}-1$, ..., welche der Congruenz:

$$(1^a.) \qquad e'_1\varrho_1\frac{\Theta}{c'_1}+e'_2\varrho_2\frac{\Theta}{c'_2}+\cdots \equiv 0 \mod \Theta$$

genügen, wo c'_μ jetzt den grössten gemeinschaftlichen Theiler von δ_μ und $(\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_{\mu-1}, \delta_{\mu+1}, \ldots)$ bedeutet und $\delta''_\mu = \frac{\delta_\mu}{c'_\mu}$ ist, so hat man analog der Gleichung (2.)

$$(2^a.) \qquad \left(\frac{1}{1-\frac{1}{p^{G_s}}}\right)^U = \prod_{e'_1, e'_2, \ldots} \frac{1}{1-\frac{\xi_1^{e'_1\delta''_1 \operatorname{Ind}_1 p}\xi_2^{e'_2\delta''_2 \operatorname{Ind}_2 p}\cdots}{p^s}}.$$

Es sei $c_\mu = \alpha_\mu . c'_\mu$, wo α_μ eine ganze Zahl ist; multiplicirt man die Congruenz (1^a.) mit δ', so erhält man gemäss der Relation $\tau = \delta'\Theta$

$$e'_1\varrho_1\alpha_1\frac{\tau}{c_1}+e'_2\varrho_2\alpha_2\frac{\tau}{c_2}+\cdots \equiv 0 \mod \tau.$$

Setzt man $e'_1\alpha_1 = e''_1$, $e'_2\alpha_2 = e''_2$, ..., so geht diese Congruenz über in:

$$(1^b.)\quad e_1''\varrho_1\frac{\tau}{c_1}+e_2''\varrho_2\frac{\tau}{c_2}+\cdots\equiv 0\cdot\operatorname{mod}\tau,$$

und, weil $\delta_1''=\alpha_1\delta_1'$, $\delta_2''=\alpha_2\delta_2'$, ..., die Gleichung $(2^a.)$ in

$$(2^b.)\quad \left(\frac{1}{1-\frac{1}{p^{G_s}}}\right)^U=\underset{e_1'',e_2'',\dots}{\Pi}\frac{1}{1-\frac{\xi_1^{e_1''\delta_1'\operatorname{Ind}_1 p}\xi_2^{e_2''\delta_2'\operatorname{Ind}_2 p}\cdots}{p^s}},$$

wo das Product sich auf alle Zahlen respective der Reihen 0, 1, ... $\frac{\varphi(p_1^{\alpha_1})}{\delta_1'}-1$, 0, 1, ... $\frac{\varphi(p_2^{\alpha_2})}{\delta_2}-1$, ... bezieht, welche der Congruenz $(1^b.)$ genügen, da, wie man leicht sieht, die Grössen e_1'' e_2'', ..., wenn sie dieser Congruenz genügen, von selbst respective durch α_1, α_2, ... theilbar sein müssen. — Man kann also in der Gleichung $(2^b.)$ die oberen Indices der Grössen e weglassen und das Product Π über alle Werthe der Grössen e_1, e_2, ... aus den eben angegebenen Zahlenreihen erstrecken, welche der Congruenz (1.) genügen, nachdem man darin e gleich Null gesetzt hat.

6.

Substituirt man in dem Ausdrucke R (Gleichung (2.) in Nr. 4) für jeden Factor $\left(\frac{1}{1-\frac{1}{q^{g_s}}}\right)^u$, ... $\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p^{G_v}}}\right)^U$... seinen Werth aus den Gleichungen (2.) und $(2^b.)$ der vorigen Nummer, entwickelt die einzelnen Factoren in Reihen, und multiplicirt diejenigen mit einander, die zu demselben Werthsysteme der Grössen e gehören, so erhält man:

$$(1.)\quad R=(s-1)\underset{e,e_1,e_2,\dots}{\Pi}\Sigma_m\frac{\xi^{e\delta'\operatorname{Ind}m}\xi_1^{e_1\delta_1'\operatorname{Ind}_1 m}\xi_2^{e_2\delta_2'\operatorname{Ind}_2 m}\cdots}{m^s},$$

In dieser Gleichung bezieht sich das Productzeichen Π auf alle $\frac{\varphi(n)}{\tau}$ Werthsysteme e, e_1, e_2, ..., die der Congruenz (1.) der vorigen Nummer genügen, das Summenzeichen Σ_m jedesmal auf alle positiven ganzen Zahlen, für welche die vorhandenen Indices einen Sinn haben. Wenn z. B. $e=0$, e_1, e_2, ... aber von Null verschieden sind, so bezieht sich Σ_m auf alle Zahlen, die mit $n'=\frac{n}{p^\alpha}$ keinen gemeinschaftlichen Theiler haben.

Den Grenzwerth des Ausdruckes R für $s=1$ finden wir mit Hülfe der von *Dirichlet* in der Abhandlung *über die arithmetische Progression* gegebenen Gleichungen:

$$(2.)\quad \lim (s-1)\,\Sigma_m \frac{1}{m^s}\ (\text{für } s=1) = 1,$$

$$(3.)\quad \Sigma_m \frac{\xi^{\gamma \,\mathrm{Ind}\, m}\,\xi_1^{\gamma_1 \,\mathrm{Ind}_1 m}\,\xi_2^{\gamma_2 \,\mathrm{Ind}_2 m}\cdots}{m} = \int_0^1 \frac{\Sigma_m \xi^{\gamma \,\mathrm{Ind}\, m}\,\xi_1^{\gamma_1 \,\mathrm{Ind}_1 m}\,\xi_2^{\gamma_2 \,\mathrm{Ind}_2 m}\cdots x^{m-1}}{1-x^{n_1}}\,dx.$$

In der letzten Gleichung sind γ, γ_1, γ_2, ... ganze Zahlen, die nicht alle zugleich verschwinden; das Summenzeichen links bezieht sich auf alle positiven ganzen Zahlen, für welche die vorkommenden Indices einen Sinn haben, das Summenzeichen rechts auf alle Zahlen $< n_1$, und prim zu n_1, wo n_1 den Complex aller derjenigen in n enthaltenen Primzahlpotenzen bezeichnet, in Bezug auf welche linkerhand Indices vorkommen, während die Integration auf reellem Wege von 0 bis 1 auszuführen ist. In der Gleichung (2.) dagegen bezieht sich das Summenzeichen auf alle positiven ganzen Zahlen.

Setzt man

$$(4.)\quad f_{\gamma,\gamma_1,\gamma_2,\ldots}(x) = \Sigma_m \xi^{\gamma \,\mathrm{Ind}\, m}\,\xi_1^{\gamma_1 \,\mathrm{Ind}_1 m}\,\xi_2^{\gamma_2 \,\mathrm{Ind}_2 m}\ldots x^m,$$

wo das Summenzeichen sich auf alle Werthe von m kleiner als n_1 und prim zu n_1 bezieht, und ist ω_1 eine primitive Wurzel der Gleichung $x^{n_1}=1$, so erhält man durch Zerlegung in Partialbrüche aus Gleichung (3.)

$$\Sigma_m \frac{\xi^{\gamma \,\mathrm{Ind}\, m}\,\xi_1^{\gamma_1 \,\mathrm{Ind}_1 m}\,\xi_2^{\gamma_2 \,\mathrm{Ind}_2 m}\cdots}{m} = -\frac{1}{n_1}\sum_1^{n_1-1}{}_l\, f_{\gamma,\gamma_1,\gamma_2,\ldots}(\omega_1^l)\int_0^1 \frac{dx}{x-\omega_1^l}.$$

Hieraus folgt:

$$(5.)\quad \begin{cases} \Sigma_m \dfrac{\xi^{\gamma \,\mathrm{Ind}\, m}\,\xi_1^{\gamma_1 \,\mathrm{Ind}_1 m}\,\xi_2^{\gamma_2 \,\mathrm{Ind}_2 m}\cdots}{m} \\ = -\dfrac{1}{n_1}\displaystyle\sum_1^{n_1-1}{}_l\, f_{\gamma,\gamma_1,\gamma_2,\ldots}(\omega_1^l)\left[\log e(\omega_1^l)+\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{2l}{n_1}\right)\sqrt{-1}\right], \end{cases}$$

wo $e(\omega_1^l) = \sqrt{(1-\omega_1^l)(1-\omega_1^{-l})}$, welches eine von *Kummer* mit dem Namen *Kreistheilungseinheit* belegte complexe Einheit ist.

Ist z. B. $n_1 = p^\alpha p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$ und z, z_1, z_2 respective primitive Wurzeln der Gleichungen $z^{p^\alpha}=1$, $z_1^{p_1^{\alpha_1}}=1$, $z_2^{p_2^{\alpha_2}}=1$, so ist

$$(6.)\quad f_{\gamma,\gamma_1,\gamma_2}(\omega_1^l) = \Sigma_\mu \xi^{\gamma \,\mathrm{Ind}\, \mu}.z^{l\mu}.\Sigma_{\mu_1}\xi_1^{\gamma_1 \,\mathrm{Ind}_1 \mu_1}.z_1^{l\mu_1}.\Sigma_{\mu_2}\xi_2^{\gamma_2 \,\mathrm{Ind}_2 \mu_2}.z_2^{l\mu_2},$$

wo Σ_μ, Σ_{μ_1}, Σ_{μ_2} sich respective auf alle Zahlen kleiner als p^α und ohne den Theiler p, kleiner als $p_1^{\alpha_1}$ und ohne den Theiler p_1, kleiner als $p_2^{\alpha_2}$ und ohne den Theiler p_2 beziehen. Hieraus ergiebt sich, dass, wenn l mit n_1 den grössten gemeinschaftlichen Theiler $p^\varrho p_1^{\varrho_1} p_2^{\varrho_2}$ hat, $f_{\gamma,\gamma_1,\gamma_2}(\omega_1^l)$ verschwindet,

ausser wenn $\gamma \equiv 0 \bmod p^{\varrho}$, $\gamma_1 \equiv 0 \bmod p_1^{\varrho_1}$, $\gamma_2 \equiv 0 \bmod p_2^{\varrho_2}$. Umgekehrt wenn die höchsten in γ, γ_1, γ_2 enthaltenen Potenzen von p, p_1, p_2 respective p^{ϱ}, $p_1^{\varrho_1}$, $p_2^{\varrho_2}$ sind, so verschwindet $f_{\gamma,\gamma_1,\gamma_2}(\omega_1^l)$, ausser wenn $l \equiv 0 \bmod p^{\varrho} p_1^{\varrho_1} p_2^{\varrho_2}$. Hieraus folgt, wenn $\gamma = \gamma' p^{\varrho}$, $\gamma_1 = \gamma_1' p_1^{\varrho_1}$, $\gamma_2 = \gamma_2' p_2^{\varrho_2}$ und γ', γ_1', γ_2' respective nicht mehr durch p, p_1, p_2 theilbar sind, so ist nach Gleichung (5.)

$$(7.)\quad \begin{cases} \Sigma_m \dfrac{\xi^{\gamma \operatorname{Ind} m} \xi_1^{\gamma_1 \operatorname{Ind}_1 m} \xi_2^{\gamma_2 \operatorname{Ind}_2 m}}{m} \\ = -\dfrac{1}{n_1} \Sigma_l f_{\gamma,\gamma_1,\gamma_2}\left(\omega_1^{lp^{\varrho} p_1^{\varrho_1} p_2^{\varrho_2}}\right)\left[\log e\left(\omega_1^{lp^{\varrho} p_1^{\varrho_1} p_2^{\varrho_2}}\right) + \dfrac{\pi}{2}\left(1 - \dfrac{2lp^{\varrho} p_1^{\varrho_1} p_2^{\varrho_2}}{n_1}\right)\sqrt{-1}\right], \end{cases}$$

wo die Summation rechts sich auf alle Werthe von l kleiner als $p^{\alpha-\varrho} p_1^{\alpha_1-\varrho_1} p_2^{\alpha_2-\varrho_2}$ und prim zu n_1 bezieht. — Setzt man für eine dieser Zahlen l, $lm \equiv m' \bmod n_1$, so durchläuft m' mit m alle Werthe, die kleiner als n_1 und prim zu n_1 sind, nnd man erhält

$$f_{\gamma,\gamma_1,\gamma_2}\left(\omega_1^{lp^{\varrho} p_1^{\varrho_1} p_2^{\varrho_2}}\right) = \xi^{-\gamma \operatorname{Ind} l} \xi_1^{-\gamma_1 \operatorname{Ind}_1 l} \xi_2^{-\gamma_2 \operatorname{Ind}_2 l} . f_{\gamma,\gamma_1,\gamma_2}\left(\omega_1^{p^{\varrho} p_1^{\varrho_1} p_2^{\varrho_2}}\right).$$

Daher geht die Gleichung (7.) über in:

$$(8.)\quad \begin{cases} \Sigma_m \dfrac{\xi^{\gamma \operatorname{Ind} m} \xi_1^{\gamma_1 \operatorname{Ind}_1 m} \xi_2^{\gamma_2 \operatorname{Ind}_2 m}}{m} \\ = -\dfrac{1}{n_1} f_{\gamma,\gamma_1,\gamma_2}\left(\omega_1^{p^{\varrho} p_1^{\varrho_1} p_2^{\varrho_2}}\right) \Sigma_l \xi^{-\gamma \operatorname{Ind} l} \xi_1^{-\gamma_1 \operatorname{Ind}_1 l} \xi_2^{-\gamma_2 \operatorname{Ind}_2 l} \\ \qquad \times \left[\log e\left(\omega_1^{lp^{\varrho} p_1^{\varrho_1} p_2^{\varrho_2}}\right) + \dfrac{\pi}{2}\left(1 - \dfrac{2lp^{\varrho} p_1^{\varrho_1} p_2^{\varrho_2}}{n_1}\right)\sqrt{-1}\right], \end{cases}$$

wo rechts so wie in Gleichung (7.) zu summiren ist.

Man findet nunmehr ohne Mühe:

1) wenn $\gamma + \gamma_1 + \gamma_2$ eine gerade Zahl ist,

$$(9.)\quad \begin{cases} \Sigma_m \dfrac{\xi^{\gamma \operatorname{Ind} m} \xi_1^{\gamma_1 \operatorname{Ind}_1 m} \xi_2^{\gamma_2 \operatorname{Ind}_2 m}}{m} \\ = -\dfrac{1}{n_1} f_{\gamma,\gamma_1,\gamma_2}\left(\omega_1^{p^{\varrho} p_1^{\varrho_1} p_2^{\varrho_2}}\right) \Sigma_l \xi^{-\gamma \operatorname{Ind} l} \xi_1^{-\gamma_1 \operatorname{Ind}_1 l} \xi_2^{-\gamma_2 \operatorname{Ind}_2 l} \log e\left(\omega_1^{lp^{\varrho} p_1^{\varrho_1} p_2^{\varrho_2}}\right), \end{cases}$$

2) wenn $\gamma + \gamma_1 + \gamma_2$ eine ungerade Zahl ist,

$$(10.)\quad \begin{cases} \Sigma_m \dfrac{\xi^{\gamma \operatorname{Ind} m} \xi_1^{\gamma_1 \operatorname{Ind}_1 m} \xi_2^{\gamma_2 \operatorname{Ind}_2 m}}{m} \\ = \dfrac{\pi}{n_1^2} \sqrt{-1} . p^{\varrho} p_1^{\varrho_1} p_2^{\varrho_2} f_{\gamma,\gamma_1,\gamma_2}\left(\omega_1^{p^{\varrho} p_1^{\varrho_1} p_2^{\varrho_2}}\right) . \Sigma_l \xi^{-\gamma \operatorname{Ind} l} \xi_1^{-\gamma_1 \operatorname{Ind}_1 l} \xi_2^{-\gamma_2 \operatorname{Ind}_2 l} . l. \end{cases}$$

In beiden Gleichungen ist rechterhand so wie in (7.) und (8.) zu summiren. — Setzt man $p^{n-\varrho}p_1^{n_1-\varrho_1}p_2^{n_2-\varrho_2} = n'_1$, so ist

$$e(\omega_1^l)\,e(\omega_1^{l+n'_1})\,e(\omega_1^{l+2n'_1})\dots e(\omega_1^{l+(p^\varrho p_1^{\varrho_1}p_2^{\varrho_2}-1)n'_1}) = e(\omega_1^{lp^\varrho p_1^{\varrho_1}p_2^{\varrho_2}}).$$

Ferner ist:

$$e(\omega^l)\,e(\omega^{l+n_1})\,e(\omega^{l+2n_1})\dots e(\omega^{l+\left(\frac{n}{n_1}-1\right)n_1}) = e(\omega_1^l),$$

wo ω eine primitive Wurzel der Gleichung $x^n = 1$ bedeutet. Hieraus folgt:

1) wenn $\gamma+\gamma_1+\gamma_2$ eine gerade Zahl ist,

$$(9^a.)\quad \begin{cases} \Sigma_m \dfrac{\xi^{\gamma \operatorname{Ind} m}\,\xi_1^{\gamma_1 \operatorname{Ind}_1 m}\,\xi_2^{\gamma_2 \operatorname{Ind}_2 m}}{m} \\ = -\dfrac{1}{n_1} f_{\gamma,\gamma_1,\gamma_2}(\omega_1^{p^\varrho p_1^{\varrho_1} p_2^{\varrho_2}})\,\Sigma_l\, \xi^{-\gamma \operatorname{Ind} l}\,\xi_1^{-\gamma_1 \operatorname{Ind}_1 l}\,\xi_2^{-\gamma_2 \operatorname{Ind}_2 l} \log e(\omega^l), \end{cases}$$

2) wenn $\gamma+\gamma_1+\gamma_2$ eine ungerade Zahl ist,

$$(10^a.)\quad \begin{cases} \Sigma_m \dfrac{\xi^{\gamma \operatorname{Ind} m}\,\xi_1^{\gamma_1 \operatorname{Ind}_1 m}\,\xi_2^{\gamma_2 \operatorname{Ind}_2 m}}{m} \\ = \dfrac{n}{nn_1}\sqrt{-1}\, f_{\gamma,\gamma_1,\gamma_2}(\omega_1^{p^\varrho p_1^{\varrho_1} p_2^{\varrho_2}})\,\Sigma_l\, \xi^{-\gamma \operatorname{Ind} l}\,\xi_1^{-\gamma_1 \operatorname{Ind}_1 l}\,\xi_2^{-\gamma_2 \operatorname{Ind}_2 l}\,.\,l; \end{cases}$$

die Summationen rechter Hand in beiden Gleichungen sind auf alle Zahlen kleiner als n und prim zu n_1 zu beziehen.

Wir können nunmehr zur Bestimmung des Grenzwerthes von R übergehen.

Es bedeute für irgend einen Factor des Productes in Gleichung (1.) $n_{e,e_1,e_2,\dots}$ das Product aller derjenigen in n enthaltenen Primzahlpotenzen, denen nicht verschwindende Werthe der resp. Grössen e entsprechen, $\omega_{e,e_1,e_2,\dots}$ eine primitive Wurzel der Gleichung $x^{n_{e,e_1,e_2,\dots}} = 1$, p^ϱ, $p_1^{\varrho_1}$, $p_2^{\varrho_2}$, ... respective den grössten gemeinschaftlichen Theiler von p^n, $p_1^{n_1}$, $p_2^{n_2}$, ... und e, e_1, e_2, ..., und man setze,

$$\Sigma_l\, \xi^{e\delta' \operatorname{Ind} l}\,\xi_1^{e_1\delta'_1 \operatorname{Ind}_1 l}\,\xi_2^{e_2\delta'_2 \operatorname{Ind}_2 l}\dots \omega_{e,e_1,e_2,\dots}^{lp^\varrho p_1^{\varrho_1} p_2^{\varrho_2}\dots} = f_{e,e_1,e_2,\dots}(\omega_{e,e_1,e_2,\dots}^{p^\varrho p_1^{\varrho_1} p_2^{\varrho_2}\dots}),$$

wo sich die Summation auf alle Werthe von l, die kleiner sind als $n_{e,e_1,e_2,\dots}$ und prim zu dieser Zahl, bezieht. Es sei nunmehr

$$\Pi_{e,e_1,e_2,\dots} \frac{f_{e,e_1,e_2,\dots}(\omega_{e,e_1,e_2,\dots}^{p^\varrho p_1^{\varrho_1} p_2^{\varrho_2}\dots})}{n_{e,e_1,e_2,\dots}} = A,$$

wo sich das Productzeichen auf alle mit der Congruenz (1.) der vorigen Nummer verträglichen Combinationen der Grössen e, mit Ausnahme der Combination 0, 0, 0, ... 0, bezieht, so dass die Anzahl der Factoren von A gleich $\frac{\varphi(n)}{\tau}-1$. Eine genauere Discussion des Ausdruckes A würde zeigen, dass er die Gestalt $p^{\varepsilon}p_1^{\varepsilon_1}p_2^{\varepsilon_2}\dots$, wo die Exponenten ε, ε_1, ε_2, ... rationale Werthe haben, annimmt. Wir gehen jedoch aus dem Grunde auf die Ermittelung dieser Exponenten nicht ein, weil es zweckmässiger scheint, den Ausdruck A in Verbindung mit einer Determinante im Schlussausdrucke der Klassenanzahl zu betrachten, gegen die er sich wegheben muss.

Es seien ferner l, l_1, l_2, l_3, ... respective die kleinsten Reste von l, lx, lx^2, lx^3, ... mod n und

$$nS_l = l+l_1+l_2+l_3+\cdots$$

so weit fortgesetzt bis das erste Glied wiederkehrt, so hat man in Folge der Congruenz (1.) in Nr. 5

$$\Sigma_l \xi^{-e\delta'\operatorname{Ind} l}\xi_1^{-e_1\delta'_1\operatorname{Ind}_1 l}\xi_2^{-e_2\delta'_2\operatorname{Ind}_2 l}\dots l$$
$$= n\Sigma_l \xi^{-e\delta'\operatorname{Ind} l}\xi_1^{-e_1\delta'_1\operatorname{Ind}_1 l}\xi_2^{-e_2\delta'_2\operatorname{Ind}_2 l}\dots S_l,$$

wo die erste Summe auf alle Werthe von l, die kleiner als n und prim zu $n_{e,e_1,e_2,\dots}$ sind, zu beziehen ist, die zweite Summe auf solche von diesen Zahlen, wovon nicht der Quotient zweier einer Potenz von x nach dem Modul n congruent ist. Wir setzen diese zweite Summe

$$\Sigma_l \xi^{-e\delta'\operatorname{Ind} l}\xi_1^{-e_1\delta'_1\operatorname{Ind}_1 l}\xi_2^{-e_2\delta'_2\operatorname{Ind}_2 l}\dots S_l = K(e, e_1, e_2, \dots).$$

Es sei ferner

$$E(\omega^l) = e(\omega^l)e(\omega^{lx})e(\omega^{lx^2})\dots$$

so weit fortgesetzt bis der erste Factor wiederkehrt, und

1) für den Fall dass τ ungerade, oder τ gerade ohne dass $x^{\frac{1}{2}\tau} \equiv -1 \bmod n$

$$\Sigma_l \xi^{-e\delta'\operatorname{Ind} l}\xi_1^{-e_1\delta'_1\operatorname{Ind}_1 l}\xi_2^{-e_2\delta'_2\operatorname{Ind}_2 l}\dots \log e(\omega^l)$$
$$= 2\Sigma_l \xi^{-e\delta'\operatorname{Ind} l}\xi_1^{-e_1\delta'_1\operatorname{Ind}_1 l}\xi_2^{-e_2\delta'_2\operatorname{Ind}_2 l}\dots \log E(\omega^l) = 2L(e, e_1, e_2, \dots);$$

2) für den Fall, dass τ gerade und $x^{\frac{1}{2}\tau} \equiv -1 \bmod n$

$$\Sigma_l \xi^{-e\delta'\operatorname{Ind} l}\xi_1^{-e_1\delta'_1\operatorname{Ind}_1 l}\xi_2^{-e_2\delta'_2\operatorname{Ind}_2 l}\dots \log e(\omega^l)$$
$$= \Sigma_l \xi^{-e\delta'\operatorname{Ind} l}\xi_1^{-e_1\delta'_1\operatorname{Ind}_1 l}\xi_2^{-e_2\delta'_2\operatorname{Ind}_2 l}\dots \log E(\omega^l) = L'(e, e_1, e_2, \dots);$$

wo die Summen L und L' sich auf die Werthe von l beziehen, die prim zu

$n_{e, e_1, e_2, \ldots}$ sind und wovon der Quotient je zweier nicht congruent einer Potenz von x (mod$n$) und die unterhalb $\frac{1}{2}n$ für L und unterhalb n für L' liegen.

Unter den Grössen δ, δ_1, δ_2, ... enthalte δ die höchste Potenz von 2, welche überhaupt in einer derselben als Factor vorkommt Alsdann sind die Zahlen δ'_1, δ'_2, ... sämmtlich ungerade, und daher $e_1\delta'_1+e_2\delta'_2+\cdots\equiv e_1+e_2+\cdots$ (mod 2). Man bestimme nun alle Systeme der Grössen e_1, e_2, ..., welche der Congruenz

$$e_1\varrho_1\frac{(c, c_1, c_2, \ldots)}{c_1}+e_2\varrho_2\frac{(c, c_1, c_2, \ldots)}{c_2}+\cdots \equiv 0 \mod \frac{(c, c_1, c_2, \ldots)}{c}.$$

genügen. Es sei für irgend eines dieser Systeme

$$e_1\varrho_1\frac{(c, c_1, c_2, \ldots)}{c_1}+e_2\varrho_2\frac{(c, c_1, c_2, \ldots)}{c_2}+\cdots = G\frac{(c, c_1, c_2, \ldots)}{c},$$

so muss der zugehörige Werth von e der Congruenz:

$$e\varrho+G \equiv 0 \mod c$$

genügen. — Ist nun e_1, e_2, ... ein System, welches der ersten Congruenz genügt, so ist auch $e_1+k\frac{(c, c_1, c_2, \ldots)}{c}$, e_2, ... ein solches System, wenn k eine beliebige ganze Zahl bedeutet und die erste Grösse nach dem Modul $\frac{\varphi(p^a)}{\delta'_1}$ reducirt ist. Da aber der letztere Modul eine gerade Zahl ist, so hat diese Reduction auf den Charakter der Summe $e_1+e_2+\cdots$ in Bezug auf den Modul 2 keinen Einfluss, und weil $\frac{(c, c_1, c_2, \ldots)}{c}$ ungerade ist, so folgt daraus, dass diese Summe ebenso oft gerade als ungerade ist. Ist δ' gerade, so ist $e\delta'+e_1\delta'_1+e_2\delta'_2+\cdots\equiv e_1+e_2+\cdots$(mod 2), daher wird auch die erstere Summe ebensooft gerade als ungerade. Ist aber δ' ungerade, so muss man die Fälle unterscheiden, wenn auch δ also auch c ungerade, oder wenn das Gegentheil stattfindet. Im ersteren Falle sei e, e_1, e_2, ... ein der Congruenz (1.) der vorigen Nummer genügendes System, so bilden auch die Grössen $e+kc$, e_1, e_2, ... für $k=1, 2, \ldots \frac{\varphi(p^a)}{\delta}-1$ ein solches. Da aber c ungerade ist, so wird $e\delta'+e_1\delta'_1+e_2\delta_2+\cdots$ ebenso oft gerade als ungerade. Im anderen Falle, wo c gerade ist, ist $G\equiv \Sigma e_\varepsilon$ mod 2, wenn die Summe sich auf diejenigen der Indices 1, 2, ... bezieht, für welche c_ε dieselbe Potenz von 2 enthält wie c. — Es muss aber $e+G\equiv 0$ mod 2 sein, und daher $e\delta'+e_1\delta'_1+e\ \delta'_2+\cdots$ congruent der Summe der übrigen Grössen e (mod 2). Diese Summe aber ist ebensooft gerade als ungerade, da, wenn z. B. e_2 ein

Glied derselben ist, $e_2+k\frac{(c,c_1,c_2,\dots)}{c}$ ebenfalls ein Glied einer solchen Summe ist. Es ist also in allen Fällen $e\delta'+e_1\delta'_1+e_2\delta'_2+\cdots$ ebenso oft gerade als ungerade, ausser wenn alle Grössen c eine gleich hohe Potenz von 2 enthalten. Dieser Fall tritt aber dann und nur dann ein, wenn τ gerade und $\varkappa^{\frac{1}{2}\tau}\equiv-1 \mod n$, und in diesem Falle ist die Summe $e\delta'+e_1\delta'_1+e_2\delta'_2+\cdots$ stets gerade. —

Setzt man endlich

$$\Pi K(e,e_1,e_2,\dots)=P,\quad \Pi L(e,e_1,e_2,\dots)=Q,\quad \Pi L'(e,e_1,e_2,\dots)=Q',$$

wo das erste Productzeichen sich auf alle der Congruenz (1.) der vorigen Nummer genügenden Werthsysteme der Grössen e bezieht, für welche $e\delta'+e_1\delta'_1+e_2\delta'_2+\cdots$ eine ungerade Zahl ist, während sich das zweite und dritte Product auf alle diejenigen Systeme beziehen, für welche $e\delta'+e_1\delta'_1+e_2\delta'_2+\cdots$ eine gerade Zahl ist, so erhält man schliesslich:

1) wenn τ ungerade, oder τ gerade und $\varkappa^{\frac{1}{2}\tau}$ nicht $\equiv -1 \mod n$

$$(11.)\qquad \lim_{\text{für } s=1} R = (-1)^{\frac{\varphi(n)}{2\tau}-1}.\sqrt{(-1)}^{\frac{\varphi(n)}{2\tau}}.2^{\frac{\varphi(n)}{2\tau}-1}.\pi^{\frac{\varphi(n)}{2\tau}}.A.P.Q,$$

2) wenn τ gerade und $\varkappa^{\frac{1}{2}\tau}\equiv-1 \mod n$

$$(11^a.)\qquad \lim_{\text{für } s=1} R = -A.Q'.$$

7.

Ehe wir zu der zweiten Summationsweise der Reihe R, wie sie die *Dirichlet*sche Methode erfordert, übergehen, ist es nothwendig, Einiges über die complexen Einheiten in π voranzuschicken.

Ist n eine ungerade Zahl, so besitzt, wie *Kronecker* (dieses Journal Bd. 53, pag. 176) gezeigt hat, jede complexe Einheit in der Theorie der complexen Zahlen in ω, $E(\omega)$, die Eigenschaft, dass

$$E(\omega^{-1}) = \pm\omega^h E(\omega),$$

wo h eine ganze Zahl bedeutet. Da für eine complexe Einheit in π die Gleichungen $E(\omega)=E(\omega^{\varkappa})=E(\omega^{\varkappa^2})=\cdots=E(\omega^{\varkappa^{\tau-1}})$ statt haben, so ist, wenn τ gerade und $\varkappa^{\frac{1}{2}\tau}\equiv-1 \mod n$, $E(\omega^{\varkappa^{\frac{1}{2}\tau}})=E(\omega^{-1})=E(\omega)$, oder es sind in diesem Falle alle Einheiten real. Ist aber τ ungerade, oder τ gerade und $\varkappa^{\frac{1}{2}\tau}$ nicht $\equiv -1 \mod n$, so folgt aus den beiden Gleichungen $E(\omega^{-1})=\pm\omega^h E(\omega)$ und

$E(\omega^{-\varkappa}) = E(\omega^{-1}) = \pm\omega^{h\varkappa}E(\omega^{\varkappa}) = \pm\omega^{h\varkappa}E(\omega)$, dass $\omega^{h(\varkappa-1)} = 1$, oder $h(\varkappa-1) \equiv 0$ mod n. Es habe daher $\varkappa-1$ mit n den grössten gemeinschaftlichen Theiler s, so muss $h \equiv 0 \bmod \frac{n}{s}$ sein; oder ω^h ist eine s^{te} Wurzel der Einheit. Es sei ε eine Wurzel der Congruenz $2\varepsilon - h \equiv 0$ mod n, so hat $E'(\omega) = \omega^{\varepsilon}E(\omega)$ die Eigenschaft, dass $E'(\omega^{-1}) = \pm E'(\omega)$. Es wird also jede complexe Einheit in π durch Multiplication mit einer s^{ten} Wurzel der Einheit entweder real oder rein imaginär. Ist n so beschaffen, dass es Einheiten der letzteren Art giebt, so sei $\mathrm{E}(\omega)$ irgend eine derselben, so ist $E''(\omega) = \frac{E(\omega)}{\mathrm{E}(\omega)^{\zeta}}$ real, wenn $\zeta = 0$ oder 1 gesetzt wird, je nachdem in der Gleichung $E(\omega^{-1}) = \pm\omega^h E(\omega)$ das obere oder untere Zeichen gilt. Es ist also $E(\omega) = \omega^{\varepsilon}\mathrm{E}(\omega)^{\zeta}.E''(\omega)$.

Es werde nunmehr $\nu = \frac{\varphi(n)}{\tau}$ gesetzt, so ergiebt sich aus den von *Dirichlet* gegebenen Sätzen über complexe Einheiten, (Monatsberichte der Berliner Academie Jhrg. 1846):

1) wenn τ gerade und $x^{\frac{1}{2}\tau} \equiv -1$ mod n, so giebt es $\nu-1$ reale und positive Einheiten in π, $\varepsilon_1(\omega)$, $\varepsilon_2(\omega)$, ... $\varepsilon_{\nu-1}(\omega)$, die ein Fundamentalsystem constituiren, so dass jede complexe Einheit in π, $E(\omega)$, dargestellt wird durch die Gleichung

$$(1.)\qquad E(\omega) = \pm\varepsilon_1(\omega)^{m_1}\varepsilon_2(\omega)^{m_2}\ldots\varepsilon_{\nu-1}(\omega)^{m_{\nu-1}},$$

wo m_1, m_2, ... $m_{\nu-1}$ positive ganze Zahlen sind.

2) wenn τ ungerade, oder τ gerade und $x^{\frac{1}{2}\tau}$ nicht $\equiv -1$ mod n, so giebt es ein Fundamentalsystem von $\frac{1}{2}\nu-1$ realen und positiven Einheiten $\varepsilon_1(\omega)$, $\varepsilon_2(\omega)$, ... $\varepsilon_{\frac{1}{2}\nu-1}(\omega)$, so dass in diesem Falle jede complexe Einheit in π, $E(\omega)$, wenn es rein imaginäre Einheiten giebt, dargestellt wird durch die Gleichung

$$(2.)\qquad E(\omega) = \pm\omega^{\varepsilon}\mathrm{E}(\omega)^{\zeta}\varepsilon_1(\omega)^{m_1}\varepsilon_2(\omega)^{m_2}\ldots\varepsilon_{\frac{1}{2}\nu-1}(\omega)^{m_{\frac{1}{2}\nu-1}},$$

wo m_1, m_2, ... $m_{\frac{1}{2}\nu-1}$ ganze Zahlen sind, und ω^{e} eine s^{te} Wurzel der Einheit bedeutet, und wo $\zeta = 0$ oder 1 zu setzen ist. —

Wenn es keine rein imaginäre Einheiten giebt, so hat man dagegen:

$$(2^a.)\qquad E(\omega) = \pm\omega^{\varepsilon}\varepsilon_1(\omega)^{m_1}\varepsilon_2(\omega)^{m_2}\ldots\varepsilon_{\frac{1}{2}\nu-1}(\omega)^{m_{\frac{1}{2}\nu-1}}.$$

Bezeichnet man die Anzahl der nicht äquivalenten Klassen der idealen Zahlen in π mit H, und bedeutet $f_a(\omega)$ eine zur a^{ten} Klasse gehörige ideale Zahl, so ist

$$R = \Sigma\frac{(s-1)}{[Nf(\omega)]^s} + \Sigma^{(1)}\frac{(s-1)}{[Nf_1(\omega)]^s} + \Sigma^{(2)}\frac{(s-1)}{[Nf_2(\omega)]^s} + \cdots + \Sigma^{(H-1)}\frac{(s-1)}{[Nf_{H-1}(\omega)]^s},$$

wo $\Sigma^{(a)}$ sich auf alle verschiedenen idealen Zahlen der a^{ten} Klasse bezieht, und wo mit $f(\omega)$ jede wirkliche complexe Zahl bezeichnet wird. Es ist nunmehr leicht zu zeigen, dass die Grenzwerthe dieser einzelnen Summen für $s = 1$ unter einander gleich sind, so dass

$$(3.)\qquad \lim_{s=1} R = H \lim \Sigma \frac{(s-1)}{[Nf(\omega)]^s} \quad \text{für } s = 1,$$

wo die Summe rechter Hand sich auf alle wirklichen complexen Zahlen in π bezieht, die nicht durch blosse Einheitsfactoren verschieden sind. — Die Untersuchung des Grenzwerthes dieser Summe erfordert die Unterscheidung der beiden Fälle: erstens τ ungerade oder τ gerade und $x^{\frac{1}{2}\tau}$ nicht $\equiv -1 \bmod n$, zweitens τ gerade und $x^{\frac{1}{2}\tau} \equiv -1 \bmod n$.

I. τ ungerade, oder τ gerade und $x^{\frac{1}{2}\tau}$ nicht $\equiv -1 \bmod n$.

Bezeichnet man den Grenzwerth der Summe $\Sigma \frac{(s-1)}{[Nf(\omega)]^s}$ für $s = 1$ mit G, so ergiebt sich aus den von *Dirichlet* und *Kummer* entwickelten Principien, dass

$$G = \frac{1}{2^{\zeta}.2s} \lim \frac{N}{T} \quad \text{für} \quad T = \infty,$$

wenn N die Anzahl der Glieder der Reihe bezeichnet, für die $Nf(\omega) < T$, und wo die Coefficienten $a_0, a_1, a_2, \ldots a_{\varphi(n)-1}$ in

$$f(\omega) = a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2 + \cdots + a_{\varphi(n)-1}\omega^{\varphi(n)-1}$$

ausser durch die $\varphi(n)$ Gleichungen vertretende Bedingungsgleichung

$$(4.)\qquad f(\omega^x) = f(\omega)$$

durch das folgende System von Gleichungen eingeschränkt werden:

$$(5.)\qquad \begin{cases} \sum_1^{\frac{1}{2}\nu-1} {}_a l\varepsilon_a(\omega^{r_1}) z_a = \frac{1}{2} l[cf(\omega^{r_1}) f(\omega^{r-1})], \\ \sum_1^{\frac{1}{2}\nu-1} {}_a l\varepsilon_a(\omega^{r_2}) z_a = \frac{1}{2} l[cf(\omega^{r_2}) f(\omega^{r-2})], \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \sum_1^{\frac{1}{2}\nu-1} {}_a l\varepsilon_a(\omega^{r_{\frac{1}{2}\nu-1}}) z_a = \frac{1}{2} l[cf(\omega^{r_{\frac{1}{2}\nu-1}} f(\omega^{r-(\frac{1}{2}\nu-1)})]. \end{cases}$$

In diesen Gleichungen bedeuten $\varepsilon_1(\omega), \varepsilon_2(\omega), \ldots \varepsilon_{\frac{1}{2}\nu-1}(\omega)$ zu einem Fundamentalsysteme zusammengehörige reale und positive Einheiten in π, die Grösse c eine beliebige Constante, $r_1, r_2, \ldots r_\nu$ die ν Zahlen, welche kleiner als n, prim zu n, und wovon der Quotient je zweier nicht congruent einer Potenz

von x (mod n), und endlich $z_1, z_2, \dots z_{\frac{1}{2}\nu-1}$ zwischen Null und Eins liegende Zahlenwerthe. Mit dem Symbol l wird der natürliche Logarithmus bezeichnet, und r_{-a} ist gleich $n-r_a$. Endlich muss $\zeta=1$ oder Null gesetzt werden, je nachdem eine rein imaginäre Einheit in π existirt oder nicht existirt.

Setzt man $a'_a = a_a . t$ für $a = 0, 1, \dots, \varphi(n)-1$, und

$$f'(\omega) = a'_0 + a'_1\omega + a'_2\omega^2 + \dots + a'_{\varphi(n)-1}\omega^{\varphi(n)-1},$$

so dass $f(\omega) = \frac{f'(\omega)}{t}$, nimmt man ferner $c = \frac{1}{t^s}$ an, so hat man in dem Ausdrucke $G = \lim \Sigma \frac{s-1}{\left[\frac{Nf'(\omega)}{t}\right]^s}$ für jeden Coefficienten a' die Glieder einer nach positiver und negativer Seite sich ins Unendliche erstreckenden arithmetischen Reihe mit der Differenz t und dem Anfangsgliede 0 zu nehmen, welche mit den Bedingungen

$$(6.)\qquad f'(\omega^x) = f'(\omega),$$

$$(7.)\qquad \begin{cases} \sum_1^{\frac{1}{2}\nu-1} {}_a l\varepsilon_a(\omega^{r_1}) z_a = \frac{1}{2} l[f'(\omega^{r_1}) f'(\omega^{r_{-1}})], \\ \sum_1^{\frac{1}{2}\nu-1} {}_a l\varepsilon_a(\omega^{r_2}) z_a = \frac{1}{2} l[f'(\omega^{r_2}) f'(\omega^{r_{-2}})], \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \sum_1^{\frac{1}{2}\nu-1} {}_a l\varepsilon_a(\omega^{r_{\frac{1}{2}\nu-1}}) z_a = \frac{1}{2} l[f'(\omega^{r_{\frac{1}{2}\nu-1}}) f'(\omega^{r_{-(\frac{1}{2}\nu-1)}})] \end{cases}$$

verträglich sind. — Nimmt man $T = \frac{1}{t^\nu}$ an, so geht die Bedingungsgleichung $\frac{Nf'(\omega)}{t^\nu} < T$ über in:

$$(8.)\qquad Nf'(\omega) < 1.$$

Nimmt man t unendlich klein, so werden die Coefficienten in $f'(\omega)$ reale Variabeln. Sind nun $\pi_{r_1}, \pi_{r_2}, \dots \pi_{r_\nu}$ die primitiven Perioden, so genügen dieselben bekanntlich einer algebraischen Gleichung $F(x)=0$, in der die Coefficienten ganzzahlig und der Coefficient der höchsten Potenz von x die Einheit ist. Da wir (s. No. 3) annehmen können, dass die primitiven Perioden nicht verschwinden, so können auch nicht zwei derselben einander gleich sein (vergl. die o. a. Abh. von *Kummer* vom Jahre 1856 §. 2, und meine o. a. Arbeit No. 4). Daher folgt bekanntlich aus der Gleichung (6.), dass

$$(9.)\qquad f'(\omega^{r_a}) = x_0 + x_1\pi_{r_a} + x_2\pi_{r_a}^2 + \dots + x_{\nu-1}\pi_{r_a}^{\nu-1}$$

für $a = 1, 2, \dots \nu$, gesetzt werden darf, wo $x_0, x_1, x_2, \dots x_{\nu-1}$ reale Grössen sind. Daher ist

$$(10.)\qquad G = \frac{1}{2^{\zeta}.2s}\int^{(\nu)} dx_0\, dx_1 \dots dx_{\nu-1},$$

wo $\int^{(\nu)}$ ein νfaches auf die Variabeln $x_0, x_1, \dots x_{\nu-1}$ erstrecktes Integral ist, mit den durch die Gleichungen (7.) und (8.) ausgedrückten Grenzbedingungen. — Es sei

$$(11.)\qquad y_a = f'(\omega^{r_a}),$$

führt man mit Hülfe der ν Gleichungen (9.) die Variabeln y an die Stelle der Variabeln x in das Integral (10.) ein, und setzt die nicht verschwindende Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \pi_{r_1} & \pi^2_{r_1} & \dots & \pi^{\nu-1}_{r_1} \\ 1 & \pi_{r_2} & \pi^2_{r_2} & \dots & \pi^{\nu-1}_{r_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \pi_{r_\nu} & \pi^2_{r_\nu} & \dots & \pi^{\nu-1}_{r_\nu} \end{vmatrix} = D,$$

so ist bekanntlich

$$(12.)\qquad G = \frac{1}{2^{\zeta}.2s.D}\int^{(\nu)} dy_1\, dy_2 \dots dy_\nu,$$

und die Grenzbedingungen (7.) und (8.) werden:

$$(13.)\qquad \begin{cases} \sum_1^{\frac{1}{2}\nu-1}{}_a\, l\varepsilon_a(\omega^{r_1})\, z_a = \frac{1}{2} l(y_1 . y_{-1}), \\ \sum_1^{\frac{1}{2}\nu-1}{}_a\, l\varepsilon_a(\omega^{r_2})\, z_a = \frac{1}{2} l(y_2 . y_{-2}), \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \sum_1^{\frac{1}{2}\nu-1}{}_a\, l\varepsilon_a(\omega^{r_{\frac{1}{2}\nu-1}})\, z_a = \frac{1}{2} l(y_{\frac{1}{2}\nu-1} . y_{-(\frac{1}{2}\nu-1)}), \end{cases}$$

$$(14.)\qquad y_1 y_2 \dots y_\nu < 1.$$

Die Variabeln y_a und y_{-a} haben conjugirte imaginäre Werthe. Setzt man daher

$$(15.)\qquad ly_a = u_a + u_{\frac{1}{2}\nu+a} . \sqrt{-1}, \qquad ly_{-a} = u_a - u_{\frac{1}{2}\nu+a} . \sqrt{-1}$$

für $a = 1, 2, \dots \frac{1}{2}\nu$, und transformirt das Integral (12.) in die Variabeln u, so findet man ohne Mühe

$$(16.)\quad G = (-1)^{\frac{1}{2}\nu} . \frac{2^{\frac{1}{2}\nu-1-\zeta}}{sD} . \int^{(\nu)} e^{2u_1} e^{2u_2} \dots e^{2u_{\frac{1}{2}\nu}} du_1\, du_2 \dots du_{\frac{1}{2}\nu} . du_{\frac{1}{2}\nu+1}\, du_{\frac{1}{2}\nu+2} \dots du_\nu.$$

Die Grenzbedingungen (13.) und (14.) gehen über in:

$$(17.)\quad \begin{cases} \sum_1^{\frac{1}{2}\nu-1}{}_a l\varepsilon_a(\omega^{r_1})z_a = u_1, \\ \sum_1^{\frac{1}{2}\nu-1}{}_a l\varepsilon_a(\omega^{r_2})z_a = u_2, \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \sum_1^{\frac{1}{2}\nu-1}{}_a l\varepsilon_a(\omega^{r_{\frac{1}{2}\nu-1}})z_a = u_{\frac{1}{2}\nu-1}, \end{cases}$$

$$(18.)\quad e^{2u_1}e^{2u_2}\dots e^{2u_{\frac{1}{2}\nu}} < 1.$$

In diesen kommen die Variablen $u_{\frac{1}{2}\nu+1}$, $u_{\frac{1}{2}\nu+2}$, ... u_ν nicht vor, und man hat daher in Bezug auf jede derselben zwischen den Grenzen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ zu integriren. Aus (18.) folgt, dass man in Bezug auf $u^{u_{\frac{1}{2}\nu}}$ zwischen den Grenzen $e^{2u_{\frac{1}{2}\nu}} = 0$ und $e^{2u_{\frac{1}{2}\nu}} = e^{-2u_1}e^{-2u_2}\dots e^{-2u_{\frac{1}{2}\nu-1}}$ zu integriren hat. Daher ist

$$(19.)\quad G = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}\nu}.2^{\nu-2-\zeta}.\pi^{\frac{1}{2}\nu}}{s.D}\int^{(\frac{1}{2}\nu-1)} du_1 du_2\dots du_{\frac{1}{2}\nu-1},$$

mit der einzigen Grenzbedingung (17.) — Setzt man die Determinante

$$\begin{vmatrix} l\varepsilon_1(\omega^{r_1}) & l\varepsilon_2(\omega^{r_1}) & \dots & l\varepsilon_{\frac{1}{2}\nu-1}(\omega^{r_1}) \\ l\varepsilon_1(\omega^{r_2}) & l\varepsilon_2(\omega^{r_2}) & \dots & l\varepsilon_{\frac{1}{2}\nu-1}(\omega^{r_2}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ l\varepsilon_1(\omega^{r_{\frac{1}{2}\nu-1}}) & l\varepsilon_2(\omega^{r_{\frac{1}{2}\nu-1}}) & \dots & l\varepsilon_{\frac{1}{2}\nu-1}(\omega^{r_{\frac{1}{2}\nu-1}}) \end{vmatrix} = \Delta,$$

so verschwindet bekanntlich diese Determinante nicht, weil $\varepsilon_1(\omega)$, $\varepsilon_2(\omega)$, ... $\varepsilon_{\frac{1}{2}\nu-1}(\omega)$ ein Fundamentalsystem constituiren. Man hat daher

$$G = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}\nu}.2^{\nu-2-\zeta}.\pi^{\frac{1}{2}\nu}.\Delta}{s.D}\int^{(\frac{1}{2}\nu-1)} dz_1 dz_2\dots dz_{\frac{1}{2}\nu-1},$$

wo die Integration in Bezug auf jede der Variabeln z zwischen den Grenzen 0 und 1 auszuführen ist. Es ist also endlich

$$(20.)\quad G = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}\nu}.2^{\nu-2-\zeta}.\pi^{\frac{1}{2}\nu}.\Delta}{s.D}.$$

Hieraus folgt mit Hülfe der Gleichung (3.)

$$(21.)\quad \lim_{s=1} R = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}\nu}.2^{\nu-2-\zeta}.\pi^{\frac{1}{2}\nu}.\Delta.H}{s.D}.$$

Setzt man diesen Werth von $\lim R$ dem in No. 6 Gleichung (11.) gefundenen gleich, so erhält man

$$(22.)\qquad H = (-1)^{\frac{1}{2}\nu-1}.\frac{A.D.s.P}{2^{\frac{1}{2}\nu-1-\zeta}}.\frac{Q}{\Delta}.$$

II. r gerade und $x^{\frac{1}{2}r} \equiv -1 \mod n$.

In diesem Falle ist

$$G = \tfrac{1}{2}\lim\frac{N}{T} \quad \text{für} \quad T = \infty.$$

An die Stelle der Gleichungen (5.) treten die folgenden:

$$(23.)\qquad \begin{cases} \sum_1^{\nu-1}{}_a l\varepsilon_a(\omega^{r_1})z_a = \tfrac{1}{2}l[cf(\omega^{r_1})^2], \\ \sum_1^{\nu-1}{}_a l\varepsilon_a(\omega^{r_2})z_a = \tfrac{1}{2}l[cf(\omega^{r_2})^2], \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \sum_1^{\nu-1}{}_a l\varepsilon_a(\omega^{r_{\nu-1}})z_a = \tfrac{1}{2}l[cf(\omega^{r_{\nu-1}})^2], \end{cases}$$

wo wiederum $\varepsilon_1(\omega)$, $\varepsilon_2(\omega)$, ... $\varepsilon_{\nu-1}(\omega)$ reale positive Einheiten sind, die ein Fundamentalsystem constituiren. — Es ergiebt sich auf analoge Weise wie im Falle I.

$$(24.)\qquad G = \frac{1}{2D}.\int^{(\nu)} dy_1 dy_2 \ldots dy_\nu,$$

wo y_1, y_2, ... y_ν reale Variabeln sind, und die Integration den folgenden Grenzbedingungen gemäss geschehen muss:

$$(25.)\qquad \begin{cases} \sum_1^{\nu-1}{}_a l\varepsilon_a(\omega^{r_1})z_a = \tfrac{1}{2}ly_1^2, \\ \sum_1^{\nu-1}{}_a l\varepsilon_a(\omega^{r_2})z_a = \tfrac{1}{2}ly_2^2, \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \sum_1^{\nu-1}{}_a l\varepsilon_a(\omega^{r_{\nu-1}})z_a = \tfrac{1}{2}ly_{\nu-1}^2. \end{cases}$$

$$(26.)\qquad y_1 y_2 \ldots y_\nu < 1.$$

Die zweite derselben erfordert, dass in Bezug auf y_ν zwischen den Grenzen 0 und $\frac{1}{y_1 y_2 \ldots y_{\nu-1}}$ integrirt werde. Führt man diese Integration aus, und setzt

$$u_a = \log y_a^2 \quad \text{für} \quad a = 1, 2, \ldots \nu-1,$$

so erhält man

$$(27.)\qquad G = \frac{1}{2^\nu . D}\int^{(\nu-1)} du_1 du_2 \dots du_{\nu-1},$$

wo $u_1, u_2, \dots u_{\nu-1}$ reale Variabeln sind und die Integration den folgenden Grenzgleichungen gemäss geschehen muss:

$$(28.)\qquad \begin{cases} \sum_1^{\nu-1}{}_a l\varepsilon_a(\omega^{r_1}) z_a = \frac{1}{2}u_1, \\ \sum_1^{\nu-1}{}_a l\varepsilon_a(\omega^{r_2}) z_a = \frac{1}{2}u_2, \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \sum_1^{\nu-1}{}_a l\varepsilon_a(\omega^{r_{\nu-1}}) z_a = \frac{1}{2}u_{\nu-1}. \end{cases}$$

Führt man in das Integral (27.) die Variabeln $z_1, z_2, \dots z_{\nu-1}$ ein, in Bezug auf welche zwischen den Grenzen 0 und 1 zu integriren ist, und setzt die Determinante:

$$\begin{vmatrix} l\varepsilon_1(\omega^{r_1}) & l\varepsilon_2(\omega^{r_1}) & \dots & l\varepsilon_{\nu-1}(\omega^{r_1}) \\ l\varepsilon_1(\omega^{r_2}) & l\varepsilon_2(\omega^{r_2}) & \dots & l\varepsilon_{\nu-1}(\omega^{r_2}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ l\varepsilon_1(\omega^{r_{\nu-1}}) & l\varepsilon_2(\omega^{r_{\nu-1}}) & \dots & l\varepsilon_{\nu-1}(\omega^{r_{\nu-1}}) \end{vmatrix} = \Delta',$$

so folgt

$$(29.)\qquad G = \frac{\Delta'}{2D}.$$

Endlich ist

$$(30.)\qquad \lim_{s=1} R = \frac{H.\Delta'}{2D}.$$

Setzt man diesen Werth von $\lim R$ dem in der vorigen Nummer Gleichung (11^a.) gefundenen gleich, so erhält man:

$$(31.)\qquad H = -2D.A.\frac{Q'}{\Delta'}.$$

8.

Die Bestimmung der Klassenanzahl der idealen Zahlen in π lässt wesentliche Vereinfachungen zu, wenn n keinen quadratischen Factor enthält,

d. h. wenn $n = pp_1p_2p_3\ldots$, wo p, p_1, p_2, p_3, ... lauter verschiedene, ungerade Primzahlen sind. Es scheint daher nicht unangemessen, diesen Fall besonders zu behandeln.

Ist n durch keinen quadratischen Factor theilbar, so lässt sich jede complexe Zahl in ω stets und nur auf eine einzige Weise in die folgende Form bringen:

$$(1.)\quad f(\omega) = a_1\omega^{r_1}+a_2\omega^{r_2}+\cdots+a_{\varphi(n)}\omega^{r_{\varphi(n)}},$$

wo a_1, a_2, ... $a_{\varphi(n)}$ *ganze Zahlen, und* r_1, r_2, ... $r_{\varphi(n)}$ *die Zahlen bedeuten, welche kleiner als n und prim zu n sind.*

Denn ist $\omega^{\mathfrak{b}}$ eine nicht primitive Wurzel der Gleichung $x^n = 1$, und ist z. B. $\mathfrak{b} = \alpha pp_1$, wo α prim zu $p_2p_3\ldots$ ist, und sind β_1, β_2, ... die Zahlen, welche kleiner als pp_1 und prim zu dieser Zahl, so hat man die Gleichung:

$$(2.)\quad \omega^{\alpha pp_1}(1-\omega^{\beta_1p_2p_3\cdots}-\omega^{\beta_2p_2p_3\cdots}-\ldots) = 0.$$

Hieraus folgt, dass man jede nicht primitive Wurzel der Gleichung $x^n = 1$ und folglich jede complexe Zahl in die Form (1.) setzen kann. — Es ergiebt sich hieraus ferner ohne Mühe, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} \omega^{r_1} & \omega^{r_2} & \ldots & \omega^{r_{\varphi(n)}} \\ \omega^{r_2r_1} & \omega^{r_2r_2} & \ldots & \omega^{r_2r_{\varphi(n)}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega^{r_{\varphi(n)}r_1} & \omega^{r_{\varphi(n)}r_2} & \ldots & \omega^{r_{\varphi(n)}r_{\varphi(n)}} \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet, wenn $r_1 = 1$ angenommen wird; und hieraus ergiebt sich, dass man $f(\omega)$ nur auf *eine* Weise in die Form (1.) setzen kann. — Ist daher $f(\omega^x) = f(\omega)$, so hat $f(\omega)$ die Gestalt

$$(3.)\quad f(\omega) = a_1\pi_{r_1}+a_2\pi_{r_2}+\cdots+a_\nu\pi_{r_\nu},$$

wo a_1, a_2, ... a_ν ganze Zahlen und r_1, r_2, ... r_ν die ν Zahlen bedeuten, welche kleiner als n und prim zu n, und wovon der Quotient je zweier nicht congruent einer Potenz von x (mod n).

Es sei nun

I. τ ungerade, oder τ gerade und $x^{\frac{1}{2}\tau}$ nicht $\equiv -1$ mod n,

so tritt an die Stelle der Gleichung (10.) der vorigen Nummer die folgende:

$$(4.)\quad G = \frac{1}{2^\zeta.2s}\int^{(\nu)} da_1\,da_2\ldots da_\nu.$$

In der Gleichung (12.) der vorigen Nummer ist an die Stelle der Deter-

minante D die Determinante

$$\begin{vmatrix} \pi_{r_1} & \pi_{r_2} & \dots & \pi_{r_\nu} \\ \pi_{r_1 r_2} & \pi_{r_2 r_2} & \dots & \pi_{r_\nu r_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \pi_{r_1 r_\nu} & \pi_{r_2 r_\nu} & \dots & \pi_{r_\nu r_\nu} \end{vmatrix} = E$$

zu setzen, wo $r_1 = 1$ angenommen wird.

Im gegenwärtigen Falle sind die in No. 5 eingeführten Grössen e, e_1, e_2, ... respective durch p, p_1, p_2, ... nicht theilbar, und es ist:

$$(5.)\qquad f_{e,e_1,e_2,\dots}(\omega_{e,e_1,e_2,\dots}) = \pm \Sigma_l \xi^{e\delta' \operatorname{Ind} l} \xi_1^{e_1 \delta'_1 \operatorname{Ind}_1 l} \dots \omega^l,$$

wo die Summe auf alle Zahlen l zu beziehen ist, die kleiner als n und prim zu n, und wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem $n'_{e,e_1,e_2,\dots} = \frac{n}{n_{e,e_1,e_2,\dots}}$ eine gerade Anzahl von Primfactoren enthält oder eine ungerade. — Dieses ergiebt sich aus der Gleichung

$$(6.)\qquad \omega^{\alpha n'_{e,e_1,e_2,\dots}}\left(\mp 1 + \omega^{\beta_1 n_{e,e_1,\dots}} + \omega^{\beta_2 n_{e,e_1,\dots}} + \dots\right) = 0,$$

wenn α eine der Zahlen, die kleiner als $n_{e,e_1,\dots}$ und prim zu derselben ist, während β_1, β_2, ... sämmtliche Zahlen bedeuten, welche kleiner als $n'_{e,e_1,\dots}$ und prim zu dieser Zahl sind, und wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem $n'_{e,e_1,\dots}$ eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Primfactoren enthält. —

Da $\xi^{e\delta' \operatorname{Ind} x} \xi_1^{e_1 \delta'_1 \operatorname{Ind}_1 x} \dots = 1$, so ist auch

$$(7.)\qquad f_{e,e_1,e_2,\dots}(\omega_{e,e_1,e_2,\dots}) = \pm \Sigma_l \xi^{e\delta' \operatorname{Ind} l} \xi_1^{e_1 \delta'_1 \operatorname{Ind}_1 l} \dots \pi_l,$$

wo die Summation rechts sich auf alle Zahlen bezieht, die kleiner sind als n und prim zu n und wovon der Quotient je zweier nicht congruent einer Potenz von x (mod n). — Die Determinante

$$J = \begin{vmatrix} \xi^{e^{(1)}\delta' \operatorname{Ind} r_1} \xi_1^{e_1^{(1)} \delta'_1 \operatorname{Ind}_1 r_1} \dots & \xi^{e^{(1)}\delta' \operatorname{Ind} r_2} \xi_1^{e_1^{(1)} \delta'_1 \operatorname{Ind}_1 r_2} \dots & \dots & \xi^{e^{(1)}\delta' \operatorname{Ind} r_\nu} \xi_1^{e_1^{(1)} \delta'_1 \operatorname{Ind}_1 r_\nu} \dots \\ \xi^{e^{(2)}\delta' \operatorname{Ind} r_1} \xi_1^{e_1^{(2)} \delta'_1 \operatorname{Ind}_1 r_1} \dots & \xi^{e^{(2)}\delta' \operatorname{Ind} r_2} \xi_1^{e_1^{(2)} \delta'_1 \operatorname{Ind}_1 r_2} \dots & \dots & \xi^{e^{(2)}\delta' \operatorname{Ind} r_\nu} \xi_1^{e_1^{(2)} \delta'_1 \operatorname{Ind}_1 r_\nu} \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi^{e^{(\nu)}\delta' \operatorname{Ind} r_1} \xi_1^{e_1^{(\nu)} \delta'_1 \operatorname{Ind}_1 r_1} \dots & \xi^{e^{(\nu)}\delta' \operatorname{Ind} r_2} \xi_1^{e_1^{(\nu)} \delta'_1 \operatorname{Ind}_1 r_2} \dots & \dots & \xi^{e^{(\nu)}\delta' \operatorname{Ind} r_\nu} \xi_1^{e_1^{(\nu)} \delta'_1 \operatorname{Ind}_1 r_\nu} \dots \end{vmatrix},$$

wo $e^{(a)}$, $e_1^{(a)}$, $e_2^{(a)}$, ... für $a = 1, 2, \dots \nu$ alle statthaften ν Combinationen der Grössen e, e_1, e_2, ... darstellen, hat die Eigenschaft, bis auf's Vorzeichen

unverändert zu bleiben, wenn man an die Stelle von $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ respective $\xi^{-1}, \xi_1^{-1}, \xi_2^{-2}, \ldots$ setzt. Nach dieser Veränderung heisse die Determinante J_1, so ist leicht zu zeigen, dass $J.J_1 = \pm J^2 = \nu^\nu$. — Man bilde nunmehr das Product der Determinanten J und E, so ergiebt sich mit Hülfe der Gleichung (6.): $J.E = \pm J.\Pi f_{e,e_1,e_2,\ldots}(\omega_{e,e_1,e_2,\ldots})$, oder

$$(8.)\qquad E = \pm \Pi f_{e,e_1,\ldots}(\omega_{e,e_1,\ldots}),$$

wo das Product den Zähler des Ausdruckes A in Nr. 6 bedeutet. —

Der Ausdruck für die Klassenanzahl wird in unserem Falle:

$$(9.)\qquad H = (-1)^{\frac{1}{2}\nu-1}.\frac{A.E.s.P}{2^{\frac{1}{2}\nu-1-\zeta}}.\frac{Q}{\Delta}.$$

Das Product $\Pi f_{e,e_1,\ldots}(\omega_{e,e_1,\ldots})$ lässt sich vermittelst der Gleichung (6.) in No. 6 in der Form $p^{\varepsilon} p_1^{\varepsilon_1} p_2^{\varepsilon_2}\ldots$ darstellen, und es ist nicht schwer zu zeigen, dass $\Pi n_{e,e_1,\ldots}$, der Nenner des Ausdruckes A, gleich ist $p^{2\varepsilon}.p_1^{2\varepsilon_1}.p_2^{2\varepsilon_2}\ldots$. Hieraus ergiebt sich, dass

$$A = \frac{1}{\Pi f_{e,e_1,\ldots}(\omega_{e,e_1,\ldots})} = \frac{1}{\pm E},\quad \text{d. h.}\quad AE = \pm 1.$$

Der Ausdruck (9.) wird daher, abgesehen vom Vorzeichen,

$$(10.)\qquad H = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}\nu}.s.P}{2^{\frac{1}{2}\nu-1-\zeta}}.\frac{Q}{\Delta}.$$

Ist

II. τ gerade und $x^{\frac{1}{2}\tau} \equiv -1 \mod n$,

so findet man auf ähnliche Weise, abgesehen vom Vorzeichen,

$$(11.)\qquad H = 2.\frac{Q'}{\Delta'}.$$

9.

Zum Schlusse sei es mir erlaubt auf die Beweise zweier auf die Perioden π_r bezüglichen Sätze, welche in der vierten Nummer meiner mehrerwähnten Arbeit enthalten sind, hier noch einmal zurückzukommen. Ich werde mich hierbei den daselbst angenommenen Bezeichnungen anschliessen. — Es wird zuerst folgender Hülfssatz bewiesen:

Es sei

$$(1.)\qquad \Sigma_a X_a\left(u_\varepsilon^{q^a}, q^{c_\varepsilon}\right) = 0,$$

wo $\left(u_\varepsilon^{q^a}, q^{c_\varepsilon}\right)$ die daselbst in No. 3 festgesetzte Bedeutung hat, und die Summation sich auf solche Werthe a bezieht, die incongruent sind nach dem Modul

c_ε, ferner werde vorausgesetzt, dass c_ε nicht durch p_ε theilbar sei, und dass die Grössen X_α rationale, ganze Functionen der Wurzeln der Gleichung $x^{n_\varepsilon}=1$ $\left(\text{wo } n_\varepsilon = \frac{n}{p_\varepsilon^{m_\varepsilon}} \text{ gesetzt ist}\right)$, mit ganzzahligen Coefficienten sind, so ist $X_\alpha = 0$, für alle Werthe von α, auf die sich die Summation bezieht.

Denn reducirt man die Perioden $\left(u_\varepsilon^{q^\alpha}, q^{c_\varepsilon}\right)$ mit Hülfe der Gleichung, welcher die primitiven Wurzeln der Gleichung $u^{p_\varepsilon^{m_\varepsilon}} = 1$ genügen, derartig, dass im reducirten Ausdrucke R_α die Exponenten von u_ε kleiner als $p_\varepsilon^{m_\varepsilon-1}(p_\varepsilon-1)$ sind, so haben in der Gleichung

$$(2.)\qquad \Sigma_\alpha X_\alpha R_\alpha = 0$$

die verschiedenen Grössen R_α keine gemeinschaftliche Potenz von u_ε.

Denn man hat (s. No. 2. der Arbeit)

$$(3.)\qquad R_\alpha = \chi(u_\varepsilon) - \left[u_\varepsilon^{p_\varepsilon^{m_\varepsilon-1}(p_\varepsilon-2)} + u_\varepsilon^{p_\varepsilon^{m_\varepsilon-1}(p_\varepsilon-3)} + \cdots + u_\varepsilon^{p_\varepsilon^{m_\varepsilon-1}} + 1\right]\psi(u_\varepsilon),$$

worin $\chi(u_\varepsilon)$ nur Potenzen von u_ε enthält, deren Exponenten kleiner als $p_\varepsilon^{m_\varepsilon-1}(p_\varepsilon-1)$, und $\psi(u_\varepsilon)$ nur Potenzen von u_ε, deren Exponenten kleiner als $p_\varepsilon^{m_\varepsilon-1}$. — Ebenso ist, wenn α' von α verschieden:

$$(4.)\qquad R_{\alpha'} = \chi'(u_\varepsilon) - \left[u_\varepsilon^{p_\varepsilon^{m_\varepsilon-1}(p_\varepsilon-2)} + u_\varepsilon^{p_\varepsilon^{m_\varepsilon-1}(p_\varepsilon-3)} + \cdots + u_\varepsilon^{p_\varepsilon^{m_\varepsilon-1}} + 1\right]\psi'(u_\varepsilon),$$

wo $\chi'(u_\varepsilon)$ und $\psi'(u_\varepsilon)$ respective eine ähnliche Bedeutung haben, wie $\chi(u_\varepsilon)$ und $\psi(u_\varepsilon)$. — Aus den am Schlusse der No. 2 der erwähnten Arbeit angestellten Betrachtungen ergiebt sich, wenn man der Kürze halber

$$u_\varepsilon^{p_\varepsilon^{m_\varepsilon-1}(p_\varepsilon-2)} + u_\varepsilon^{p_\varepsilon^{m_\varepsilon-1}(p_\varepsilon-3)} + \cdots + u_\varepsilon^{p_\varepsilon^{m_\varepsilon-1}} + 1 = C$$

setzt, dass $\chi(u_\varepsilon)$ mit $\chi'(u_\varepsilon)$ und $C\psi(u_\varepsilon)$ mit $C\psi'(u_\varepsilon)$ keine gemeinschaftliche Potenz von u_ε enthalten. Aber ebenso wenig kann $\chi(u_\varepsilon)$ mit $C\psi'(u_\varepsilon)$ oder $C\psi(u_\varepsilon)$ mit $\chi'(u_\varepsilon)$ eine solche Potenz gemeinschaftlich haben. Denn damit z. B. $C_\varepsilon\psi(u_\varepsilon)$ mit $\chi'(u_\varepsilon)$ eine gemeinschaftliche Potenz enthielte, müsste eine Gleichung folgender Art bestehen:

$$(5.)\qquad u_\varepsilon^{q^\alpha q^{xc_\varepsilon} - y p_\varepsilon^{m_\varepsilon-1}} = u_\varepsilon^{q^{\alpha'} \cdot q^{zc_\varepsilon}},$$

wo x, y, z ganze Zahlen sind, d. h. es müsste $q^{\alpha+xc_\varepsilon} \equiv q^{\alpha'+zc_\varepsilon} \bmod p_\varepsilon^{m_\varepsilon-1}$

sein, daher auch $q^{p_\varepsilon(\alpha-\alpha')+p_\varepsilon(x-z)c_\varepsilon} \equiv 1 \mod p_\varepsilon^{m_\varepsilon}$. Hieraus folgt

$$(6.)\quad (\alpha-\alpha')p_\varepsilon+(x-z)c_\varepsilon . p_\varepsilon \equiv 0 \mod \lambda_\varepsilon,$$

wo λ_ε die in der erwähnten Arbeit No. 3 ihm beigelegte Bedeutung hat. Aus (6.) folgt $(\alpha-\alpha')p_\varepsilon \equiv 0 \mod c_\varepsilon$, oder, da c_ε nicht durch p_ε theilbar ist, $\alpha \equiv \alpha' \mod c_\varepsilon$, gegen die Voraussetzung. —

Da nun bewiesen ist, dass in der Gleichung (2.) die Grössen R_α für Werthe von α, die incongruent sind mod c_ε, keine gemeinschaftliche Potenz von u_ε enthalten, so müssen nach einem Satze von *Kronecker* (*Liouvilles* Journal B. 19) die Grössen X_α für alle Werthe von α, auf welche sich die Summation in (1.) bezieht, verschwinden.

Mit Hülfe dieses Lemma wird der Satz am Schlusse meiner erwähnten Arbeit, der die Bedingungen für das Verschwinden einer Periode enthält, folgendermassen bewiesen.

Die Allgemeinheit des Beweises wird nicht beeinträchtigt, wenn wir der Uebersichtlichkeit wegen $n = p_0^{m_0} p_1^{m_1} p_2^{m_2} p_3^{m_3}$ annehmen, und zwar sei $p_0 > p_1 > p_2 > p_3$. Ist s_0 primitive Wurzel der Gleichung $x^{n_0} = 1$, wo $n_0 = p_1^{m_1} p_2^{m_2} p_3^{m_3}$, so folgt aus den Gleichungen (3.) und (4.) der No. 3 der a. A.

$$(7.)\quad \sum_0^{c_0-1}{}_\alpha \left(s_0^{q^\alpha}, q^{c_0}\right)\left(u_0^{q^\alpha}, q^{c_0}\right) = \pi_1,$$

Soll daher π_1 verschwinden, so muss nach dem obigen Lemma entweder $\left(u_0^{q^\alpha}, q^{c_0}\right) = 0$, oder $\left(s_0^{q^\alpha}, q^{c_0}\right) = 0$ sein, und zwar nach einem Satze in No. 1 der a. A. für jeden Werth von α. Findet ersteres nicht statt, so hat man also die Gleichung

$$(8.)\quad \left(s_0^{q^\alpha}, q^{c_0}\right) = 0.$$

Es sei der grösste gemeinschaftliche Theiler von c_0 und λ_1 gleich β; von c_0 oder λ_0 und (λ_2, λ_3) gleich γ; von $\frac{\lambda_1}{\beta}$ und $\frac{(\lambda_2, \lambda_3)}{\gamma}$ gleich δ, so ist die Gleichung (8.) gleichbedeutend mit der folgenden:

$$(9.)\quad \sum_0^{\delta-1}{}_\alpha \left(s_{01}^{q^{\alpha c_0}}, q^{\delta c_0}\right)\left(u_1^{q^{\alpha c_0}}, q^{\delta c_0}\right) = 0.$$

Diese wird ebenso wie die Gleichung (7.) hergeleitet, wenn $n_{01} = p_2^{m_2} p_3^{m_3}$ und s_{01} primitive Wurzel der Gleichung $x^{n_{01}} = 1$ ist. Aus derselben folgt nach dem obigen Lemma, dass entweder $\left(u_1^{q^{\alpha c_0}}, q^{\delta c_0}\right) = 0$, oder $\left(s_{01}^{q^{\alpha c_0}}, q^{\delta c_0}\right)$ für alle Werthe von α. — Nun aber ist der grösste gemeinschaftliche

Theiler von λ_1 und $(\lambda_0, \lambda_2, \lambda_3)$ gleich dem von λ_1 und $\lambda_0\frac{(\lambda_2,\lambda_3)}{\gamma}$, gleich dem von $\frac{\lambda_1}{\beta\delta}\cdot\beta\delta$ und $\frac{\lambda_0}{\beta}\cdot\beta\delta\cdot\frac{(\lambda_2,\lambda_3)}{\gamma\delta}$, gleich $\beta\delta$. Aber andererseits ist der grösste gemeinschaftliche Theiler von λ_1 und $(\lambda_0, \lambda_2, \lambda_3)$ gleich c_1, demnach ist $c_1 = \beta\delta$. Es ist aber $q^{c_0\delta} = q^{\frac{c_0}{\beta}\cdot\beta\delta}$, und der Exponent, zu dem $q^{c_0}(\mathrm{mod} p_1^{m_1})$ gehört, gleich $\frac{\lambda_1}{\beta} = \frac{\lambda_1}{\beta\delta}\cdot\delta$, daher ist nach der Gleichung (3.) in No. 3 der a. A. $\left(u_1^{q^{\alpha c_0}}, q^{\delta c_0}\right) = \left(u_1^{q^{\alpha c_0}}, q^{c_1}\right)$. — Ferner ist $\frac{(\lambda_2,\lambda_3)}{\gamma}$ der Exponent, zu dem q^{c_0} $(\mathrm{mod}\, n_{01})$ gehört, und der grösste gemeinschaftliche Theiler von $\frac{(\lambda_2,\lambda_3)}{\gamma}\cdot\gamma$ und $\frac{\lambda_0}{\beta}\cdot\frac{\lambda_1}{\beta}\cdot\beta$ gleich dem von $\frac{(\lambda_2,\lambda_3)}{\gamma}\cdot\gamma$ und $\frac{\lambda_0}{\gamma}\cdot\frac{\lambda_1}{\beta}\gamma$, gleich dem von $\frac{(\lambda_2,\lambda_3)}{\gamma\delta}\cdot\gamma\delta$ und $\frac{\lambda_0}{\gamma}\cdot\frac{\lambda_1}{\beta\delta}\cdot\gamma\delta$, gleich $\gamma\delta$. Bezeichnet man also den grössten gemeinschaftlichen Theiler von (λ_0, λ_1) und (λ_2, λ_3) mit r_{01}, so hat man $r_{01} = \gamma\delta$. Ferner ist $q^{\delta c_0} = q^{\frac{c_0}{\gamma}\cdot\gamma\delta} = q^{\frac{c_0}{\gamma}\cdot r_{01}}$ und $\frac{(\lambda_2,\lambda_3)}{\gamma} = \frac{(\lambda_2,\lambda_3)}{\gamma\delta}\cdot\gamma\delta = \frac{(\lambda_2,\lambda_3)}{\gamma\delta}\cdot r_{01}$. Daher ist nach der Gleichung (3.) in No. 3 der a. A. $\left(s_{01}^{q^{\alpha c_0}}, q^{\delta c_0}\right) = \left(s_{01}^{q^{\alpha c_0}}, q^{r_{01}}\right)$. — Mithin ist entweder $\left(u_1^{q^{\alpha c_0}}, q^{c_1}\right) = 0$, oder

$$(10.)\qquad \left(s_{01}^{q^{\alpha c_0}}, q^{r_{01}}\right) = 0.$$

Es sei nunmehr der grösste gemeinschaftliche Theiler von λ_2 und r_{01} gleich β', so gehört $q^{r_{01}}$ $\left(\mathrm{mod} p_2^{m_2}\right)$ zum Exponenten $\frac{\lambda_2}{\beta'}$; und wenn der grösste gemeinschaftliche Theiler von λ_3 und r_{01} gleich γ' ist, so gehört $q^{r_{01}}$ $\left(\mathrm{mod} p_3^{m_3}\right)$ zum Exponenten $\frac{\lambda_3}{\gamma'}$. Endlich sei der grösste gemeinschaftliche Theiler von $\frac{\lambda_2}{\beta'}$ und $\frac{\lambda_3}{\gamma'}$ gleich δ', so ist die Gleichung (10.) gleichbedeutend mit der folgenden:

$$(11.)\qquad \sum_{0}^{\delta'-1}{}_{\alpha}\left(u_3^{q^{\alpha r_{01}}}, q^{\delta' r_{01}}\right)\left(u_2^{q^{\alpha r_{01}}}, q^{\delta' r_{01}}\right) = 0.$$

Hieraus folgt nach dem obigen Lemma, dass entweder $\left(u_2^{q^{\alpha r_{01}}}, q^{\delta' r_{01}}\right) = 0$ oder $\left(u_3^{q^{\alpha r_{01}}}, q^{\delta' r_{01}}\right) = 0$, für alle Werthe von α. — Nun aber ist der grösste gemeinschaftliche Theiler von λ_2 und r_{01}, gleich dem von (λ_0, λ_1) und λ_2;

ferner der grösste gemeinschaftliche Theiler von λ_3 und r_{01}, gleich dem von λ_3 und (λ_0, λ_1); daher ist der grösste gemeinschaftliche Theiler von λ_2 und $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_3)$ gleich dem von λ_2 und $(\lambda_0, \lambda_1)\cdot\frac{\lambda_3}{\gamma'}$, gleich dem von $\frac{\lambda_2}{\beta'}\cdot\beta'$ und $\frac{(\lambda_0, \lambda_1)}{\beta'}\cdot\frac{\lambda_3}{\gamma'}\cdot\beta'$, gleich dem von $\frac{\lambda_2}{\beta'\delta'}\cdot\beta'\delta'$ und $\frac{(\lambda_0, \lambda_1)}{\beta'}\cdot\frac{\lambda_3}{\gamma'\delta'}\cdot\beta'\delta'$, gleich $\beta'\delta'$; daher ist $c_2 = \beta'\delta'$. Nun ist $\lambda_2 = \frac{\lambda_2}{\beta'\delta'}\cdot\beta'\delta'$, $r_{01} = \frac{r_{01}}{\beta'}\cdot\beta'$, $q^{\delta' r_{01}} = q^{\beta'\delta'\cdot\frac{r_{01}}{\beta'}} = q^{\frac{r_{01}}{\beta'}\cdot c_2}$. Daher ist nach der Gleichung (3.) in No. 3 in der a. A. $\left(u_2^{q^{\alpha r_{01}}}, q^{\delta' r_{01}}\right) = \left(u_2^{q^{\alpha r_{01}}}, q^{c_2}\right)$. — Ferner ist der grösste gemeinschaftliche Theiler von λ_3 und $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ gleich dem von λ_3 und $(\lambda_0, \lambda_1)\cdot\frac{\lambda_2}{\beta'}$, gleich dem von $\frac{\lambda_3}{\gamma'}\cdot\gamma'$ und $\frac{(\lambda_0, \lambda_1)}{\gamma'}\cdot\frac{\lambda_2}{\beta'}\cdot\gamma'$, gleich dem von $\frac{\lambda_3}{\gamma'\delta'}\cdot\gamma'\delta'$ und $\frac{(\lambda_0, \lambda_1)}{\gamma'}\cdot\frac{\lambda_2}{\beta'\delta'}\cdot\gamma'\delta'$, gleich $\gamma'\delta'$, daher ist $c_3 = \gamma'\delta'$. Nun aber ist $\lambda_3 = \frac{\lambda_3}{\gamma'\delta'}\cdot\gamma'\delta'$, $r_{01} = \frac{r_{01}}{\gamma'}\cdot\gamma'$, $q^{\delta' r_{01}} = q^{\gamma'\delta'\cdot\frac{r_{01}}{\gamma'}} = q^{\frac{r_{01}}{\gamma'}\cdot c_3}$, daher ist nach der Gleichung (3.) in No. 3 der a. A. $\left(u_3^{q^{\alpha r_{01}}}, q^{\delta' r_{01}}\right) = \left(u_3^{q^{\alpha r_{01}}}, q^{c_3}\right)$.

Damit also π_1 verschwinde, muss eine der folgenden vier Gleichungen erfüllt werden

$$(12.)\qquad (u_0, q^{c_0}) = 0,\quad (u_1, q^{c_1}) = 0,\quad (u_2, q^{c_2}) = 0,\quad (u_3, q^{c_3}) = 0,$$

und hieraus ergiebt sich unmittelbar der am Schlusse der a. A. aufgestellte Satz. -

In der No. 4 der a. A. war ferner zu zeigen, dass zwei formal verschiedene Perioden derselben Gruppe nur dann gleich sein können, wenn sie verschwinden. -- Man kann sich beim Beweise offenbar auf primitive Perioden beschränken (s. d. a. A.). Es seien π_1 und π_r irgend zwei primitive Perioden, und es werde angenommen, dass

$$(13.)\qquad \pi_1 = \pi_r.$$

Nach der Gleichung (7.) ist diese Gleichung identisch mit der folgenden:

$$(14.)\qquad \sum_{\alpha=0}^{c_0-1}\left[\left(s_0^{q^\alpha}, q^{c_0}\right)\left(u_0^{q^\alpha}, q^{c_0}\right) - \left(s_0^{rq^\alpha}, q^{c_0}\right)\left(u_0^{rq^\alpha}, q^{c_0}\right)\right] = 0.$$

Aus den im Beweise des obigen Lemma angestellten Betrachtungen geht her-

vor, dass, wenn man $\left(u_0^{q^a}, q^{c_0}\right)$ und $\left(u_0^{rq^a}, q^{c_0}\right)$ so reducirt, dass nur niedrigere Potenzen von u_0 als die $p_0^{m_0-1}(p_0-1)^{te}$ übrig bleiben, und die reducirten Ausdrücke respective mit R_a und S_a bezeichnet, für zwei verschiedene Werthe von a weder zwei der Grössen R noch zwei der Grössen S unter sich eine gemeinschaftliche Potenz von u_0 enthalten. Hätte nun auch kein R mit einem S eine Potenz von u_0 gemeinschaftlich, so erforderte die Irreductibilität der Gleichung der primitiven Wurzeln im erweiterten Sinne (s. die o. a. Abhandlung von *Kronecker*), dass die aus den Wurzeln der Gleichung $x^{\lambda_0} = 1$ gebildeten Perioden (z_0, q^{c_0}) verschwinden, wodurch auch nach Gleichung (7.) $\pi_1 = 0$ wird. Enthielte aber eine der Grössen R mit einer der Grössen S eine gemeinschaftliche Potenz von u_0, so käme diese weder in einem anderen R noch in einem anderen S vor, daher müssten in Folge der Irreductibilität zwei mit z_0 gebildete Perioden einander gleich sein. Geht man von dieser letzteren Gleichheit aus und verfährt mit derselben wie mit der Gleichung (13.), so findet man, dass entweder eine mit z_{01} gebildete Periode, also auch π_1 verschwindet, oder dass zwei mit z_{01} gebildete Perioden einander gleich werden. Fährt man so fort, so ergiebt sich schliesslich, dass die Gleichung (13.) nur bestehen kann, wenn die primitiven Perioden verschwinden.

Berlin, im Februar 1864.

Berichtigung.

S. 75 Z. 12 v. o. statt r lies f.

Recherche des points à l'infini sur les surfaces algébriques.

Première Partie.

(Par M. *L. Painvin* à Douai.)

Quelques uns des résultats que nous allons signaler pourraient se déduire des notions connues sur les plans tangents en des points à distance finie, en appliquant à ces cas le principe de continuité; mais, indépendamment de l'importance d'une étude directe au point de vue logique, la méthode analytique que j'expose permet d'examiner dans tous ses détails et ses variétés la nature du contact des plans tangents à l'infini, et de discuter les nombreuses particularités des points multiples à l'infini. Or, dans une foule de circonstances, le mode de déduction que j'ai indiqué d'abord serait ou impuissant ou peu satisfaisant.

Ce mémoire est divisé en deux parties dont je ne publie dans ce moment que la première; elle comprend deux paragraphes respectivement consacrés: le premier, à l'étude des points simples à l'infini; le second, à l'étude des points doubles. La seconde partie sera consacrée à la recherche des propriétés fondamentales de la surface asymptote.

---

§. I.

Points simples à l'infini.

I. Recherche des points simples à l'infini.

1. En représentant par $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$, $\frac{z}{t}$, les coordonnées d'un point, on pourra écrire comme il suit l'équation d'une surface

$$(1.)\ (U)\qquad \varphi_m(x,y,z)+t\varphi_{m-1}(x,y,z)+t^2\varphi_{m-2}(x,y,z)+\cdots+t^m\varphi_0 = 0,$$

φ_i étant une fonction homogène de degré i des variables x, y, z.

L'équation du *plan à l'infini* est

$$t = 0;$$

or, en faisant $t=0$ dans l'équation (1.), nous obtenons

$$(2.)\ (C)\qquad \varphi_m(x,y,z) = 0;$$

donc les points à l'infini sur la surface sont sur des droites parallèles aux génératrices du cône (C) ou (2.) que j'appellerai *cône des directions asymptotiques*.

Considérons une génératrice quelconque de ce cône

$$\text{(3.)}\quad (G)\qquad \frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma},\quad \varphi_m(\alpha,\beta,\gamma)=0;$$

le point à l'infini correspondant situé sur la surface sera

$$\text{(4.)}\quad (I)\qquad \begin{cases}\dfrac{x}{\alpha}=\dfrac{y}{\beta}=\dfrac{z}{\gamma},\\ t=0.\end{cases}$$

Les équations d'une droite quelconque passant par le point I (droite nécessairement parallèle à la génératrice G) peuvent se mettre sous la forme

$$\text{(5.)}\quad (G')\qquad \begin{cases}x=\alpha\varrho+\lambda t,\\ y=\beta\varrho+\mu t, \qquad \varphi_m(\alpha,\beta,\gamma)=0,\\ z=\gamma\varrho+\nu t,\end{cases}$$

λ, μ, ν, étant des indéterminées. Ces équations représentent en effet une droite, car elles donnent

$$\frac{x-\lambda t}{\alpha}=\frac{y-\mu t}{\beta}=\frac{z-\nu t}{\gamma};$$

cette droite passe par le point I et par le point $\left(\frac{x}{t}=\lambda,\ \frac{y}{t}=\mu,\ \frac{z}{t}=\nu\right)$; elle est évidemment parallèle à la génératrice G; la quantité ϱ est proportionelle à la distance du point (λ,μ,ν) au point (x,y,z).

2. Cherchons la condition pour que la droite G' rencontre la surface en deux points coincidant en I c. à. d. pour que la droite G' touche la surface à l'infini.

Remplaçons x, y, z par leurs valeurs (5.) dans l'équation (1.); en développant et en adoptant la notation symbolique connue, on trouve

$$\text{(6.)}\quad \left\{\begin{array}{l}
\varrho^m\varphi_m(\alpha,\beta,\gamma)\\
+\varrho^{m-1}t\left[\lambda\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha}+\mu\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial\beta}+\nu\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial\gamma}+\varphi_{m-1}(\alpha,\beta,\gamma)\right]\\
+\varrho^{m-2}t^2\left[\dfrac{1}{1.2}\left\{\lambda\dfrac{\partial}{\partial\alpha}+\mu\dfrac{\partial}{\partial\beta}+\nu\dfrac{\partial}{\partial\gamma}\right\}^2\varphi_m+\dfrac{1}{1}\left\{\lambda\dfrac{\partial}{\partial\alpha}+\mu\dfrac{\partial}{\partial\beta}+\nu\dfrac{\partial}{\partial\gamma}\right\}\varphi_{m-1}+\varphi_{m-2}(\alpha,\beta,\gamma)\right]\\
+\varrho^{m-3}t^3\left[\dfrac{1}{1.2.3}\left\{\lambda\dfrac{\partial}{\partial\alpha}+\mu\dfrac{\partial}{\partial\beta}+\nu\dfrac{\partial}{\partial\gamma}\right\}^3\varphi_m+\dfrac{1}{1.2}\left\{\lambda\dfrac{\partial}{\partial\alpha}+\mu\dfrac{\partial}{\partial\beta}+\nu\dfrac{\partial}{\partial\gamma}\right\}^2\varphi_{m-1}+\right.\\
\qquad\qquad\left.+\dfrac{1}{1}\left\{\lambda\dfrac{\partial}{\partial\alpha}+\mu\dfrac{\partial}{\partial\beta}+\nu\dfrac{\partial}{\partial\gamma}\right\}\varphi_{m-2}+\varphi_{m-3}(\alpha,\beta,\gamma)\right]\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
+\varrho^{m-i}t^i\left[\dfrac{1}{1.2\ldots i}\left\{\lambda\dfrac{\partial}{\partial\alpha}+\mu\dfrac{\partial}{\partial\beta}+\nu\dfrac{\partial}{\partial\gamma}\right\}^i\varphi_m+\dfrac{1}{1.2\ldots(i-1)}\left\{\lambda\dfrac{\partial}{\partial\alpha}+\mu\dfrac{\partial}{\partial\beta}+\nu\dfrac{\partial}{\partial\gamma}\right\}^{i-1}\varphi_{m-1}+\cdots\right.\\
\qquad\qquad\left.+\dfrac{1}{1}\left\{\lambda\dfrac{\partial}{\partial\alpha}+\mu\dfrac{\partial}{\partial\beta}+\nu\dfrac{\partial}{\partial\gamma}\right\}\varphi_{m-i+1}+\varphi_{m-i}(\alpha,\beta,\gamma)\right]\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right\}=0.$$

Le premier terme $\varphi_m(\alpha,\beta,\gamma)$ est nul si la droite G' est parallèle à la génératrice G; pour que la droite G' touche la surface, il faut que le premier membre de l'équation (6.) soit divisible par t^2, ce qui donne la condition

$$(7.)\qquad \lambda\frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha}+\mu\frac{\partial\varphi_m}{\partial\beta}+\nu\frac{\partial\varphi_m}{\partial\gamma}+\varphi_{m-1}(\alpha,\beta,\gamma) = 0.$$

Il y a donc une infinité de droites G' parallèles à la génératrice G et touchant la surface à l'infini; le lieu de ces droites s'obtiendra en éliminant les indéterminées λ, μ, ν entre les équations (5.) et (7.).

En ayant égard à la relation

$$(8.)\qquad \alpha\frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha}+\beta\frac{\partial\varphi_m}{\partial\beta}+\gamma\frac{\partial\varphi_m}{\partial\gamma} = m\varphi_m(\alpha,\beta,\gamma) = 0,$$

on trouve, après cette élimination,

$$(9.)\ (P)\qquad x\frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha}+y\frac{\partial\varphi_m}{\partial\beta}+z\frac{\partial\varphi_m}{\partial\gamma}+t\varphi_{m-1}(\alpha,\beta,\gamma) = 0,$$

avec la condition

$$(9^{\text{bis}}.)\qquad \varphi_m(\alpha,\beta,\gamma) = 0;$$

c'est l'équation d'un plan, lequel touche la surface au point I à l'infini; je lui donnerai le nom de *plan asymptote.*

Il est facile de vérifier que l'équation du plan asymptote se déduit de celle du plan tangent en un point à distance finie.

Le plan asymptote est aussi le *plan diamétral* des cordes parallèles à la génératrice G; et ici, comme dans les surfaces du second ordre, ce *plan diamétral singulier* est parallèle à ses cordes; ceci résulte évidemment de la relation (8.).

3. Remarque I. Le plan asymptote est parallèle au plan touchant le cône des directions asymptotiques suivant la génèratrice G; car l'équation de ce dernier plan est

$$x\frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha}+y\frac{\partial\varphi_m}{\partial\beta}+z\frac{\partial\varphi_m}{\partial\gamma} = 0,\ \text{avec la condition}\ \varphi_m(\alpha,\beta,\gamma) = 0.$$

Remarque II. Toutes les droites parallèles à la génératrice G et situées dans le plan P touchent la surface à l'infini. C'est la propriété ordinaire des plans tangents: toutes les droites situées dans un plan tangent et passant par le point de contact y rencontrent, en ce point, la surface en deux points coincidents. Dans le cas actuel, le point de contact I est à l'infini, donc toutes les tangentes sont parallèles entre elles; elles sont, en outre, parallèles à la génératrice du cône qui détermine le point à l'infini considéré.

Remarque III. Dans un plan tangent ordinaire, le point de contact est un point double de la section de la surface par ce plan, et les tangentes en ce point double (dites *tangentes inflexionnelles*) rencontrent, en ce point, la surface en trois points coincidents.

Pour obtenir, dans le cas présent, les tangentes inflexionnelles, il faut exprimer que le premier membre de l'équation (6.) est divisible par t^3, ce qui conduit à la relation

$$(10.)\quad \begin{cases} \lambda^2\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha^2}+\mu^2\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta^2}+\nu^2\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma^2}+2\lambda\mu\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\,\partial\beta}+2\lambda\nu\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\,\partial\gamma}+2\mu\nu\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\,\partial\gamma} \\ \quad +2\left(\lambda\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\alpha}+\mu\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\beta}+\nu\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\gamma}\right)+2\varphi_{m-2}(\alpha,\beta,\gamma)=0. \end{cases}$$

Si, à l'aide des relations (5.), nous éliminons les indéterminées λ, μ, ν, on aura l'équation de la surface sur laquelle se trouvent les tangentes inflexionnelles. En ayant égard aux relations (7.) et (8.) et aux identités qui caractérisent une fonction homogène $f(\alpha,\beta,\gamma)$ du degré n, savoir:

$$(11.)\quad \begin{cases} \alpha\frac{\partial f}{\partial\alpha}+\beta\frac{\partial f}{\partial\beta}+\gamma\frac{\partial f}{\partial\gamma}=nf(\alpha,\beta,\gamma), \\ \alpha^2\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}+\beta^2\frac{\partial^2 f}{\partial\beta^2}+\gamma^2\frac{\partial^2 f}{\partial\gamma^2}+2\alpha\beta\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\,\partial\beta}+2\alpha\gamma\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\,\partial\gamma}+2\beta\gamma\frac{\partial^2 f}{\partial\beta\,\partial\gamma} \\ \qquad =n(n-1)f(\alpha,\beta,\gamma), \end{cases}$$

on trouve pour l'équation de la surface cherchée

$$(12.)\ (S)\quad \begin{cases} x^2\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha^2}+y^2\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta^2}+z^2\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma^2}+2xy\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\,\partial\beta}+2xz\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\,\partial\gamma}+2yz\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\,\partial\gamma} \\ \quad +2t\left(x\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\alpha}+y\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\beta}+z\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\gamma}\right)+2t^2\varphi_{m-2}(\alpha,\beta,\gamma)=0. \end{cases}$$

On vérifie aisément, que la surface S est la polaire du second ordre du point à l'infini $\left(\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma},\ t=0\right)$ ou la surface diamétrale du second ordre correspondant aux cordes parallèles à la droite G.

L'intersection de cette surface par le plan asymptote P donne les droites qui rencontrent la surface en I, à l'infini, en trois points coincidents c. a. d. les *tangentes inflexionnelles* correspondant à un point de contact à l'infini.

Nous allons constater que le plan P coupe en effet la surface S suivant deux droites parallèles.

Le cône asymptote de la surface S est parallèle au cône

$$x^2\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha^2}+y^2\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta^2}+z^2\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma^2}+2xy\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\,\partial\beta}+2xz\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\,\partial\gamma}+2yz\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\,\partial\gamma}=0;$$

on voit d'abord que la génératrice $G\left(\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}\right)$ est sur ce cône, et que le point à l'infini I est sur la surface S; ceci résulte immédiatement des relations (8.) et (11.). Maintenant le plan tangent en I à la surface S a pour équation

$$\left.\begin{array}{l} x\left(\alpha\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha^2}+\beta\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\beta}+\gamma\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\gamma}\right)+y\left(\alpha\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\partial\alpha}+\beta\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta^2}+\gamma\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\partial\gamma}\right) \\ +z\left(\alpha\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma\partial\alpha}+\beta\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma\partial\beta}+\gamma\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma^2}\right)+t\left(\alpha\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\alpha}+\beta\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\beta}+\gamma\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\gamma}\right)\end{array}\right\} = 0,$$

équation qui se réduit à

$$x\frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha}+y\frac{\partial\varphi_m}{\partial\beta}+z\frac{\partial\varphi_m}{\partial\gamma}+t\varphi_{m-1}(\alpha,\beta,\gamma) = 0;$$

c'est celle du plan P. Ainsi le plan asymptote P touche la surface S au point I à l'infini; il est donc tangent au cône asymptote de S, et, par suite, coupe cette surface suivant deux droites parallèles à la génératrice de contact avec le cône asymptote, c. à. d. à la droite G. D'où:

La courbe d'intersection de la surface proposée U par un plan asymptote P a un point double à l'infini; les deux tangentes en ce point double sont les intersections de la surface S par le plan P; ces deux droites sont dites tangentes inflexionnelles.

Cette dernière dénomination est justifiée par la seconde des propriétés suivantes:

Un plan quelconque passant par le point I à l'infini c. à. d. parallèle à la droite G coupe la surface U suivant une courbe passant par le point I et ayant pour asymptote en I l'intersection du plan asymptote par le plan sécant.

Un plan quelconque passant par une des tangentes inflexionnelles coupe la surface suivant une courbe ayant un point d'inflexion en I à l'infini; la tangente d'inflexion est la tangente inflexionnelle considérée.

Je n'insisterai pas sur la première propriété; quant à la seconde, elle peut se démontrer ainsi:

Prenons la tangente inflexionnelle pour axe des z, c. à. d. exprimons que l'axe des z appartient au plan asymptote P et à la surface S, on trouve alors que les fonctions φ_m, φ_{m-1}, φ_{m-2}, doivent être de la forme

$$\begin{aligned} \varphi_m &= \cdots+z^{m-1}(Ax+By), \\ \varphi_{m-1} &= \cdots+z^{m-2}(A_1x+B_1y), \\ \varphi_{m-2} &= \cdots+z^{m-3}(A_2x+B_2y), \end{aligned}$$

en ordonnant ces fonctions par rapport aux puissances croissantes de z. Or l'intersection de la surface U par le plan xz ou $y=0$ (qu'on peut regarder comme un plan quelconque passant par la tangente inflexionnelle) a pour équation

$$(ax^m+\cdots+Axz^{m-1})+t(a_1x^{m-1}+\cdots+A_1xz^{m-2})+t^2(a_2x^{m-2}+\cdots+A_2xz^{m-3})+\cdots=0;$$

la droite $x=0$, c. à. d. l'axe des z, est évidemment une tangente d'inflexion au point I à l'infini, car ce point est, dans le cas général, un point simple. (Voir, pour l'étude des points à l'infini dans les courbes algébriques, les N[elles] Annales de M. M. *Gerono* et *Rouhet*, année 1864.)

Remarque IV. Lorsque le cône des directions asymptotiques est imaginaire, il n'y a pas de points réels à l'infini sur la surface U.

Si la génératrice $G\left(\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}\right)$ est une génératrice réelle de ce cône, le plan asymptote correspondant sera réel, mais les tangentes inflexionnelles peuvent ne pas être réelles. Ces tangentes seront réelles, si la surface S est un hyperboloïde à une nappe, ou un cône réel, ou un paraboloïde hyperbolique, ou un cylindre hyperbolique; elles seront imaginaires, si la surface S est un ellipsoïde réel ou imaginaire, ou un paraboloïde elliptique ou un cylindre elliptique. Dans le premier cas, le plan asymptote P coupe la surface U suivant une courbe ayant un point double non isolé à l'infini, c. à. d. ayant des branches infinies réelles; dans le second cas, le point double à l'infini est isolé.

Remarque V. *La surface formée par les tangentes inflexionnelles qui correspondent aux points à l'infini est, en général, de l'ordre* $m(3m-4)$.

Le lieu des tangentes inflexionnelles s'obtiendra en éliminant α, β, γ entre les équations (12.) et (9.), c. à. d.

$$(13.)\quad \begin{cases} x^2\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha^2}+y^2\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta^2}+\cdots+2t^2\varphi_{m-2}(\alpha,\beta,\gamma) = 0,\\ x\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha}+y\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial\beta}+z\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial\gamma}+t\varphi_{m-1}(\alpha,\beta,\gamma) = 0,\\ \varphi_m(\alpha,\beta,\gamma) = 0.\end{cases}$$

Or, lorsqu'entre trois équations homogènes par rapport à trois variables et des degrés respectifs m_1, n_1, p_1, on élimine ces variables, le résultat de l'élimination est du degré n_1p_1 par rapport aux coefficients de la première de ces èquations; du degré m_1p_1, par rapport à ceux de la seconde; et du degré m_1n_1, par rapport à ceux de la troisième. Dans le cas actuel, on a

$$m_1=m-2,\quad n_1=m-1,\quad p_1=m;$$

en outre, les coefficients de la première équation sont du second degré par rapport aux variables x, y, z; ceux de la seconde sont du premier degré; et ceux de la troisième, du degré zéro. Donc le résultat de l'élimination sera, en x, y, z, du degré

$$2n_1p_1+1.m_1p_1+0.m_1n_1 = 2m(m-1)+m(m-2),$$

c. à. d. du degré

$$m(3m-4).$$

L'équation de cette surface ne dépend que des coefficients des fonctions φ_m, φ_{m-1}, φ_{m-2}; donc la surface, lieu des tangentes inflexionnelles pour les points à l'infini, sera la même pour toutes les surfaces

$$\varphi_m(x,y,z)+t\varphi_{m-1}(x,y,z)+t^2\varphi_{m-2}(x,y,z)+t^3F_{m-3}(x,y,z,t) = 0,$$

$F_{m-3}(x,y,z,t)$ étant une fonction arbitraire homogène du degré $(m-3)$.

Remarque VI. Dans le cas des surfaces du second ordre, le cône C est parallèle au cône asymptote, et la surface S n'est autre que la surface elle même. Les tangentes inflexionnelles sont alors les deux géneratrices parallèles suivant lesquelles le plan asymptote ou plan tangent au cône asymptote coupe la surface; la courbe de section, qui est du second degré et a un point double à l'infini doit se réduire à deux droites parallèles. La formule précédente n'est plus applicable ici, car la première des équations (13.) est indépendante des variables α, β, γ.

Dans le cas des surfaces du troisième ordre, le lieu des tangentes inflexionnelles est de l'ordre 3.5 ou 15, en général; cette dernière surface reste la même pour toutes les surfaces

$$\varphi_3(x,y,z)+t\varphi_2(x,y,z)+t^2\varphi_1(x,y,z)+kt^3 = 0,$$

où k est une constante arbitraire.

II. Discussion des points simples à l'infini.

4. Supposons que la surface S se réduise à un cône, c. à. d. qu'on ait l'équation de condition

$$(14.)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha^2} & \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\,\partial\beta} & \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\,\partial\gamma} & \frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\alpha} \\ \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\,\partial\alpha} & \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta^2} & \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\,\partial\gamma} & \frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\beta} \\ \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma\,\partial\alpha} & \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma\,\partial\beta} & \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma^2} & \frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\gamma} \\ \frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\alpha} & \frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\beta} & \frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\gamma} & 2\varphi_{m-2}(\alpha,\beta,\gamma) \end{vmatrix} = 0;$$

alors les deux tangentes inflexionnelles se confondent; la courbe d'intersection de la surface U par le plan P a un point de rebroussement à l'infini et la tangente de rebroussement est la génératrice de contact du plan P avec le cône S.

Dans ce cas, les indéterminées α, β, γ, vérifient les deux équations homogènes

$$\varphi_m(\alpha,\beta,\gamma) = 0, \quad \Delta = 0;$$

la première est du degré m; la seconde du degré $4(m-2)$; par suite, le nombre des solutions communes est égal à $4m(m-2)$; donc

Sur une surface d'ordre m, il y a, en général, $4m(m-2)$ points à l'infini pour lesquels le plan tangent coupe la surface suivant une courbe ayant un point de rebroussement à l'infini; la tangente de rebroussement, laquelle est parallèle à la direction asymptotique, n'est pas à l'infini.

5. Il peut arriver que la surface S soit un paraboloïde; ceci a lieu lorsque

$$(15.)\qquad H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha^2} & \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\,\partial\beta} & \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\,\partial\gamma} \\ \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\,\partial\alpha} & \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta^2} & \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\,\partial\gamma} \\ \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma\,\partial\alpha} & \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma\,\partial\beta} & \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma^2} \end{vmatrix} = 0;$$

les plans directeurs du paraboloïde sont donnés par l'équation

$$x^2\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha^2} + y^2\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta^2} + z^2\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma^2} + 2xy\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\,\partial\beta} + 2xz\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\,\partial\gamma} + 2yz\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\,\partial\gamma} = 0.$$

La génératrice G est parallèle à l'un des plans directeurs; et le plan P, qui est en même temps un plan asymptote du paraboloïde (remarq. III), doit être parallèle au même plan directeur; il coupe donc le paraboloïde suivant deux droites dont l'une est à l'infini; et une seule de ces droites est à l'infini, car les deux ne pourraient être à l'infini que si le plan P était lui-même à

l'infini. Or ceci ne peut avoir lieu que si la direction asymtotique G est parallèle à l'axe du paraboloïde; et, comme nous le verrons plus loin, cette dernière hypothèse exige, outre la relation (15.), d'autres conditions.

Dans le cas présent, les indéterminées α, β, γ, vérifient les deux équations homogénes

$$\varphi_m(\alpha,\beta,\gamma)=0, \quad H=0;$$

la première est du degré m; la seconde, du degré $3(m-2)$; par suite, le nombre des solutions communes est égal à $3m(m-2)$; donc

Sur une surface d'ordre m il y a $3m(m-2)$ *points à l'infini pour lesquels une des tangentes inflexionnelles et une seule est à l'infini, parallélement à la direction asymptotique;* c. à. d. que le plan asymptote correspondant à un de ces points coupe la surface suivant une courbe ayant un point double à l'infini dont une des tangentes est à l'infini; ce qui revient à dire que, des deux branches infinies correspondant à ce point double, l'une est hyperbolique et l'autre parabolique.

Il est bon de remarquer que les *directions asymptotiques* correspondant à ces points sont les $3m(m-2)$ *arêtes d'inflexion* du cône C; car, nous le verrons plus loin, l'équation de condition (15.) est précisément celle qui détermine les arêtes d'inflexion du cône C.

Observation. Jusqu'à présent nous sommes restés dans le cas d'une équation générale de degré m, c. à. d. que nous n'avons supposé aucune relation entre les coefficients de cette équation. Nous allons maintenant examiner différents cas particuliers qui peuvent se présenter et qui entrainent l'existence de une ou plusieurs relations entre les coefficients de l'équation de la surface U.

6. Supposons que les quantités α, β, γ satisfassent aux relations (14.) et (15.), c. à. d.

$$H=0, \quad \triangle=0,$$

lesquelles jointes à la relation

$$\varphi_m(\alpha,\beta,\gamma) = 0,$$

donnent trois équations homogènes entre ces indéterminées; ceci n'aura donc pas lieu en général. Admettons néanmoins que ces trois équations aient une ou plusieurs solutions communes, et voyons la particularité que présentera alors la surface U.

Pour cette solution commune, la surface S devient un cylindre du

second degré elliptique ou hyperbolique; la droite $G\left(\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}\right)$ est une direction asymptotique du cylindre, et le plan P est un des *deux plans asymptotes* de ce cylindre (on sait que dans un cylindre elliptique ou hyperbolique tous les plans tangents à l'infini se confondent avec l'un ou l'autre des deux plans asymptotes proprement dits); la génératrice de contact se compose de deux droites coincidentes et à l'infini; donc

Dans ce cas particulier, le plan asymptote P coupe la surface U suivant une courbe ayant un point de rebroussement à l'infini, la tangente de rebroussement est elle-même à l'infini parallèlement à la direction asymptotique considérée (α, β, γ).

Si la surface S était un cylindre elliptique, le plan asymptote serait imaginaire, ce qui ne peut avoir lieu (équation (9.)) que si la solution (α,β,γ) est elle-même imaginaire; donc, si la solution (α, β, γ) est réelle, la surface S sera un cylindre hyperbolique.

Il est important de remarquer que la droite $\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}$ n'est pas parallèle aux génératrices du cylindre S; car, dans un cylindre du second degré, les plans des centres se coupent suivant une même droite parallèle aux génératrices; or les plans des centres ont ici pour équations

$$(16.)\quad \begin{cases} x\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha^2}+y\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\,\partial\beta}+z\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\,\partial\gamma}+t\dfrac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\alpha} = 0,\\[2mm] x\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\partial\alpha}+y\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta^2}+z\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\,\partial\gamma}+t\dfrac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\beta} = 0,\\[2mm] x\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma\,\partial\alpha}+y\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma\,\partial\beta}+z\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma^2}+t\dfrac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\gamma} = 0. \end{cases}$$

Pour que la droite (α, β, γ) soit une génératrice, il faudrait qu'elle fût parallèle à chacun de ces trois plans, ce qui entrainerait les trois conditions

$$(17.)\quad \begin{cases} \alpha\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha^2}+\beta\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\,\partial\beta}+\gamma\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\,\partial\gamma} \quad\text{ou}\quad (m-1)\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha}=0,\\[2mm] \alpha\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\partial\alpha}+\beta\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta^2}+\gamma\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\partial\gamma} \quad\text{ou}\quad (m-1)\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial\beta}=0,\\[2mm] \alpha\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma\,\partial\alpha}+\beta\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma\,\partial\beta}+\gamma\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma^2} \quad\text{ou}\quad (m-1)\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial\gamma}=0; \end{cases}$$

or, pour l'instant, nous n'admettons pas ces relations.

Remarquons qu'on exprimera que la surface S est un cylindre en écrivant que les trois plans (16.) se coupent suivant une même droite; l'équation de condition sera donc indépendante des coefficients de la fonction φ_{m-2}; ceci

résulte d'ailleurs de l'équation (14.), car, d'après la relation (15.), le coefficient de $2\varphi_{m-2}(\alpha,\beta,\gamma)$ est nul. Ainsi, lorsque la particularité que nous venons d'étudier se présente dans une surface d'ordre m, elle a lieu pour toutes les surfaces du même ordre dont les équations ont les mêmes termes du $m^{\text{ème}}$ et du $(m-1)^{\text{ème}}$ degré, quels que soient les termes de degré inférieur au $(m-1)^{\text{ème}}$

7. Il peut arriver que la surface S se compose de deux plans qui se coupent, c. à. d. que le cylindre du cas précédent se réduise à ses deux plans asymptotes; le plan P, qui est en même temps un plan asymptote de la surface S, se confondra alors avec un de ces plans. La droite d'intersection des deux plans n'est pas parallèle à la direction asymptotique; car, dans le cas contraire, on en conclurait comme dans le n°. 6. que les dérivées $\frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial\varphi_m}{\partial\beta}$, $\frac{\partial\varphi_m}{\partial\gamma}$ sont nulles, ce que nous n'admettons pas pour le moment.

Dans l'hypothèse actuelle, les tangentes inflexionnelles sont indéterminées; c'est qu'en effet

Toutes les droites parallèles à la génératrice $\left(\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}\right)$ *et situées dans le plan asymptote P rencontrent la surface en trois points coincidents. Le plan asymptote P coupe la surface suivant une courbe ayant un point triple en I à l'infini; et tout plan passant par ce point à l'infini, c. à. d. parallèle à la génératrice G coupe la surface suivant une courbe pour laquelle le point à l'infini est un point d'inflexion, la tangente d'inflexion est l'intersection du plan P avec le plan sécant.*

Les tangentes au point triple, c. à. d. les tangentes situées dans le plan P et rencontrant la surface en quatre points coincidant en I, seront les intersections du plan asymptote P avec la polaire du troisième ordre du point à l'infini $\left(\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}, t=0\right)$.

Afin d'établir la proposition qu'on vient d'énoncer, nous prendrons pour axe des z la direction asymptotique considérée, pour plan des xz le plan P; et nous exprimerons que la surface S se réduit à deux plans dont un est le plan des xz (l'intersection des deux plans ne doit pas être parallèle à l'axe des z). En introduisant ces hypothèses, les fonctions

$$\begin{cases} \varphi_m(x,y,z) = \cdots\cdot (ax^2+2bxy+cy^2)z^{m-2}+(Ax+By)z^{m-1}+Cz^m, \\ \varphi_{m-1}(x,y,z) = \cdots\cdot (a_1x^2+2b_1xy+c_1y^2)z^{m-3}+(A_1x+B_1y)z^{m-2}+C_1z^{m-1}, \\ \varphi_{m-2}(x,y,z) = \cdots\cdots\cdots\cdots +(A_2x+B_2y)z^{m-3}+C_2z^{m-2}, \end{cases}$$

prennent la forme

$$(1^\circ.)\quad \begin{cases} \varphi_m(x, y, z) = \cdots\cdots + (2bxy + cy^2)z^{m-2} + Byz^{m-1}, \\ \varphi_{m-1}(x, y, z) = \cdots\cdots + (a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2)z^{m-3} + B_1yz^{m-}, \\ \varphi_{m-2}(x, y, z) = \cdots\cdots\cdots\cdots + (A_2x + B_2y)z^{m-3}; \end{cases}$$

le plan asymptote P et la surface S ont alors respectivement pour équations

$$(P)\qquad y = 0,$$

$$(S)\qquad y(2bx + cy + (m-1)Bz + B_1t) = 0.$$

La section de la surface par le plan asymptote $y = 0$ est

$$(a_0x^m + \cdots + a_{m-3}x^3z^{m-3}) + t(b_0x^{m-1} + \cdots + a_1x^2z^{m-3}) + t^2(c_0x^{m-2} + \cdots + A_2xz^{m-3}) + \cdots = 0;$$

la direction asymptotique $x = 0$ correspond à un point triple de la section; car si l'on pose $x = kt$, on voit que le premier membre est divisible par t^3, quel que soit k.

L'intersection de la surface par une droite quelconque située dans le plan asymptote et parallèle à la direction asymptotique c. à. d. à l'axe des z s'obtiendra en faisant, dans l'équation de la surface,

$$y = 0, \quad x = kt;$$

on voit, d'aprés ce qui vient d'être dit, que cette droite rencontre le surface en trois points coincidents; ce qui d'ailleurs résulte nécessairement de la présence du point triple.

Nous pouvons regarder le plan des yz comme un plan quelconque parallèle à la direction asymptotique; or la section de la surface par ce plan $x = 0$ a pour équation

$$(a_0'y^m + \cdots + cy^2z^{m-2} + Byz^{m-1}) + t(b_0'y^{m-1} + \cdots + B_1yz^{m-2}) + t^2(c_0'y^{m-2} + \cdots + B_2yz^{m-3}) + \cdots = 0;$$

la direction asymptotique $y = 0$, c. à. d. l'axe des z, correspond à un point simple à l'infini; posant $y = kt$, on trouve pour asymptote $y = 0$, et on constate que le premier membre de l'équation est divisible par t^3; le point à l'infini est donc un point d'inflexion dont la tangente est l'axe des z.

Toutes les propriétés indiquées dans l'énoncé précédent se trouvent ainsi démontrées.

8. Observation. Avant de pousser plus loin cette discussion, il est utile de rappeler les relations qui expriment que le cône C des directions asymptotiques a des arêtes doubles, de rebroussement, etc. ....

La théorie des courbes nous fournit immédiatement ces relations; il suffit de remarquer que si un cône possède une arête double, par exemple,

la section du cône par un plan quelconque aura un point double au point où le plan rencontre l'arête double. Or, si nous considérons la section de la surface conique par un plan parallèle au plan des xy, nous pouvons regarder $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, comme les coordonnées d'un point quelconque de la section; une remarque analogue est applicable aux sections parallèles aux autres plans coordonnés. .

D'après cela, nous pouvons écrire de suite les conditions pour que l'arête (α, β, γ) du cône des directions asymptotiques

$$\varphi_m(x, y, z) = 0$$

soit une arête double; ces conditions sont

$$(18.)\qquad \frac{\partial \varphi_m}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_m}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_m}{\partial \gamma} = 0;$$

l'équation des plans tangents au cône suivant cette arête double sera

$$(19.)\qquad x^2 \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial \alpha^2} + y^2 \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial \beta^2} + z^2 \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial \gamma^2} + 2xy \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial \alpha \partial \beta} + 2xz \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial \alpha \partial \gamma} + 2yz \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial \beta \partial \gamma} = 0.$$

L'arête (α, β, γ) sera une arête de rebroussement si ces deux plans se confondent, c. à. d. si les plans des centres

$$(20.)\qquad \begin{cases} x \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial \alpha^2} + y \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial \alpha \partial \beta} + z \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial \alpha \partial \gamma} = 0, \\ x \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial \beta \partial \alpha} + y \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial \beta^2} + z \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial \beta \partial \gamma} = 0, \\ x \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial \gamma \partial \alpha} + y \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial \gamma \partial \beta} + z \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial \gamma^2} = 0, \end{cases}$$

se confondent; or ceci revient à écrire que les déterminants partiels du déterminant

$$(21.)\qquad H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial \alpha \partial \beta} & \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial \alpha \partial \gamma} \\ \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial \beta \partial \alpha} & \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial \beta^2} & \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial \beta \partial \gamma} \\ \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial \gamma \partial \alpha} & \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial \gamma \partial \beta} & \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial \gamma^2} \end{vmatrix}$$

sont nuls.

Les mêmes considérations nous permettent aussi de conclure que les arêtes d'inflexion du cône $\varphi_m(x, y, z) = 0$ sont données par les solutions communes aux deux équations

$$\varphi_m(\alpha, \beta, \gamma) = 0, \quad H = 0.$$

Toutes ces remarques n'offrant aucune difficulté, nous n'insisterons pas d'avantage. Revenons maintenant à la discussion.

9. Admettons que la direction asymptotique (α, β, γ) soit déterminée par une solution commune aux trois équations (18.)

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_m}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_m}{\partial \gamma} = 0,$$

ce qui ne pourra avoir lieu que sous certaines conditions; nous supposerons, en outre, que les relations (18.) ont lieu sans qu'on ait en même temps

$$\varphi_{m-1}(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

car, si cela était, nous aurions (équation (6.)) un point double à l'infini sur la surface; c'est une étude que nous n'aborderons que plus loin.

On voit, par ce qui précède, que les hypothèses admises reviennent à dire que la génératrice (α, β, γ) est une arête double du cône C. L'équation (9.) montre que le plan asymptote P est à l'infini; ainsi:

La surface U touche le plan de l'infini en autant de points qu'il y a de génératrices doubles distinctes dans le cône des directions asymptotiques, pourvu que ces génératrices n'appartiennent pas au cône

$$\varphi_{m-1}(x, y, z) = 0.$$

Mais le contact du plan à l'infini présente des différences suivant que la génératrice qui correspond au point simple que nous considérons est une arête double ordinaire ou une arête de rebroussement.

1°. Si l'arête (α, β, γ) est une arête double ordinaire, c. à. d. si les plans (19.) sont distincts, *la surface S est un paraboloïde dont l'axe est parallèle à la génératrice $G\left(\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}\right)$*. En effet, les plans du centre de la surface S ont pour équations

$$(22.)\quad \begin{cases} x\dfrac{\partial^2 \varphi_m}{\partial \alpha^2} + y\dfrac{\partial^2 \varphi_m}{\partial \alpha \partial \beta} + z\dfrac{\partial^2 \varphi_m}{\partial \alpha \partial \gamma} + t\dfrac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial \alpha} = 0, \\ x\dfrac{\partial^2 \varphi_m}{\partial \beta \partial \alpha} + y\dfrac{\partial^2 \varphi_m}{\partial \beta^2} + z\dfrac{\partial^2 \varphi_m}{\partial \beta \partial \gamma} + t\dfrac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial \beta} = 0, \\ x\dfrac{\partial^2 \varphi_m}{\partial \gamma \partial \alpha} + y\dfrac{\partial^2 \varphi_m}{\partial \gamma \partial \beta} + z\dfrac{\partial^2 \varphi_m}{\partial \gamma^2} + t\dfrac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial \gamma} = 0; \end{cases}$$

or, il résulte d'abord des relations (18.) que ces trois plans sont parallèles à

la droite $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$; et, de plus, il ne sont pas parallèles entre eux, car autrement les plans (19.) coincideraient, ce qui est contraire à notre hypothèse. J'ajoute que ces trois plans ne se coupent pas suivant une droite unique; car, en ajoutant les équations (22.) respectivement multipliées par α, β, γ, on trouve

$$t\varphi_{m-1}(\alpha,\beta,\gamma) = 0;$$

d'où $t = 0$, puisque $\varphi_{m-1}(\alpha,\beta,\gamma)$ est différent de zéro; donc tous les points communs aux trois plans des centres sont dans le plan de l'infini; et, comme ces plans ne sont pas parallèles, il s'ensuit qu'ils se coupent suivant des droites parallèles. Les tangentes inflexionnelles sont les deux droites à l'infini, intersections du plan P avec le paraboloïde; ou, ce qui revient au même, avec les deux plans directeurs de ce paraboloïde; or les deux plans directeurs du paraboloïde sont évidemment les deux plans (19.) c. à. d. les deux plans tangents au cône C suivant son arête double; donc

Dans ce premier cas, la surface U est touchée par le plan de l'infini; le point de contact est, pour la section par le plan à l'infini, un point double dont les deux tangentes (toutes deux à l'infini) sont les intersections du plan à l'infini avec les deux plans distincts tangents au cône C suivant l'arête double considérée ou avec deux plans parallèles.

2°. Si l'arête (α,β,γ) est une arête de rebroussement du cône C, les plans (19.) se confondent, et, par suite, les plans des centres (22.) sont parallèles; ces derniers plans ne se confondent pas, car tous les points communs sont, comme on vient de le voir, dans le plan à l'infini; *la surface* (S) *est alors un cylindre parabolique.* L'équation de ce cylindre parabolique ou de la surface S peut s'écrire:

$$\frac{1}{\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha^2}}\left(x\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha^2}+y\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\beta}+z\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\gamma}\right)^2+2t\left(\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\alpha}+y\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\beta}+z\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\gamma}\right)$$
$$+2t^2\varphi_{m-2}(\alpha,\beta,\gamma) = 0.$$

On voit d'abord que la génératrice $G\left(\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}\right)$ est parallèle au plan diamétral

$$x\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha^2}+y\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\beta}+z\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\gamma} = 0,$$

puis qu'on a l'égalité

$$\alpha\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha^2}+\beta\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\beta}+\gamma\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\gamma} = (m-1)\frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha} = 0;$$

mais la droite G n'est pas parallèle aux génératrices du cylindre; car si cela était, elle serait parallèle au plan tangent représenté par les termes du premier degré en x, y, z de l'équation du cylindre, c. à. d. qu'on aurait

$$\alpha\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\alpha}+\beta\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\beta}+\gamma\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\gamma}=(m-1)\varphi_{m-1}(\alpha,\beta,\gamma)=0,$$

ce qui est contraire à l'une de nos hypothèses.

Le plan asymptote P est aussi asymptote au cylindre parabolique et correspond à la direction asymptotique (α,β,γ); ce plan est à l'infini et coupe le cylindre suivant deux droites confondues à l'infini, puisque le plan à l'infini touche le cylindre tout le long de la droite à l'infini intersection du plan à l'infini avec le plan des directions asymptotiques du cylindre. Ainsi:

Dans ce second cas, la surface U est encore touchée par le plan à l'infini; le point de contact est, pour la section par le plan à l'infini, un point de rebroussement; la tangente de rebroussement (à l'infini) est l'intersection du plan à l'infini par le plan tangent au cône C suivant l'arête de rebroussement ou par un plan parallèle.

3°. Il peut arriver que *la surface S se compose de deux plans dont l'un est à l'infini.* On voit facilement, dans ce cas, que l'arête (α,β,γ) du cône C est une arête triple de ce cône; le plan asymptote P est encore à l'infini; toutes les droites à l'infini parallèles à la génératrice G ont avec la surface un contact du second ordre. Le plan P à l'infini coupe la surface suivant une courbe à l'infini ayant un point triple sur la direction asymptotique considérée; les trois tangentes en ce point triple sont les intersections du plan de l'infini avec la polaire du troisième ordre du point $\left(\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma},\ t=0\right)$ ou avec les trois plans tangents au cône suivant son arête triple.

Cette variété de contact est un cas particulier de celui qui a été examiné au n° (7.).

Remarque. Il est utile de remarquer que lorsqu'on exprime que la surface S est un cylindre parabolique, les relations écrites entraînent nécessairement les relations (18.), c'est-à-dire

$$\frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha}=0,\quad \frac{\partial\varphi_m}{\partial\beta}=0,\quad \frac{\partial\varphi_m}{\partial\gamma}=0.$$

En effet, nous exprimerons que la surface S est un cylindre parabolique en écrivant que les plans des centres (22.) sont parallèles.

Or on a les identités

$$\begin{cases}(m-1)\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha} = \alpha\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha^2}+\beta\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\beta}+\gamma\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\gamma},\\(m-1)\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial\beta} = \alpha\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\partial\alpha}+\beta\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta^2}+\gamma\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\partial\gamma},\\(m-1)\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial\gamma} = \alpha\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma\partial\alpha}+\beta\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma\partial\beta}+\gamma\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma^2}.\end{cases}$$

Si l'on prend ces équations deux par deux et qu'on élimine successivement le terme en α, on trouve en vertu des hypothèses admises

$$\frac{\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha}}{\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha^2}} = \frac{\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial\beta}}{\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\beta}} = \frac{\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial\gamma}}{\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\gamma}};$$

en multipliant respectivement par α, β, γ, les termes de chacun de ces rapports et en ajoutant, on a pour la valeur commune

$$\frac{\alpha\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha}+\beta\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial\beta}+\gamma\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial\gamma}}{\alpha\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha^2}+\beta\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\beta}+\gamma\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\gamma}} \quad \text{ou} \quad \frac{m\varphi_m(\alpha,\beta,\gamma)}{(m-1)\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha}};$$

d'où l'on conclut

$$(m-1)\left(\frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha}\right)^2 = m\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha^2}\varphi_m(\alpha,\beta,\gamma);$$

$$\text{or} \quad \varphi_m(\alpha,\beta,\gamma)=0, \quad \text{donc} \quad \frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha}=0.$$

En éliminant α, ou β, ou γ, entre les deux premières des relations ci-dessus on sera conduit à

$$\frac{\partial\varphi_m}{\partial\beta}=0; \text{ et, par suite, } \frac{\partial\varphi_m}{\partial\gamma}=0.$$

La proposition énoncée se trouve donc démontrée.

10. Nous allons examiner maintenant le cas d'une droite à l'infini sur la surface U.

Nous nous bornerons à l'étude des cas suivants:

I°. $(Ax+By+Cz)\varphi(x,y,z)+t\varphi_{m-1}(x,y,z)+t^2\varphi_{m-2}(x,y,z)+\cdots\cdots=0;$

II°. $(Ax+By+Cz)^2\varphi(x,y,z)+t\varphi_{m-1}(x,y,z)+t^2\varphi_{m-2}(x,y,z)+\cdots\cdots=0;$

III°. $(Ax+By+Cz)\varphi(x,y,z)+t(Ax+By+Cz)\psi(x,y,z)+t^2\varphi_{m-2}(x,y,z)+\cdots=0;$

IV°. $(Ax+By+Cz)^2\varphi(x,y,z)+t(Ax+By+Cz)\psi(x,y,z)+t^2\varphi_{m-2}(x,y,z)+\cdots=0;$

ce sont les cas les plus généraux dans l'hypothèse qui nous occupe.

1[er] cas. Le cône $\varphi_m(x, y, z)$ se décompose en un plan et en un cône de degré $(m-1)$, de sorte que

$$\varphi_m(x,y,z) = (Ax+By+Cz)\varphi(x,y,z) = Q\varphi(x,y,z);$$

la droite à l'infini

$$(D) \quad \begin{cases} Ax+By+Cz = 0, \\ t = 0, \end{cases}$$

est toute entière sur la surface U.

Soit une génératrice $G(\alpha,\beta,\gamma)$ située dans le plan Q; le plan asymptote P' correspondant à cette direction asymptotique aura pour équation

$$(23.) \quad \varphi(\alpha,\beta,\gamma)[Ax+By+Cz]+t\varphi_{m-1}(\alpha,\beta,\gamma) = 0;$$

on a donc alors une infinité de plans asymptotes parallèles au plan Q et dont la position varie avec l'orientation de la direction asymptotique dans le plan Q.

Une des nappes de la surface présente, à l'infini, la forme de celle d'un paraboloïde hyperbolique dont la plan Q serait un des plans directeurs. Les plans asymptotes P' passent par la droite D et touchent la surface au point où la droite D est rencontrée par la direction asymptotique considérée.

Parmi les plans asymptotes P', $(m-1)$ d'entre eux coincident avec le plan Q; ils correspondent aux $(m-1)$ directions asymptotiques, intersections du plan Q avec le cône $\varphi_{m-1}(x,y,z)=0$.

Parmi les plans P', $(m-1)$ d'entre eux sont transportés à l'infini parallélement à eux-mêmes; ils correspondent aux $(m-1)$ directions asymptotiques, intersections du plan Q avec le cône $\varphi(x,y,z)=0$; ces droites sont des arêtes doubles du cône $\varphi_m(x,y,z)=0$.

Enfin, parmi les plans P', il y en a toujours $(m-1)$ coincidant avec un plan donné parallèle au plan Q, par exemple

$$Ax+By+Cz+Kt = 0;$$

car il suffit qu'on ait

$$K\varphi(\alpha,\beta,\gamma) = \varphi_{m-1}(\alpha,\beta,\gamma), \qquad A\alpha+B\beta+C\gamma = 0.$$

Chacun de ces $(m-1)$ plans touche la surface en un point différent à l'infini sur la droite D; ces points de contact sont sur les génératrices, intersections du plan Q avec le cône du $(m-1)$ème degré

$$K\varphi(x,y,z)-\varphi_{m-1}(x,y,z) = 0.$$

Dans le cas actuel, la surface S a pour équation

$$(24.)\quad \begin{cases} (Ax+By+Cz)\left(x\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}+y\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}+z\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma}\right) \\ +t\left(x\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\alpha}+y\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\beta}+z\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\gamma}\right)+t^2\varphi_{m-2}(\alpha,\beta,\gamma) = 0; \end{cases}$$

la surface représentée par cette équation est un *paraboloïde*. Un des plans directeurs est le plan Q; les plans asymptotes P' sont tous parallèles à ce plan directeur, et, par suite, coupent la surface S suivant une droite à distance finie et une droite à l'infini qui est la droite D. Donc

Tous les plans asymptotes P' coupent la surface U suivant une courbe ayant un point double à l'infini, une des tangentes en ce point double est à distance finie et l'autre est la droite D à l'infini.

2[ème] cas. Le cône $\varphi_m(x,y,z)$ se décompose en deux plans confondus et en un cône du degré $(m-2)$, de sorte que

$$\varphi_m(x,y,z) = (Ax+By+Cz)^2\varphi(x,y,z) = Q^2\varphi(x,y,z).$$

Si nous considérons une droite $G(\alpha,\beta,\gamma)$ située dans le plan Q, le plan asymptote correspondant à cette direction asymptotique a pour équation

$$t\varphi_{m-1}(\alpha,\beta,\gamma) = 0, \quad \text{ou} \quad t = 0;$$

donc tous les plans asymptotes P' correspondant aux directions asymptotiques parallèles au plan Q sont transportés à l'infini parallèlement à ce dernier plan; c. à. d. que la surface U est touchée par le plan à l'infini tout le long de la droite à l'infini

$$(D)\quad \begin{cases} Ax+By+Cz = 0, \\ t = 0 \end{cases}$$

située sur cette surface.

Une des nappes de la surface U présente à l'infini la forme d'un cylindre parabolique. Le plan Q coupe le cône $\varphi_{m-1}(x,y,z) = 0$ suivant $(m-1)$ droites déterminant sur la surface $(m-1)$ points doubles.

La surface S qui sert à déterminer les tangentes inflexionnelles devient dans ce cas

$$(25.)\quad \varphi(\alpha,\beta,\gamma)[Ax+By+Cz]^2+t\left(x\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\alpha}+y\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\beta}+z\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\gamma}\right)+t^2\varphi_{m-2}(\alpha,\beta,\gamma)=0;$$

c'est *un cylindre parabolique.*

La génératrice G est parallèle au plan diamétral Q, mais elle n'est pas parallèle au cylindre.

Ainsi le plan à l'infini touche la surface tout le long de la droite D; chaque point de cette droite peut être regardé comme un point de rebrousse-

ment de la section de la surface plan à l'infini, la tangente de rebroussement est la droite D. Cette remarque nous montre l'accord qui existe entre le cas que nous venons d'étudier et celui qui a été examiné au [n°. 9, 2°].

3ème cas. Les deux fonctions φ_m et φ_{m-1} sont respectivement de la forme

$$\varphi_m(x,y,z) = (Ax+By+Cz)\varphi(x,y,z) = Q\varphi(x,y,z),$$
$$\varphi_{m-1}(x,y,z) = (Ax+By+Cz)\psi(x,y,z) = Q\psi(x,y,z).$$

Si nous considérons une droite quelconque $G(\alpha,\beta,\gamma)$ située dans le plan Q, le plan asymptote correspondant à cette direction asymptotique a pour équation

$$(Q) \quad Ax+By+Cz = 0;$$

donc le plan asymptote reste invariable quelle que soit la direction asymptotique considérée dans le plan Q; en d'autres termes,

Le plan Q touche la surface tout le long de la droite à l'infini

$$(D) \quad \begin{cases} Ax+By+Cz = 0, \\ t = 0. \end{cases}$$

Une droite quelconque située dans ce plan rencontre la surface en deux points coincidents, et une droite quelconque parallèle à ce plan rencontre la surface en un seul point à l'infini.

Tout plan parallèle au plan Q coupe la surface U suivant la droite à l'infini D et suivant une courbe du $(m-1)^{\text{ème}}$ ordre.

La surface (S) se réduit ici à

$$(Ax+By+Cz)\left[x\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}+y\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}+z\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma}+t\psi(\alpha,\beta,\gamma)\right]+t^2\varphi_{m-2}(\alpha,\beta,\gamma) = 0;$$

c'est *un cylindre hyperbolique* dont le plan Q est un des plans asymptotes; ce cylindre serait elliptique si le plan Q était imaginaire.

L'analogie de ce cas avec celui qui a été étudié au [n°. 6] est visible.

La surface S se réduira à deux plans qui se coupent pour les $(m-2)$ directions asymptotiques, intersections du plan Q avec le cône

$$\varphi_{m-2}(x,y,z) = 0;$$

et nous rentrons alors dans le cas étudié au [n°. 7].

4ème cas. Les fonctions φ_m et φ_{m-1} ont les formes suivantes

$$\varphi_m(x,y,z) = (Ax+By+Cz)^2\varphi(x,y,z) = Q^2\varphi(x,y,z),$$
$$\varphi_{m-1}(x,y,z) = (Ax+By+Cz)\;\psi(x,y,z) = Q\;\psi(x,y,z);$$

la droite à l'infini

$$(D) \quad \begin{cases} Ax+By+Cz = 0, \\ t = 0 \end{cases}$$

est alors une ***droite double*** de la surface U; car un plan quelconque passant par la droite D rencontre la surface suivant deux droites coincidant avec cette même droite D; nous reviendrons plus loin sur ce cas particulier.

11. Remarque. Dans la discussion qui précède, nous avons pu remarquer que la surface S a présenté presque toutes les variétés des surfaces du second ordre; cependant nous n'avons pas rencontré de plans parallèles, ni de plans coincidents; et, dans le cas des cylindres, la direction asymptotique ne s'est jamais trouvée parallèle au cylindre. Examinons donc si ces cas particuliers peuvent se présenter dans l'hypothèse d'un ***point simple.***

Les équations des plans des centres de la surface S sont

$$(26.) \quad \begin{cases} x\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha^2}+y\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\beta}+z\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\gamma}+t\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\alpha} = 0, \\ x\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\partial\alpha}+y\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta^2}+z\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\partial\gamma}+t\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\beta} = 0, \\ x\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma\partial\alpha}+y\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma\partial\beta}+z\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma^2}+t\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\gamma} = 0; \end{cases}$$

et l'on a toujours la condition

$$\varphi_m(\alpha,\beta,\gamma) = 0.$$

1°. Si la surface S est un cylindre elliptique ou hyperbolique, les plans des centres se coupent suivant une même droite parallèle aux génératrices du cylindre; donc la droite G ne pourrait être parallèle aux génératrices du cylindre qu'à la condition d'être parallèle à chacun de ces plans, ce qui entrainerait les relations

$$\frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha} = 0, \quad \frac{\partial\varphi_m}{\partial\beta} = 0, \quad \frac{\partial\varphi_m}{\partial\gamma} = 0.$$

Si maintenant on ajoute les équations (26.) respectivement multipliées par α, β, γ, il vient

$$t\varphi_{m-1}(\alpha,\beta,\gamma) = 0;$$

cette équation devant représenter un plan passant par la droite d'intersection (supposée à distance finie) des plans (26.), il faut que

$$\varphi_{m-1}(\alpha,\beta,\gamma) = 0.$$

On voit alors, par l'équation (6.), que le point à l'infini correspondant à cette direction asymptotique est ***un point double de la surface U.***

2°. Si la surface S est un cylindre parabolique, on a encore [n°. 9, Remarque] les relations

$$\frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha}=0,\quad \frac{\partial\varphi_m}{\partial\beta}=0,\quad \frac{\partial\varphi_m}{\partial\gamma}=0;$$

et nous avons vu [n°. 9, 2°] que la génératrice $G(\alpha,\beta,\gamma)$ ne peut être parallèle aux génératrices du cylindre que si l'on a

$$\varphi_{m-1}(\alpha,\beta,\gamma) = 0;$$

nous arrivons encore à la conclusion précédente.

3°. Pour que la surface S se réduise à deux plans parallèles, il faut que les plans (26.) se confondent; ils doivent alors se confondre avec le plan

$$(P)\qquad x\frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha}+y\frac{\partial\varphi_m}{\partial\beta}+z\frac{\partial\varphi_m}{\partial\gamma}+t\varphi_{m-1}(\alpha,\beta,\gamma) = 0$$

dont l'équation se déduit des équations (26.) respectivement multipliées par α, β, γ et ajoutées.

Nous abandonnerons ici l'emploi des formules générales pour adopter une méthode plus particulière et qui présentera en même temps plus de netteté; ainsi nous exprimerons que la surface S se réduit à deux plans parallèles en prenant pour axe des z la direction asymptotique considérée.

Soit donc

$$\varphi_m(x,y,z) = \cdots\cdots+(ax^2+2bxy+cy^2)z^{m-2}+(Ax+By)z^{m-1}+Cz^m;$$
$$\varphi_{m-1}(x,y,z) = \cdots\cdots+(a_1x^2+2b_1xy+c_1y)z^{m-3}+(A_1x+B_1y)z^{m-2}+C_1z^{m-1};$$
$$\varphi_{m-2}(x,y,z) = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+(A_2x+B_2y)z^{m-3}+C_2z^{m-2};$$

on a, par hypothèse $\alpha=0$, $\beta=0$, γ différent de zéro, par exemple $\gamma=1$; et par suite $C=0$, puisque $\varphi_m(\alpha,\beta,\gamma)=0$.

L'équation de la surface S est alors

$$(S)\ ax^2+2bxy+cy^2+(m-1)Axz+(m-1)Byz+t[A_1x+B_1y+(m-1)C_1z]+t^2C_2=0.$$

La surface S devant se réduire à deux plans parallèles, nous pouvons prendre l'un d'eux ou comme plan des xz, ou comme plan des xy; car, il est visible d'après l'équation générale de la surface S, que le cas de *deux plans à l'infini* ne peut se présenter que si le point à l'infini est un point double de la surface U.

Première hypothèse. La surface S se réduit à deux plans parallèles dont un est le plan des xz, ce qui suppose que la direction asymptotique

est parallèle à l'un des plans à distance finie; on devra avoir

$a=0$, $b=0$; $A=0$, $B=0$; $A_1=0$, $C_1=0$; $C_2=0$, on a d'ailleurs $C=0$;

la surface S a alors pour équation

$$(S)\quad cy^2+B_1ty = 0;$$

et l'équation de la surface U devient

$$(\cdots+cy^2z^{m-2})+t(\cdots+B_1yz^{m-2})+t^2[\cdots+(A_2x+B_2y)z^{m-3}]+\cdots = 0.$$

On voit qu'une droite quelconque parallèle à l'axe des z

$$x = ht, \qquad y = kt,$$

rencontre la surface à l'infini en deux points coincidents, puisque le premier membre de l'équation est divisible par t^2; cela a encore lieu lorsque B_1 ou c sont nuls; le point à l'infini est donc un point double de la surface. Ainsi

Dans le cas d'un point simple, la surface S ne peut pas se réduire à deux plans parallèles, ni à deux plans coincidents, ni à deux plans dont un est à l'infini lorsque la direction asymptotique est supposée parallèle au plan à distance finie.

Deuxième hypothèse. La surface S se reduit à deux plans parallèles dont un est le plan des xy; on doit avoir alors

$a=0$, $b=0$, $c=0$; $A=0$, $B=0$; $A_1=0$, $B_1=0$; on a d'ailleurs $C=0$;

dans ce cas, la surface S a pour équation

$$(S)\quad t[(m-1)C_1z+C_2t] = 0;$$

et l'équation de la surface U devient

$$[\cdots+(a_2x^3\cdots+d_2y^3)z^{m-3}]+t[\cdots+C_1z^{m-1}]+t^2[\cdots+C_2z^{m-2}]+\cdots = 0.$$

Une droite quelconque parallèle à l'axe des z ne rencontre la surface à l'infini qu'en un seul point; ce point à l'infini est donc un point simple de la surface. Ainsi

Dans le cas d'un point simple, la surface S peut se réduire à deux plans dont un à l'infini, mais la direction asymptotique n'est pas parallèle au plan à distance finie.

C'est le cas singulier qui a été étudié au [n°. 9, 3°].

12. Résumé *de l'étude d'un point simple à l'infini.*

Si I est un point à l'infini sur la surface U et correspondant à la direction asymptotique G, ce point est un *point simple* lorsqu'une droite *quelconque* passant par le point I, c. à. d. parallèle à la droite G, ne rencontre la surface qu'en un seul point.

Le plan tangent à la surface en I ou plan asymptote P est parallèle au plan touchant le cône des directions asymptotiques suivant la génératrice G; ce plan coupe la surface U suivant une courbe ayant un point double à l'infini en I, les tangentes en ce point double (ou *tangentes inflexionnelles* de la surface) sont les intersections de la surface S par le plan P; la surface S est la polaire du second ordre du point I à l'infini ou la surface diamétrale du second ordre correspondant à la direction G [n°. 3, remarque 1, III].

La nature du contact du plan asymptote P est indiquée d'une manière très-nette par la forme de la surface S, comme on le voit par le résumé suivant:

I°. *La surface S est un ellipsoïde ou un hyperboloïde à deux nappes:*

Le point double de la section par le plan P est un point isolé.

II°. *La surface S est un hyperboloïde à une nappe*:

Le point double à l'infini de la section est un point double ordinaire dont les deux tangentes sont à distance finie.

III°. *La surface S est un cône:*

Le point double à l'infini de la section par le plan P est un point de rebroussement, la tangente de rebroussement est à distance finie [n°. 4].

IV°. *La surface S est un paraboloïde:*

1°. Si la direction asymptotique G n'est pas parallèle à l'axe de la surface S, le plan asymptote est à distance finie et coupe la surface suivant une courbe ayant un point double à l'infini dont une des tangentes, et une seule, est à l'infini [n°s. 5 et 10, 1er cas].

2°. Si la direction asymptotique G est parallèle à l'axe de la surface S, le plan asymptote est à l'infini; l'arête G est une arête double du cône des directions asymptotiques; les deux tangentes au point double sont à l'infini dans les deux plans tangents au cône suivant l'arête double [n°. 9, 1°].

Lorsque le paraboloïde est elliptique, le point double est isolé.

V°. *La surface S est un cylindre elliptique ou hyperbolique*:

1°. Si la génératrice G n'est pas parallèle au cylindre, le point double de la section par le plan asymptote est un point de rebroussement, la tangente de rebroussement est à l'infini; le plan asymptote est à distance finie [n°. 6].

Lorsque le cylindre est elliptique le point de rebroussement est isolé.

Il peut arriver que le plan asymptote touche la surface tout le long d'une droite à l'infini [n°. 10, 3ème cas].

2°. Si la génératrice G est parallèle au cylindre, le point I à l'infini est *un point double de la surface* [n°. 11, 1°].

VI°. *La surface S se compose de deux plans qui se coupent:*

Le plan asymptote coupe la surface suivant une courbe ayant un point triple à l'infini; tout plan parallèle à la direction asymptotique coupe la surface suivant une courbe dont le point à l'infini est un point d'inflexion; une droite quelconque, située dans le plan asymptote et parallèle à la direction asymptotique, rencontre la surface en trois points coincidents [n°. 7].

Si la génératrice G était parallèle à l'intersection des deux plans, le point I à l'infini serait un point double de la surface.

VII°. *La surface S est un cylindre parabolique:*

1°. La génératrice G n'est pas parallèle au cylindre; dans ce cas, la droite G est une arête de rebroussement du cône des directions asymptotiques; le plan asymptote est à l'infini et coupe la surface suivant une courbe ayant un rebroussement au point de contact; la tangente de rebroussement est à l'infini et se trouve dans le plan touchant le cône suivant son arête de rebroussement [n°. 9, 2°].

Il peut arriver que le plan asymptote (à l'infini) touche la surface tout le long d'une droite à l'infini [n°. 10, 2ème cas].

2°. Si la génératrice G est parallèle au cylindre, le point à l'infini est un point double de la surface [n°. 11, 2°].

VIII°. *La surface S se compose de deux plans dont un à l'infini:*

1°. La direction asymptotique n'est pas parallèle au plan à distance finie; le point à l'infini est un point simple; le plan asymptote est à l'infini, et le point de contact est un point triple de la section par ce plan; la génératrice G est alors une arête triple du cône des directions asymptotiques [n°. 9. 3°].

2°. Si la direction asymptotique est parallèle au plan à distance finie, le point à l'infini est un point double de la surface [no. 11, 3°].

IX°. Dans le cas d'un point simple, la surface S ne peut pas se réduire à deux plans parallèles, ni à deux plans coincidents, ni à des plans tous deux à l'infini [n°. 11, 3°].

---

§. II.
Points doubles à l'infini.

I. Recherche des points doubles à l'infini.

13. Supposons que la génératrice $G\left(\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}\right)$ soit une génératrice double du cône des directions asymptotiques $\varphi_m(x,y,z)=0$ et appartienne en même temps au cône $\varphi_{m-1}(x,y,z)=0$, c. à. d. qu'on ait

$$(27.)\quad \frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha}=0,\quad \frac{\partial\varphi_m}{\partial\beta}=0,\quad \frac{\partial\varphi_m}{\partial\gamma}=0;\quad \varphi_{m-1}(\alpha,\beta,\gamma)=0;$$

les trois premières de ces relations entrainent évidemment la suivante

$$(27^{\text{bis}}.)\quad \varphi_m(\alpha,\beta,\gamma) = 0.$$

Le premier membre de l'équation (6.) est alors divisible par t^2, quels que soient λ, μ, ν, c. à. d. que toute droite passant par le point à l'infini

$$I\quad \begin{cases} \frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}, \\ t = 0 \end{cases}$$

y rencontre la surface en deux points coincidents; le point I à l'infini est donc *un point double de la surface.*

Pour obtenir les tangentes proprement dites à la surface en ce point, il faut exprimer que le premier membre de l'équation (6.) est divisible par t^3; ces droites formeront une surface touchant la surface U au point I à l'infini.

Pour que le premier membre de l'équation (6.) soit divisible par t^3, on doit avoir entre λ, μ, ν, la relation

$$(28.)\quad \left\{\lambda\frac{\partial}{\partial\alpha}+\mu\frac{\partial}{\partial\beta}+\nu\frac{\partial}{\partial\gamma}\right\}^2\varphi_m+2\left\{\lambda\frac{\partial}{\partial\alpha}+\mu\frac{\partial}{\partial\beta}+\nu\frac{\partial}{\partial\gamma}\right\}\varphi_{m-1}+2\varphi_{m-2}(\alpha,\beta,\gamma)=0.$$

Nous obtiendrons la surface formée par les tangentes en I en éliminant λ, μ, ν, à l'aide des relations (5.); l'équation précédente devient alors

$$\begin{aligned} &\left\{(x-\alpha\varrho)\frac{\partial}{\partial\alpha}+(y-\beta\varrho)\frac{\partial}{\partial\beta}+(z-\gamma\varrho)\frac{\partial}{\partial\gamma}\right\}^2\varphi_m \\ +2t&\left\{(x-\alpha\varrho)\frac{\partial}{\partial\alpha}+(y-\beta\varrho)\frac{\partial}{\partial\beta}+(z-\gamma\varrho)\frac{\partial}{\partial\gamma}\right\}\varphi_{m-1}+2t^2\varphi_{m-2}(\alpha,\beta,\gamma) = 0. \end{aligned}$$

Il résulte de l'identité déjà citée, savoir

$$(29.)\quad \begin{cases} \alpha^2\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha^2}+\beta^2\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta^2}+\gamma^2\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma^2}+2\alpha\beta\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\beta}+2\alpha\gamma\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\gamma}+2\beta\gamma\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\partial\gamma} \\ \qquad = m(m-1)\varphi_m(\alpha,\beta,\gamma) \end{cases}$$

et de la relation $(27^{\text{bis}}.)$ que le coefficient de ϱ^2 est nul.

Le coefficient de ϱ est aussi nul; car, en ordonnant par rapport à x, y, z, t, on trouve que ces variables ont pour multiplicateurs respectifs:

$$\alpha\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha^2}+\beta\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\beta}+\gamma\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\gamma} \quad \text{ou} \quad (m-1)\frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha},$$

$$\alpha\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\partial\alpha}+\beta\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta^2}+\gamma\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\partial\gamma} \quad \text{ou} \quad (m-1)\frac{\partial\varphi_m}{\partial\beta},$$

$$\alpha\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma\partial\alpha}+\beta\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma\partial\beta}+\gamma\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma^2} \quad \text{ou} \quad (m-1)\frac{\partial\varphi_m}{\partial\gamma},$$

$$\alpha\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\alpha}+\beta\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\beta}+\gamma\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\gamma} \quad \text{ou} \quad (m-1)\varphi_{m-1}(\alpha,\beta,\gamma).$$

On voit donc, en ayant égard aux relations (27.), que la surface, lieu des tangentes à la surface au point I à l'infini, a pour équation

$$(30.)\ (\Gamma)\quad \left\{\begin{array}{l} x^2\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha^2}+y^2\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta^2}+z^2\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma^2}+2xy\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\beta}+2xz\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\gamma}+2yz\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\partial\gamma} \\ \quad +2t\left[x\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\alpha}+y\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\beta}+z\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\gamma}\right]+2t^2\varphi_{m-2}(\alpha,\beta,\gamma) \end{array}\right\}=0;$$

c'est un cylindre que je nommerai *cylindre asymptote de la surface au point double I.*

14. Nous allons d'abord constater que l'équation (30.) représente effectivement un cylindre. En effet, les plans du centre ont pour équations

$$(31.)\quad \left\{\begin{array}{l} x\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha^2}+y\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\beta}+z\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\gamma}+t\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\alpha} = 0, \\ x\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\partial\alpha}+y\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta^2}+z\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\partial\gamma}+t\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\beta} = 0, \\ x\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma\partial\alpha}+y\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma\partial\beta}+z\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma^2}+t\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\gamma} = 0; \end{array}\right.$$

Or, si l'on ajoute ces équations respectivement multipliées par α, β, γ, on arrive, en égard aux relations (27.), à une identité; ces plans passent donc par une même droite; par suite, la surface Γ est un cylindre.

Les plans asymptotes de ce cylindre sont parallèles aux plans

$$(32.)\quad x^2\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha^2}+y^2\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta^2}+z^2\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma^2}+2xy\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\beta}+2xz\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\gamma}+2yz\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\partial\gamma} = 0;$$

ces plans sont précisément les plans tangents au cône des directions asymptotiques suivant l'arête double $G(\alpha,\beta,\gamma)$, [n°. 8].

Le cylindre asymptote Γ est la polaire du second ordre du point a l'infini $\left(\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}, t=0\right)$ ou la surface diamétrale du second ordre cor-

respondant à la direction $G(\alpha, \beta, \gamma)$. Les génératrices du cylindre sont parallèles à la droite G, car cette droite est parallèle à chacun des plans des centres (31.).

Ainsi, *en un point double I à l'infini d'une surface, les tangentes proprement dites forment un cylindre du second degré parallèle à la direction asymptotique sur laquelle se trouve le point I; cette droite est une arête double du cône des directions asymptotiques.*

15. Nous signalerons les propriétés caractéristiques suivantes:

1°. *Un plan quelconque passant par le point double c. à. d. parallèle à la génératrice G coupe la surface suivant une courbe ayant un point double à l'infini; les tangentes en ce point double sont les intersections du cylindre asymptote par le plan sécant.*

2°. *Un plan tangent quelconque au cylindre asymptote coupe la surface suivant une courbe ayant un point de rebroussement à l'infini, la tangente de rebroussement est la génératrice de contact de ce plan avec le cylindre.*

3°. *Les plans asymptotes du cylindre coupent la surface suivant une courbe ayant un point de rebroussement à l'infini, la tangente de rebroussement est la génératrice de contact, laquelle est aussi à l'infini.*

Pour démontrer les propriétés qu'on vient d'énoncer, nous prendrons pour axe des z une parallèle à la direction asymptotique considérée, c. à d. que nous supposerons

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 1;$$

et pour plan des xz, un des plans tangents au cylindre; nous choisirons, en outre, la génératrice de contact pour axe des z. Si l'on tient compte des relations (27.) et qu'on ait égard à la position particulière des axes par rapport à la surface Γ, on trouve que les fonctions φ_m, φ_{m-1}, φ_{m-2}, doivent être de la forme

$$\begin{aligned}
\varphi_m(x, y, z) &= \cdots\cdots + (Ax^2 + 2Bxy + Cy^2)z^{m-2};\\
\varphi_{m-1}(x, y, z) &= \cdots\cdots + (a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2)z^{m-3} + B_1yz^{m-2};\\
\varphi_{m-2}(x, y, z) &= \cdots\cdots\cdots\cdots + (A_2x + B_2y)z^{m-3};
\end{aligned}$$

et le cylindre Γ a pour équation

$$(\Gamma) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + B_1yt = 0.$$

Le plan des yz peut être regardé comme un plan quelconque parallèle à la direction asymptotique considérée; or l'équation de la section de la surface par ce plan $x = 0$ est

$$(\cdots + Cy^2z^{m-2}) + t(\cdots + B_1yz^{m-2}) + t^2(\cdots + B_2yz^{m-3}) + \cdots = 0;$$

la direction asymptotique $y=0$ ou l'axe des z correspond à un point double; car si l'on pose

$$y = kt$$

le premier membre de l'équation précédente est divisible par t^2, quel que soit k. Nous obtiendrons les tangentes en égalant à zéro le coefficient de t^2, on a ainsi

$$Ck^2+B_1k=0, \quad \text{ou} \quad Cy^2+B_1yt=0;$$

ce sont précisément les deux droites intersections du cylindre I' par le plan $x=0$; la proposition (1°.) se trouve ainsi démontrée.

Le plan des xz ou $y=0$ est tangent au cylindre asymptote; or l'équation de la section de la surface par ce plan est

$$(\cdots+Ax^2z^{m-2})+t(\cdots+a_1x^2z^{m-3})+t^2(\cdots+A_2xz^{m-3})+\cdots = 0;$$

la direction asymptotique $x=0$ ou l'axe des z correspond à un point double; car si l'on pose

$$x = kt$$

le premier membre de l'équation précédente est divisible par t^2, quel que soit k. Nous obtiendrons les tangentes en égalant à zéro le coefficient de t^2, on a ainsi

$$k^2=0, \quad \text{ou} \quad x^2=0;$$

le point à l'infini est donc un point de rebroussement; ce qui démontre la proposition (2°.).

On établira de la même manière la proposition (3°.) en prenant pour axe des z la ligne des centres du cylindre asymptote, et, pour plan des xz, un des plans asymptotes de ce cylindre.

16. Parmi les tangentes qui forment le *cylindre asymptote*, il y en a qui ont avec la surface un contact d'ordre plus élevé que le premier, c. à. d. qui rencontrent la surface en *quatre* points coincidant avec le point I.

Nous obtiendrons ces tangentes en égalant à zéro les coefficients de t^2 et t^3 dans l'équation (6.); on trouve d'abord la relation (28.) qui, par l'élimination de λ, μ, ν, nous conduit à l'équation (30.) du cylindre asymptote.

En égalant à zéro le coefficient de t^3, on a (en conservant la notation symbolique)

$$(33.)\quad \left\{\begin{matrix} \left\{\lambda\frac{\partial}{\partial\alpha}+\mu\frac{\partial}{\partial\beta}+\nu\frac{\partial}{\partial\gamma}\right\}^3\varphi_m+3\left\{\lambda\frac{\partial}{\partial\alpha}+\mu\frac{\partial}{\partial\beta}+\nu\frac{\partial}{\partial\gamma}\right\}^2\varphi_{m-1} \\ +6\left\{\lambda\frac{\partial}{\partial\alpha}+\mu\frac{\partial}{\partial\beta}+\nu\frac{\partial}{\partial\gamma}\right\}\varphi_{m-2}+6\varphi_{m-3}(\alpha,\beta,\gamma) \end{matrix}\right\} = 0.$$

Si, entre cette équation et les relations (5.) nous éliminons λ, μ, ν, nous

aurons l'équation d'une seconde surface sur laquelle doivent se trouver les tangentes en question que je désignerai encore sous le nom de *tangentes inflexionnelles*.

Par la substitution indiquée l'équation (33.) devient

$$(34.)\quad \left\{\begin{array}{l} \left\{(x-\alpha\varrho)\frac{\partial}{\partial\alpha}+(y-\beta\varrho)\frac{\partial}{\partial\beta}+(z-\gamma\varrho)\frac{\partial}{\partial\gamma}\right\}^3\varphi_m \\ \qquad +3t\left\{(x-\alpha\varrho)\frac{\partial}{\partial\alpha}+(y-\beta\varrho)\frac{\partial}{\partial\beta}+(z-\gamma\varrho)\frac{\partial}{\partial\gamma}\right\}^2\varphi_{m-1} \\ +6t^2\left\{(x-\alpha\varrho)\frac{\partial}{\partial\alpha}+(y-\beta\varrho)\frac{\partial}{\partial\beta}+(z-\gamma\varrho)\frac{\partial}{\partial\gamma}\right\}\varphi_{m-2}+6t^3\varphi_{m-3}(\alpha,\beta,\gamma) \end{array}\right\} = 0.$$

Maintenant développons suivant les puissances de ϱ l'équation (34.); rappelons les hypothèses (27.)

$$(27.)\quad \frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha}=0,\ \frac{\partial\varphi_m}{\partial\beta}=0,\ \frac{\partial\varphi_m}{\partial\gamma}=0;\ \varphi_{m-1}(\alpha,\beta,\gamma)=0;\ \text{et}\ \varphi_m(\alpha,\beta,\gamma)=0,$$

équations dont la dernière est un conséquence des trois premières, et remarquons que pour des fonctions homogènes du degré n on a les identités

$$(35.)\quad \left\{\begin{array}{ll} (1^\circ.) & \alpha\frac{\partial f}{\partial\alpha}+\beta\frac{\partial f}{\partial\beta}+\gamma\frac{\partial f}{\partial\gamma} = nf(\alpha,\beta,\gamma); \\ (2^\circ). & \left\{\begin{array}{l}\alpha^2\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}+\beta^2\frac{\partial^2 f}{\partial\beta^2}+\gamma^2\frac{\partial^2 f}{\partial\gamma^2}+2\alpha\beta\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta}+2\alpha\gamma\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\gamma}+2\beta\gamma\frac{\partial^2 f}{\partial\beta\partial\gamma} \\ \qquad = n(n-1)f(\alpha,\beta,\gamma);\end{array}\right. \\ (3^\circ.) & \left\{\begin{array}{l}\alpha^3\frac{\partial^3 f}{\partial\alpha^3}+\beta^3\frac{\partial^3 f}{\partial\beta^3}+\gamma^3\frac{\partial^3 f}{\partial\gamma^3}+3\alpha^2\beta\frac{\partial^3 f}{\partial\alpha^2\partial\beta}+3\alpha\beta^2\frac{\partial^3 f}{\partial\alpha\partial\beta^2} \\ +3\alpha^2\gamma\frac{\partial^3 f}{\partial\alpha^2\partial\gamma}+3\alpha\gamma^2\frac{\partial^3 f}{\partial\alpha\partial\gamma^2}+3\beta^2\gamma\frac{\partial^3 f}{\partial\beta^2\partial\gamma}+3\beta\gamma^2\frac{\partial^3 f}{\partial\beta\partial\gamma^2}+6\alpha\beta\gamma\frac{\partial^3 f}{\partial\alpha\partial\beta\partial\gamma} \\ \qquad = n(n-1)(n-2)f(\alpha,\beta,\gamma).\end{array}\right. \end{array}\right.$$

En vertu de la troisième des relations (35.) le coefficient de ϱ^3 est nul.

D'après la seconde des relations (35.), le coefficient de ϱ^2 se réduit à

$$3(m-1)(m-2)\left[x\frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha}+y\frac{\partial\varphi_m}{\partial\beta}+z\frac{\partial\varphi_m}{\partial\gamma}+t\varphi_{m-1}(\alpha,\beta\,\gamma)\right],$$

quantité nulle par suite des hypothèses (27.).

Enfin, en ayant égard à la première des identités (35.), le coefficient de ϱ est, abstraction faite du facteur $-3(m-1)$,

$$\left[\begin{array}{l} x^2\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha^2}+y^2\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta^2}+z^2\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma^2}+2xy\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\beta}+2xz\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\gamma}+2yz\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\partial\gamma} \\ \quad +2t\left(x\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\alpha}+y\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\beta}+z\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\gamma}\right)+2t^2\varphi_{m-2}(\alpha,\beta,\gamma) \end{array}\right];$$

or cette expression est celle à laquelle nous conduit la relation (28.) lorsqu'on y remplace λ, μ, ν, par leurs valeurs (5.); cette quantité est donc nulle aussi, puisque nous devons tenir compte de cette relation.

Par conséquent, les *tangentes inflexionnelles* doivent se trouver sur la surface

$$(36.)\ (\Sigma)\quad \left\{\begin{array}{l} \left\{x\frac{\partial}{\partial\alpha}+y\frac{\partial}{\partial\beta}+z\frac{\partial}{\partial\gamma}\right\}^3\varphi_m+3t\left\{x\frac{\partial}{\partial\alpha}+y\frac{\partial}{\partial\beta}+z\frac{\partial}{\partial\gamma}\right\}^2\varphi_{m-1} \\ +6t^2\left\{x\frac{\partial}{\partial\alpha}+y\frac{\partial}{\partial\beta}+z\frac{\partial}{\partial\gamma}\right\}\varphi_{m-2}+6t^3\varphi_{m-3}(\alpha,\beta,\gamma) \end{array}\right\} = 0.$$

Cette surface est du *troisième ordre;* il est facile de se convaincre que c'est la polaire du 3ème ordre du point à l'infini $\left(\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma},\ t=0\right)$, ou la surface diamétrale du troisième ordre correspondant aux cordes parallèles à la génératrice $G(\alpha,\beta,\gamma)$.

Cette surface Σ et le cylindre asymptote Γ se coupent suivant six droites parallèles à la génératrice G; *il y a donc six tangentes inflexionnelles* c. à. d. *six tangentes au point double I ayant avec la surface un contact du second ordre.*

Nous allons constater que le cylindre asymptote et la surface Σ se coupent en effet suivant six droites parallèles à la génératrice G.

17. Prenons pour axe des z la direction asymptotique considérée, c. à. d. supposons

$$\alpha=0,\quad \beta=0,\quad \gamma=1,$$

et écrivons que les relations

$$(27.)\quad \frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha}=0,\quad \frac{\partial\varphi_m}{\partial\beta}=0,\quad \frac{\partial\varphi_m}{\partial\gamma}=0;\quad \varphi_{m-1}(\alpha,\beta,\gamma)=0,$$

sont satisfaites.

On constatera, sans difficulté, que les fonctions φ_m, φ_{m-1} doivent avoir les formes suivantes

$$(37.)\left\{\begin{array}{l} \varphi_m(x,y,z)=\cdots+(ax^3+3bx^2y+3cxy^2+dy^3)z^{m-3}+(Ax^2+2Bxy+Cy^2)z^{m-2}; \\ \varphi_{m-1}(x,y,z)=\cdots\cdots+(a_1x^2+2b_1xy+c_1y^2)z^{m-3}+(A_1x+B_1y)z^{m-2}; \\ \varphi_{m-2}(x,y,z)=\cdots\cdots\cdots+(a_2x+b_2y)z^{m-3}+A_2z^{m-2}; \\ \varphi_{m-3}(x,y,z)=\cdots\cdots\cdots+(a_3x+b_3y)z^{m-4}+A_3z^{m-3}; \end{array}\right.$$

nous avons écrit en même temps les fonctions φ_{m-2}, φ_{m-3}, qui seront nécessaires pour former les équations du cylindre asymptote et de la surface Σ.

En prenant pour axe des z la direction asymptotique, on trouve que les équations de ces deux surfaces sont respectivement:

Cylindre asymptote

$$(38.)\quad (\Gamma) \qquad Ax^2+2Bxy+Cy^2+t(A_1x+B_1y)+A_2t^2 = 0;$$

surface Σ

$$(39.)\quad (\Sigma) \quad \begin{cases} 0 = \\ ax^3+3bx^2y+3cxy^2+dy^3+(m-2)(Ax^2+2Bxy+Cy^2)z \\ +t[a_1x^2+2b_1xy+c_1y^2+(m-2)(A_1x+B_1y)z]+t^2[a_2x+b_2y+(m-2)A_2z]+A_3t^3. \end{cases}$$

Ces formules nous seront extrêmement utiles pour la discussion des points doubles.

18. Revenons maintenant à l'objet que nous avions en vue, savoir l'intersection des deux surfaces Γ et Σ.

Le cylindre asymptote Γ a pour équation

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+t(A_1x+B_1y)+A_2t^2 = 0;$$

l'équation de la surface Σ peut s'écrire

$$\left.\begin{array}{l} ax^3+3bx^2y+3cxy^2+dy^3+t(a_1x^2+2b_1xy+c_1y^2)+t^2(a_2x+b_2y)+A_3t^3 \\ \qquad +(m-2)z[Ax^2+2Bxy+Cy^2+t(A_1x+B_1y)+A_2t^2] \end{array}\right\} = 0;$$

or la seconde parenthèse est nulle si l'on a égard à la première équation; donc les points communs à la surface Σ et au cylindre asymptote sont communs aux deux surfaces

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+t(A_1x+B_1y)+A_2t^2 = 0,$$
$$ax^3+3bx^2y+3cxy^2+dy^3+t(a_1x^2+2b_1xy+c_1y^2)+t^2(a_2x+b_2y)+A_3t^3 = 0.$$

Mais ces deux surfaces sont deux cylindres parallèles à l'axe des z; donc

Le cylindre asymptote de la surface U coupe la surface Σ suivant six droites parallèles à la direction asymptotique; ces six droites ont avec la surface, au point double à l'infini, un contact proprement dit du second ordre c. à. d. rencontrent la surface en quatre points coincidents.

Les équations (38.) et (39.) nous montrent immédiatement que le point à l'infini considéré est aussi un point double pour la surface Σ, et que le cylindre asymptote à la surface U est aussi asymptote à la surface Σ.

Remarque. Lorsque la surface U est du troisième ordre, la surface Σ n'est autre que la surface elle-même; nous pouvons donc conclure de ce qui précède que si une surface du troisième ordre a un point double à l'infini, le cylindre asymptote correspondant à ce point double coupe la surface suivant six droites parallèles à la direction asymptotique.

19. Avant de nous occuper de la discussion des points doubles, il nous reste à étudier la section de la surface par un plan quelconque passant par une des tangentes inflexionnelles.

Prenons pour axe des z la tangente inflexionnelle considérée, et pour plan des xz le plan tangent au cylindre asymptote suivant cette arête; nous nous servirons donc des équations (38.) et (39.), et nous écrirons que l'axe des z appartient aux deux surfaces Γ et Σ et que le plan des xz est tangent au cylindre. Nous obtenons ainsi les conditions

$$A_2 = 0, \quad A_3 = 0, \quad A_1 = 0.$$

Cherchons l'intersection de la surface par le plan des xz qui est tangent au cylindre asymptote suivant une tangente inflexionnelle, et par le plan des yz qu'on peut regarder comme un plan quelconque passant par cette tangente, en ayant égard à la forme (37.) des fonctions φ_m, φ_{m-1}, φ_{m-2}, φ_{m-3} et aux dernières relations.

La section de la surface par le plan des yz ou $x=0$ est

$$(\cdots + Cy^2z^{m-2}) + t(\cdots + B_1yz^{m-2}) + t^2(\cdots + b_2yz^{m-3}) + t^3(\cdots + b_3yz^{m-4}) + \cdots = 0;$$

la direction asymptotique $y=0$ ou l'axe des z correspond à un point double, car en posant

$$y = kt$$

le premier membre de l'équation est divisible par t^2; on aura les tangentes en égalant à zéro le coefficient de t^2, ce qui donne

$$Ck^2 + B_1k = 0, \quad \text{ou} \quad Cy^2 + B_1yt = 0;$$

lorsqu'on fait $y=0$ le premier membre de l'équation précédente est divisible par t^4, donc l'axe des z est, pour le point double, une tangente d'inflexion.

La section de la surface par le plan xz ou $y=0$ est

$$(\cdots + Ax^2z^{m-2}) + t(\cdots + a_1xz^{m-3}) + t^2(\cdots + a_2xz^{m-3}) + t^3(\cdots + a_3xz^{m-4}) + \cdots = 0;$$

la direction asymptotique $x=0$ ou l'axe des z correspond à un point double; car, en posant $x=kt$, on trouve que le premier membre de l'équation est divisible par t^2; on aura les tangentes en égalant à zéro le coefficient de t^2, ce qui donne

$$Ak^2 = 0, \quad \text{ou} \quad x^2 = 0;$$

et, lorsqu'on fait $x=0$, le premier membre de l'équation précédente est divisible par t^4; on a donc un point de rebroussement de deuxième espèce, car la tangente de rebroussement a un contact du second ordre.



20. Résumons les propriétés principales des points doubles à l'infini.

Résumé.

En un point double I à l'infini sur une surface, les tangentes proprement dites forment un cylindre du second degré parallèle à la direction asymptotique G sur laquelle se trouve le point I; la droite G est une arête double du cône des directions asymptotiques, c'est une condition nécessaire à l'existence d'un point double, mais non suffisante.

Un plan quelconque passant par le point double c. à. d. parallèle à la droite G coupe la surface suivant une courbe ayant un point double à l'infini, les tangentes en ce point double sont les intersections du cylindre asymptote par le plan sécant.

Un plan tangent quelconque au cylindre asymptote coupe la surface suivant une courbe ayant un point de rebroussement en I à l'infini, la tangente de rebroussement est la génératrice de contact et a avec la courbe un contact du premier ordre; c'est un rebroussement de première espèce.

Les plans asymptotes du cylindre (lesquels sont parallèles aux deux plans tangents au cône des directions asymptotiques suivant l'arête double G) coupent la surface suivant une courbe ayant un point de rebroussement à l'infini; la tangente de rebroussement est la génératrice de contact, laquelle est aussi à l'infini.

Parmi les génératrices du cylindre asymptote, il y en a *six*, que je nommerai *tangentes inflexionnelles*, qui rencontrent la surface en I en quatre points coincidents. La polaire Σ du troisième ordre du point I à l'infini a ce point pour point double et a même cylindre asymptote que la surface proposée; le cylindre asymptote et la surface Σ se coupent suivant six droites parallèles à la génératrice G; ce sont les six tangentes inflexionnelles.

Un plan quelconque passant par une tangente inflexionnelle coupe la surface suivant une courbe ayant un point double en I à l'infini; une des tangentes en ce point double est la tangente inflexionnelle, laquelle a avec la courbe un contact du second ordre; c'est donc une tangente d'inflexion. Le plan tangent au cylindre suivant une tangente inflexionnelle coupe la surface suivant une courbe ayant un point de rebroussement à l'infini; la tangente de rebroussement est la tangente inflexionnelle, laquelle a un contact du second ordre avec la courbe; c'est un rebroussement de deuxième espèce.

II. Discussion des points doubles à l'infini.

21. Nous classerons les variétés d'un point double d'après la nature du cylindre asymptote correspondant à ce point.

1er cas. *Le cylindre asymptote est un cylindre parabolique.*

Les propriétés générales résumées dans le no. 20 ont encore lieu dans ce cas; seulement la section, dont le point de rebroussement a pour tangente une droite à l'infini, est faite ici par le plan à l'infini, car le plan asymptote du cylindre parabolique est à l'infini; ce plan est parallèle au plan touchant le cône des directions asymptotiques suivant l'arête G, laquelle est alors une arête de rebroussement (car les termes du second degré de l'équation (30.) forment un carré parfait, et ces termes donnent en même temps les plans tangents (32.) au cône suivant l'arête double).

En outre, les plans parallèles aux plans diamétraux du cylindre parabolique coupent la surface suivant une courbe ayant un point double à l'infini, une des tangentes est à l'infini, l'autre est la génératrice à distance finie intersection du cylindre par le plan sécant.

22. 2ème cas. *Le cylindre asymptote se réduit à deux plans qui se coupent.*

Prenons pour axe des z la droite intersection des deux plans, et un de ces plans pour plan des xz; nous servant alors des équations (38.), (39.) et (37.), il faudra supposer

$$A=0,\quad A_1=0,\quad B_1=0;\quad A_2=0;$$

les surfaces Γ et Σ auront alors pour équations respectives

$$(\Gamma)\qquad 2Bxy+Cy^2 = 0;$$

$$(\Sigma)\qquad \left\{\begin{array}{c} ax^3+3bx^2y+3cxy^2+dy^3+(m-2)[2Bxy+Cy^2]z \\ +t(a_1x^2+2b_1xy+c_1y^2)+t^2(a_2x+b_2y)+A_3t^3 \end{array}\right\} = 0;$$

et les fonctions φ_m, φ_{m-1}, φ_{m-2}, φ_{m-3} se réduiront à la forme

$$\left\{\begin{array}{lcl} \varphi_m &=& \cdots\cdots+(ax^3+3bx^2y+3cxy^2+dy^3)z^{m-3}+(2Bxy+Cy^2)z^{m-2}; \\ \varphi_{m-1} &=& \cdots\cdots\cdots\cdots+(a_1x^2+2b_1xy+c_1y^2)z^{m-3}; \\ \varphi_{m-2} &=& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+(a_2x+b_2y)z^{m-3}; \\ \varphi_{m-3} &=& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+(a_3x+b_3y)z^{m-4}+A_3z^{m-3}. \end{array}\right.$$

Nous pouvons regarder le plan des yz comme un plan quelconque passant par l'axe du cylindre asymptote (deux plans qui se coupent); en faisant $x=0$, nous obtiendrons pour équation de la section de la surface par ce plan:

$$(\cdots+Cy^2z^{m-2})+t(\cdots+c_1y^2z^{m-3})+t^2(\cdots+b_2yz^{m-3})+t^3(\cdots+A_3z^{m-3})+\cdots=0;$$

la direction asymptotique $y=0$ ou l'axe des z correspond à un point double; les deux tangentes en ce point double se confondent avec l'axe des z, et le contact est du premier ordre; on a donc un rebroussement de première espèce à l'infini, la droite oz est la tangente de rebroussement.

La section de la surface par le plan des xz $(y=0)$ c. à. d. par un des plans asymptotes a pour équation

$$(\cdots+ax^3z^{m-3})+t(\cdots+a_1x^2z^{m-3})+t^2(\cdots+a_2xz^{m-3})+t^3(\cdots+A_3z^{m-3})+\cdots=0;$$

la direction asymptotique $x=0$ ou l'axe des z correspond à un point triple de la section, car si l'on pose

$$x = kt,$$

le premier membre de l'équation précédente est divisible par t^3; les tangentes en ce point triple seront données par l'équation

$$ak^3+a_1k^2+a_2k+A_3=0, \quad \text{ou} \quad ax^3+a_1x^2t+a_2xt^2+A_3t^3=0;$$

ces trois droites sont précisément les intersections de la surface Σ par le plan $y=0$, c. à. d. les trois tangentes inflexionnelles situées dans le plan asymptote considéré.

Si l'on cherche l'intersection de la surface par le plan

$$x = ht$$

qu'on peut regarder comme un plan quelconque parallèle à la direction asymptotique, on trouve une courbe ayant un point double à l'infini, les deux tangentes sont les intersections du plan sécant avec les deux plans asymptotes constituant le cylindre asymptote.

Considérons enfin l'intersection de la surface par un plan quelconque parallèle à l'un des plans asymptotes, $y=0$ par exemple; soit

$$y = ht;$$

l'équation de la section par ce plan est

$$\left.\begin{array}{l}[\cdots+(ax^3+3bhx^2t+3ch^2xt^2+dh^3t^3)z^{m-3}+(2Bhxt+Ch^2t^2)z^{m-2}]\\ +t[\cdots+(a_1x^2+2b_1hxt+c_1h^2t^2)z^{m-3}]+t^2[\cdots+(a_2x+b_2ht)z^{m-3}]+t^3[\cdots+A_3z^{m-3}]+\cdots\end{array}\right\}=0;$$

ou, en ordonnant,

$$x^3(\cdots+az^{m-3})+tx(\cdots+2Bhz^{m-2})+t^2(\cdots+Ch^2z^{m-2})+t^3(\cdots)+\cdots = 0.$$

La direction asymptotique $x=0$ correspond à un point double, car si l'on pose

$$t = kx,$$

on voit que le premier membre de l'équation précédente est divisible par x^2;

les tangentes au point double sont données par l'équation

$$2Bhk + Ch^2k^2 = 0, \quad \text{ou} \quad 2Bxt + Cht^2 = 0;$$

une des tangentes est la droite à l'infini $t = 0$, l'autre est la droite $2Bx + Cht = 0$; il est visible que cette dernière droite est l'intersection du plan sécant $y - ht = 0$ avec le second plan asymptote $2Bx + Cy = 0$.

Ainsi:

Le cylindre asymptote se réduisant à deux plans qui se coupent (que je nommerai plans asymptotes du point double), l'axe des deux plans asymptotes est parallèle à la direction asymptotique; les tangentes inflexionnelles sont les intersections de la surface polaire Σ par chacun des plans asymptotes.

Tout plan passant par l'intersection des deux plans asymptotes coupe la surface suivant une courbe ayant un point de rebroussement en I à l'infini; pour toutes ces sections la tangente de rebroussement est l'intersection des deux plans asymptotes; on pourrait donner à ce point double particulier le nom de point de rebroussement conique, et à la tangente commune celui d'axe de rebroussement.

Chaque plan asymptote coupe la surface suivant une courbe ayant un point triple en I à l'infini; les trois tangentes en ce point triple sont les trois tangentes inflexionnelles situées dans le plan asymptote considéré.

Un plan quelconque parallèle à la génératrice G coupe la surface suivant une courbe ayant un point double en I; les deux tangentes sont les intersections des deux plans asymptotes par le plan sécant.

Un plan quelconque parallèle à l'un des plans asymptotes coupe la surface suivant une courbe ayant un point double à l'infini; l'une des tangentes est l'intersection du second plan asymptote par le plan sécant, et la seconde tangente est à l'infini, parallèle à la génératrice G.

23. 3ème cas. *Le cylindre asymptote se réduit à deux plans parallèles.*

Prenons la direction asymptotique pour axe des z et l'un des plans pour plan des xz; nous servant alors des équations (38.) et (39.), il faudra supposer

$$A = 0, \quad B = 0; \quad A_1 = 0, \quad A_2 = 0;$$

les surfaces Γ et Σ auront pour équations respectives

$$(\Gamma) \qquad Cy^2 + B_1yt = 0,$$

$$(\Sigma) \quad \left\{ \begin{array}{c} ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 + (m-2)Cy^2z + t[a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2] \\ + (m-2)B_1yzt + t^2(a_2x + b_2y) + A_3t^3 \end{array} \right\} = 0;$$

et les fonctions φ_m, φ_{m-1}, φ_{m-2}, ... se réduiront à la forme

$$\varphi_m = \cdots\cdots + (ax^3+3bx^2y+3cxy^2+dy^3)z^{m-3}+Cy^2z^{m-2};$$
$$\varphi_{m-1} = \cdots\cdots\cdots + (a_1x^2+2b_1xy+c_1y^2)z^{m-3}+B_1yz^{m-2};$$
$$\varphi_{m-2} = \cdots\cdots\cdots\cdots + (a_2x+b_2y)z^{m-3};$$
$$\varphi_{m-3} = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + A_3z^{m-3}.$$

La section de la surface par le plan des xz ou $y=0$, lequel est un des deux plans asymptotes, a pour équation

$$(\cdots+ax^3z^{m-3})+t(\cdots+a_1x^2z^{m-3})+t^2(\cdots+a_2xz^{m-3})+t^3(\cdots+A_3z^{m-3})+\cdots=0.$$

La direction asymptotique $x=0$ ou l'axe des z correspond à un point triple; si l'on pose $x=kt$, on aura les tangentes en ce point triple en égalant à zéro le coefficient de t^3, ce qui donne

$$ak^3+a_1k^2+a_2k+A_3=0, \quad \text{ou} \quad ax^3+a_1x^2t+a_2xt^2+A_3t^3=0;$$

on voit que ces trois droites sont les intersections de la surface Σ par le plan $y=0$, c. à. d. les trois tangentes inflexionnelles situées dans le plan asymptote considéré.

Cherchons maintenant l'intersection de la surface par un plan quelconque parallèle aux plans asymptotes, savoir par

$$y = ht;$$

on a pour équation de la section:

$$\left.\begin{array}{l}[\cdots+(ax^3+3bhx^2t+3ch^2xt^2+dh^3t^3)z^{m-3}+Ch^2t^2z^{m-2}]\\ +t[\cdots+(a_1x^2+2b_1hxt+c_1h^2t^2)z^{m-3}+B_1htz^{m-2}]\\ +t^2[\cdots+(a_2x+b_2ht)z^{m-3}]+t^3[\cdots+A_3z^{m-3}]+\cdots\end{array}\right\}=0;$$

ou, en ordonnant,

$$\left.\begin{array}{l}(\cdots+ax^3z^{m-3})+t[\cdots+(3bh+a_1)x^2z^{m-3}]+t^2[\cdots+(Ch^2+B_1h)z^{m-2}]\\ \qquad +t^3[\cdots+(dh^3+c_1h^2+b_2h+A_3)z^{m-3}]+\cdots\end{array}\right\}=0.$$

La direction asymptotique $x=0$ ou l'axe des z correspond à un point double; et en posant $t=kx$, on trouve, en égalant à zéro le coefficient de x^2,

$$k^2=0, \quad \text{ou} \quad t^2=0;$$

on a donc un point de rebroussement, la tangente de rebroussement est à l'infini.

Le plan des yz peut être regardé comme un plan quelconque parallèle à la direction asymptotique; la section de la surface par ce plan possède un point double à l'infini, les tangentes en ce point double sont les intersections des deux plans asymptotes parallèles par le plan sécant.

Ainsi:

Lorsque le cylindre asymptote se réduit à deux plans parallèles (que je nommerai plans asymptotes du point double), tout plan parallèle aux plans asymptotes coupe la surface suivant une courbe ayant un rebroussement en I à l'infini, la tangente de rebroussement est à l'infini dans le plan sécant et parallèle à la direction asymptotique; le point double de la surface peut encore être désigné sous le nom de point de rebroussement conique, mais l'axe de rebroussement est à l'infini, parallèle à la direction asymptotique.

Chacun des deux plans asymptotes coupe la surface suivant une courbe ayant un point triple à l'infini; les tangentes en ce point triple sont les trois tangentes inflexionnelles situées dans le plan asymptote considéré.

Un plan quelconque parallèle à la direction asymptotique coupe la surface suivant une courbe ayant un point double à l'infini, les tangentes en ce point sont les intersections du plan sécant avec les deux plans asymptotes.

24. 4ème cas. *Le cylindre asymptote se réduit à deux plans coincidents.*

Prenons pour axe des z la direction asymptotique, et, pour plan des xz, le plan auquel se réduit le cylindre asymptote; on devra avoir (équation (38.))

$$A=0,\quad B=0;\quad A_1=0,\quad B_1=0;\quad A_2=0;$$

le cylindre asymptote et la surface Σ ont alors respectivement pour équations

$$(\Gamma)\qquad y^2 = 0,$$

$$(\Sigma)\qquad \begin{cases} ax^3+3bx^2y+3cxy^2+dy^3+(m-2)Czy^2+t(a_1x^2+2b_1xy+c_1y^2) \\ \qquad +t^2(a_2x+b_2y)+A_3t^3 = 0; \end{cases}$$

et les fonctions φ_m, φ_{m-1}, ... prennent la forme

$$\begin{aligned} \varphi_m &= \cdots\cdots+(ax^3+3bx^2y+3cxy^2+dy^3)z^{m-3}+Cy\,z^{m-2}; \\ \varphi_{m-1} &= \cdots\cdots\cdots+(a_1x^2+2b_1xy+c_1y^2)z^{m-3}; \\ \varphi_{m-2} &= \cdots\cdots\cdots\cdots+(a_2x+b_2y)\,z^{m-3}; \\ \varphi_{m-3} &= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+(a_3x+b_3y)z^{m-4}+A_3z^{m-3}. \end{aligned}$$

Le plan des xz ou $y=0$ coupe la surface suivant la courbe

$$(\cdots+ax^3z^{m-3})+t(\cdots+a_1x^2z^{m-3})+t^2(\cdots+a_2xz^{m-3})+t^3(\cdots+a_3xz^{m-4}+A_3z^{m-3})+\cdots=0;$$

la direction asymptotique $x=0$ ou l'axe des z correspond à un point triple; les tangentes inflexionnelles se réduisent, dans le cas actuel, à trois systèmes de deux droites confondues; ces trois droites sont les tangentes au point triple.

Le plan des yz peut être regardé comme un plan quelconque parallèle à la direction asymptotique; la section de la surface par ce plan a pour équation

$$(\cdots+Cy^2z^{m-2})+t(\cdots+c_1y^2z^{m-3})+t^2(\cdots+b_2yz^{m-3})+t^3(\cdots+b_3yz^{m-4}+A_3z^{m-3})+\cdots=0;$$

la direction asymptotique $y=0$ ou l'axe des z correspond à un point double, les deux tangentes au point double se confondent avec l'axe des z; c'est donc un point de rebroussement.

Si l'axe des z est une tangente inflexionnelle, c. a. d. si $A_3=0$, la tangente de rebroussement a un contact du second ordre: c'est un rebroussement de 2ème espèce.

L'intersection de la surface par un plan quelconque parallèle au plan asymptote, tel que $y=ht$, a pour équation

$$[\cdots+(ax^3+3bhx^2t+3ch^2xt^2+dh^3t^3)z^{m-3}+Ch^2t^2z^{m-2}]+t[\cdots+(a_1x^2+2b_1hxt+c_1h^2t^2)z^{m-3}]$$
$$+t^2[\cdots+(a_2x+b_2ht)z^{m-3}]+t^3[\cdots+A_3z^{m-3}]+\cdots=0,$$

ou, en ordonnant,

$$\left.\begin{array}{l}(\cdots+ax^3z^{m-3})+t[\cdots+(3bh+a_1)x^2z^{m-3}]+t^2[\cdots+Ch^2z^{m-2}]\\ \quad+t^3[\cdots+(dh^3+c_1h^2+b_2h+A_3)z^{m-3}]+\cdots\end{array}\right\}=0.$$

La direction asymptotique $x=0$ ou l'axe des z correspond à un point double; en posant $t=kx$ et en égalant à zéro le coefficient de x^2, on a pour les tangentes

$$k^2=0,\quad \text{ou}\quad t^2=0;$$

on a donc un point de rebroussement dont la tangente est à l'infini.

Ainsi:

Lorsque le cylindre asymptote se réduit à deux plans coincidents (que je nommerai plan asymptote du point double), un plan quelconque parallèle à la direction asymptotique coupe la surface suivant une courbe ayant en I à l'infini un point de rebroussement, la tangente de rebroussement est l'intersection du plan sécant avec le plan asymptote; c'est un rebroussement de première espèce; le rebroussement est de deuxième espèce, lorsque le plan sécant passe par une des tangentes inflexionnelles. Ainsi, toutes les tangentes de rebroussement, au lieu de se confondre comme dans le deuxième cas avec une seule droite, sont ici toutes dans un même plan asymptote. On pourrait donc donner à ce point double à l'infini le nom de point de rebroussement plan, et le plan asymptote serait le plan de rebroussement.

Le plan asymptote coupe la surface suivant une courbe ayant un point triple à l'infini, les tangentes en ce point triple sont les trois tangentes inflexionnelles, intersections de la surface Σ par le plan asymptote.

Un plan quelconque parallèle au plan asymptote coupe la surface suivant une courbe ayant un point de rebroussement à l'infini, la tangente de rebroussement est à l'infini, parallèle à la génératrice G.

25. 5[ième] cas. *Le cylindre asymptote se réduit à deux plans, dont un à l'infini.*

Si l'on se reporte à l'équation générale (30.), on voit que ce cas se présentera lorsque la direction asymptotique G sera une arête triple du cône C et une arête simple pour le cône $\varphi_{m-1}(x, y, z) = 0$.

En prenant pour axe des z la direction asymptotique et en supposant que le plan des xz soit le plan à distance finie, on à d'après les équations (38.), (39.), (37.),

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0; \quad A_1 = 0, \quad A_2 = 0;$$

d'où

$$(\Gamma) \qquad B_1 yt = 0,$$

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 + t[a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2 + (m-2)B_1yz] \\ \qquad + t^2(a_2x + b_2y) + A_3t^3 = 0; \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi_m &= \cdots\cdots + (ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3)z^{m-3}; \\ \varphi_{m-1} &= \cdots\cdots\cdots + (a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2)z^{m-3} + B_1yz^{m-2}; \\ \varphi_{m-2} &= \cdots\cdots\cdots\cdots + (a_2x + b_2y)z^{m-3}; \\ \varphi_{m-3} &= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + (a_3x + b_3y)z^{m-4} + A_3z^{m-3}. \end{aligned}$$

Trois des tangentes inflexionnelles sont les intersections du plan à l'infini avec les trois plans

$$ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 = 0;$$

et les trois autres sont

$$y = 0, \quad ax^3 + a_1x^2t + a_2xt^2 + A_3t^3 = 0.$$

L'intersection de la surface par le plan des yz, que nous pouvons regarder comme un plan quelconque parallèle à la direction asymptotique, a pour équation

$$(\cdots + dy^3z^{m-3}) + t(\cdots + B_1yz^{m-2}) + t^2(\cdots + b_2yz^{m-3}) + t^3(\cdots + A_3z^{m-3}) + \cdots = 0.$$

La direction asymptotique $y = 0$ ou l'axe des z correspond à un point double; en posant successivement $y = kt$, puis $t = k_1y$, on obtiendra les deux tangentes

en ce point double, qui sont: l'une, l'intersection du plan sécant avec le plan asymptote à distance finie; l'autre, à l'infini. Lorsque l'axe des z est une des tangentes inflexionnelles, la première tangente à un contact du second ordre.

Par une analyse semblable à celle que nous avons déjà repétée plusieurs fois, on constatera que l'intersection de la surface par un plan parallèle au plan des xz a un point de rebroussement à l'infini dont la tangente est elle-même à l'infini.

Ainsi:

Lorsque le cylindre asymptote se réduit à deux plans dont un est à l'infini, la direction asymptotique G est une arête triple du cône C et une arête simple pour le cône $\varphi_{m-1}(x, y, z) = 0$; trois des tangentes inflexionnelles sont dans le plan à l'infini. Le plan asymptote à distance finie est parallèle au plan tangent au cône $\varphi_{m-1}(x, y, z) = 0$ suivant l'arête G; les trois tangentes inflexionnelles à l'infini sont respectivement dans les plans tangents au cône C suivant l'arête triple G.

Tout plan parallèle à la direction asymptotique coupe la surface suivant une courbe ayant un point double à l'infini; une des tangentes est à l'infini, parallèle à la direction asymptotique; l'autre est l'intersection par le plan sécant du plan asymptote à distance finie.

Tout plan parallèle au plan asymptote à distance finie coupe la surface suivant une courbe ayant un point de rebroussement à l'infini, la tangente de rebroussement est à l'infini, parallèle à la direction asymptotique.

Les deux plans asymptotes coupent la surface suivant une courbe ayant un point triple à l'infini, les tangentes en ce point sont les tangentes inflexionnelles.

26. 6ème cas. *Le cylindre asymptote se réduit à deux plans coincidents et à l'infini.*

Si l'on se reporte à l'équation générale (30.), on voit que ce cas se présentera lorsque la direction asymptotique G sera une arête triple du cône C et une arête double pour le cône $\varphi_{m-1}(x, y, z) = 0$.

On a alors, d'après les équations (37.), (38.), (39.):

$$A = 0,\quad B = 0,\quad C = 0;\quad A_1 = 0,\quad B_1 = 0;$$

$$(\Sigma)\begin{cases} ax^3+3bx^2y+3cxy^2+dy^3+t(a_1x^2+2b_1xy+c_1y^2)+t^2[a_2x+b_2y+(m-2)A_2z]+A_3t^3 \\ \qquad = 0; \end{cases}$$

$$\varphi_m = \cdots\cdots + (ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3)z^{m-3};$$
$$\varphi_{m-1} = \cdots\cdots\cdots + (a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2)z^{m-3};$$
$$\varphi_{m-2} = \cdots\cdots\cdots\cdots + (a_2x + b_2y)z^{m-3} + A_2z^{m-2};$$
$$\varphi_{m-3} = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + A_3z^{m-3}.$$

Les tangentes inflexionnelles se réduisent à trois groupes de deux droites coincidentes situées dans le plan à l'infini et dans les trois plans tangents au cône C suivant l'arête triple G.

Le plan des xz peut être regardé comme un plan quelconque parallèle à la direction asymptotique; son intersection avec la surface est

$$(\cdots + ax^3z^{m-3}) + t(\cdots + a_1x^2z^{m-3}) + t^2(\cdots + A_2z^{m-2}) + t^3(\cdots + A_3z^{m-3}) + \cdots = 0;$$

la direction asymptotique $x = 0$ ou l'axe des z correspond à un point double; et, en posant $t = kx$, on trouve pour l'équation des tangentes en ce point double

$$k^2 = 0, \quad \text{ou} \quad t^2 = 0.$$

Donc:

Lorsque le cylindre asymptote se réduit à deux plans confondus avec le plan de l'infini, un plan quelconque parallèle à la direction asymptotique coupe la surface suivant une courbe ayant un point de rebroussement à l'infini, la tangente de rebroussement est à l'infini dans le plan asymptote; on a ainsi un point de rebroussement plan, mais le plan de rebroussement est à l'infini.

Le plan à l'infini coupe la surface suivant une courbe ayant un point triple en I, les tangentes en ce point sont les intersections par le plan à l'infini des trois plans tangents au cône C suivant l'arête triple G.

27. Remarque I. Il peut arriver, dans le cas d'un point double à l'infini sur la surface, que la surface Σ (36.) se réduise à un cône, ou bien à un cylindre non parallèle à la direction asymptotique; mais ceci ne se présentera que pour certaines positions particulières des tangentes inflexionnelles, lorsque, par exemple, plusieurs de ces tangentes se confondent, ou s'éloignent à l'infini, etc.... Nous obtiendrions alors des variétés du point double renfermées dans les cas particuliers que nous venons d'étudier; mais nous devons laisser de côté cet examen qui allongerait démesurément cette discussion déjà fort étendue. D'ailleurs les hypothèses que nous avons parcourues nous ont donné les cas généraux de la discussion des points doubles; ces cas doivent évidemment correspondre aux formes spéciales que peut présenter le *cylindre asymptote*.

Cependant il est important de remarquer que, dans le cas d'un point double, la surface Σ ne peut pas se réduire à ***un cylindre parallèle à la direction asymptotique***. Car, prenant la direction asymptotique pour axe des z et faisant usage de l'équation (39.), on devrait avoir

$$A=0,\quad B=0,\quad C=0;\quad A_1=0,\quad B_1=0;\quad A_2=0.$$

L'équation (38.) du cylindre asymptote se réduirait, dans ce cas, à une identité; par suite, on conclurait de l'équation générale (30.)

$$\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha^2}=0,\quad \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta^2}=0,\quad \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma^2}=0,\quad \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\,\partial\beta}=0,\quad \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\,\partial\gamma}=0,\quad \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\,\partial\gamma}=0;$$

$$\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\alpha}=0,\quad \frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\beta}=0,\quad \frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\gamma}=0;\quad \varphi_{m-2}(\alpha,\beta,\gamma)=0;$$

et on voit alors, par l'équation (6.), que ***le point I à l'infini serait un point triple de la surface.***

28. **Remarque II.** La discussion des points multiples d'ordre supérieur au second serait excessivement compliquée; elle exigerait d'ailleurs, pour être complète, des notions plus étendues que celles que nous possédons sur les courbes et les surfaces d'ordre supérieur.

Je me contenterai de signaler les cas suivants, pour montrer comment la méthode analytique se prête avec facilité à l'étude et à la discussion des points à l'infini.

I°. *Les fonctions φ_m et φ_{m-1} sont respectivement de la forme*

$$(40.)\quad \begin{cases} \varphi_m(x,y,z) = [f(x,y,z)]^2\varphi(x,y,z), \\ \varphi_{m-1}(x,y,z) = f(x,y,z)\,\psi(x,y,z). \end{cases}$$

Considérons une direction asymptotique (α,β,γ) située sur le cône

$$f(x,y,z)=0,\quad \text{de sorte que}\quad f(\alpha,\beta,\gamma)=0;$$

le point à l'infini correspondant $\left(\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma},\, t=0\right)$ est un point double de la surface; le cylindre asymptote (30.) a pour équation

$$(41.)\quad \left\{\begin{matrix}\varphi(\alpha,\beta,\gamma)\left[x\frac{\partial f}{\partial\alpha}+y\frac{\partial f}{\partial\beta}+z\frac{\partial f}{\partial\gamma}\right]^2+t\psi(\alpha,\beta,\gamma)\left[x\frac{\partial f}{\partial\alpha}+y\frac{\partial f}{\partial\beta}+z\frac{\partial f}{\partial\gamma}\right] \\ +t^2\varphi_{m-2}(\alpha,\beta,\gamma)\end{matrix}\right\}=0.$$

Cette équation représente deux plans parallèles, le point double est, par suite, un point de rebroussement conique dont l'axe est à l'infini [n°. 23].

Donc chaque point de la courbe à l'infini

$$f(x,y,z)=0,\quad t=0,$$

est un point double de la surface; ce sont des points de rebroussement conique dont l'axe est à l'infini.

Pour les directions asymptotiques, intersections des deux cônes

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad f(x, y, z) = 0,$$

les points de la courbe sont des points de rebroussement de la nature de ceux qui ont été étudiés au [n°. 25], car alors le cylindre asymptote se compose de deux plans dont un est à l'infini.

II°. *L'équation de la surface U est de la forme*

$$(42.) \quad [f(x, y, z)]^p + t\varphi_{m-1}(x, y, z) + \cdots = 0;$$

de sorte que, si q est le degré de $f(x, y, z)$, on a

$$pq = m;$$

nous supposons, en outre, que la fonction $\varphi_{m-1}(x, y, z)$ n'admet pas en facteur la fonction $f(x, y, z)$.

Considérons une direction asymptotique $G(\alpha, \beta, \gamma)$ satisfaisant à la relation

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = 0;$$

le point à l'infini $I\left(\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}, \ t = 0\right)$ est un point simple de la surface, le plan asymptote correspondant est à l'infini.

Pour mieux connaitre la nature du contact en un tel point, étudions la section de la surface par un plan quelconque passant par le point I, c. à. d. parallèle à la direction asymptotique G. On peut supposer que cette direction soit prise pour axe des z, alors

$$(1°.) \quad f(x, y, z) = \cdots + (Ax^2 + 2Bxy + Cy^2)z^{q-2} + (ax + by)z^{q-1}.$$

Le plan des xz ou $y = 0$ peut être regardé comme un plan quelconque parallèle à la droite G; la section de la surface par ce plan a pour équation

$$(\cdots + axz^{q-1})^p + t(\cdots + a_1 z^{m-1}) + t^2(\cdots + a_2 z^{m-2}) + \cdots = 0;$$

la direction asymptotique $x = 0$ ou l'axe des z correspond à un point simple; et si l'on pose $t = kx$, on a

$$x^p(\cdots + az^{q-1})^p + kx(\cdots + a_1 z^{m-1}) + k^2x^2(\cdots + a_2 z^{m-2}) + \cdots = 0.$$

Pour avoir la tangente, il faut égaler à zéro le coefficient de xz^{m-1}, ce qui donne $k = 0$; le premier membre de l'équation précédente est alors divisible par x^p; l'asymptote, laquelle est à l'infini, a donc avec la courbe un contact du $(p-1)^{\text{ème}}$ ordre.

Si dans la valeur (1°.) de $f(x, y, z)$ on suppose $a = 0$, le plan des xz est alors tangent au cône $f(x, y, z)$ des directions asymptotiques; la section par le plan $y = 0$ a, dans ce cas, pour équation

$$(\cdots + Ax^2 z^{q-2})^p + t(\cdots + a_1 z^{m-1}) + t^2(\cdots + a_2 z^{m-2}) + \cdots = 0;$$

la direction asymptotique $x = 0$ ou l'axe des z correspond à un point simple; et, si l'on pose $t = kx$, on a

$$x^{2p}(\cdots + Az^{q-2})^p + kx(\cdots + a_1 z^{m-1}) + k^2 x^2(\cdots + a_2 z^{m-2}) + \cdots = 0.$$

Pour avoir la tangente, il faut égaler à zéro le coefficient de xz^{m-1}, ce qui donne $k = 0$; le premier membre de l'équation précédente est alors divisible par x^{2p}; l'asymptote, laquelle est à l'infini, a donc avec la courbe un contact du $(2p-1)^{\text{ème}}$ ordre.

Ainsi:

Lorsque l'équation de la surface se présente sous la forme (42.), le plan à l'infini est un plan tangent multiple et touche la surface suivant la courbe à l'infini

$$f(x, y, z) = 0, \quad t = 0;$$

en chaque point de cette courbe, le contact du plan à l'infini avec la surface est du $(p-1)^{\text{ème}}$ ordre. Car, si nous considérons un de ces points, I par exemple, un plan quelconque passant par le point I coupe la surface suivant une courbe pour laquelle le point I est un point simple à l'infini, et la tangente à la courbe en ce point, laquelle tangente est aussi à l'infini, a avec la courbe un contact du $(p-1)^{\text{ème}}$ ordre; donc le plan à l'infini est tel que toutes les droites, situées dans ce plan et passant par I, c. à. d. parallèles à la direction asymptotique G, rencontrent la surface en p points coincidant avec le point I.

Le plan tangent au cône $f(x, y, z) = 0$ suivant l'arête G coupe la surface suivant une courbe pour laquelle le point I est un point simple à l'infini; la tangente à la courbe en ce point, tangente qui est elle-même à l'infini, a avec la courbe un contact du $(2p-1)^{\text{ème}}$ ordre, c. à. d. rencontre la surface en $2p$ points coincidant avec le point I.

III°. *L'équation de la surface est de la forme*

$$(43.) \qquad \varphi_m(x, y, z) = t^m.$$

Tous les plans asymptotes enveloppent le cône

$$\varphi_m(x, y, z) = 0.$$

Si nous considérons une génératrice quelconque G de ce cône, par exemple,

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}=\varrho, \quad \text{avec } \varphi_m(\alpha,\beta,\gamma)=0,$$

et si nous cherchons son intersection avec la surface, on trouve

$$\varrho^m\varphi_m(\alpha,\beta,\gamma)=t^m, \quad \text{ou} \quad t^m=0;$$

donc cette droite rencontre la surface en m points coincidant avec le point I à l'infini $\left(\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma},\ t=0\right)$.

On voit, par l'équation (6.), qu'une droite quelconque parallèle à la génératrice G ne rencontre la surface qu'en un seul point à l'infini.

Pour étudier la nature du contact au point I, prenons la direction asymptotique pour axe des z et le plan tangent au cône pour plan des xz, de sorte que

$$(11.) \qquad \varphi_m(x,y,z) \;=\; \cdots+(Ax^2+2Bxy+Cy^2)z^{m-2}+byz^{m-1}.$$

La section par le plan asymptote ou $y=0$ a pour équation

$$(\cdots+Ax^2z^{m-2})-t^m \;=\; 0;$$

la direction asymptotique $x=0$ ou l'axe des z correspond à un point double; les deux tangentes se confondent avec l'axe des z; et, pour $x=0$, le premier membre de l'équation est divisible par t^m, c. à. d. que le contact et du $(m-2)^{\text{ème}}$ ordre.

La section par un plan quelconque passant par la génératrice G, c. à. d. par le plan $x=0$ qui peut être considéré comme tel, a pour équation

$$(\cdots+Cy^2z^{m-2}+byz^{m-1})-t^m \;=\; 0;$$

la direction asymptotique $y=0$ ou l'axe des z correspond à un point simple; et si l'on pose $y=kt$, on trouve pour déterminer la tangente $k=0$, et le premier membre est alors divisible par t^m.

La section par un plan quelconque parallèle au plan asymptote, par le plan $y-kt=0$ par exemple, a pour équation

$$\cdots+(Ax^2+2Bkxt+Ck^2t^2)z^{m-2}+bktz^{m-1}-t^m \;=\; 0;$$

ou, en ordonnant,

$$x^2(\cdots+Az^{m-2})+t(\cdots+2Bkxz^{m-2}+bkz^{m-1})+t^2(\cdots)+\cdots \;=\; 0;$$

la direction asymptotique $x=0$ correspond à un point simple; et, en posant $t=k'x$, on trouve la tangente en égalant à zéro le coefficient de xz^{m-1}, ce qui donne $k'=0$, et le premier membre est divisible par x^2; l'asymptote est donc à l'infini et a avec la courbe un contact du premier ordre.

Un plan quelconque parallèle au plan des yz, $x-ht=0$ par exemple, peut être regardé comme un plan quelconque parallèle à la génératrice G; la section de la surface par ce plan a pour équation

$$\cdots+(Ah^2t^2+2Bhyt+Cy^2)z^{m-2}+byz^{m-1}-t^m = 0,$$

ou, en ordonnant,

$$(\cdots+byz^{m-1})+t(\cdots+2Bhyz^{m-2})+t^2(\cdots+Ah^2z^{m-2})+t^3(\cdots)+\cdots = 0;$$

la direction asymptotique $y=0$ correspond à un point simple; si l'on pose $y=\lambda t$, on trouve pour déterminer la tangente $\lambda=0$, et le premier membre de l'équation devient divisible par t^2 seulement.

Ainsi:

Lorsque l'équation de la surface est de la forme

$$\varphi_m(x, y, z) = t^m,$$

tous les plans asymptotes enveloppent le cône $\varphi_m(x, y, z)=0$.

Une génératrice quelconque G de ce cône rencontre la surface en m points coincidents à l'infini.

Si nous considérons le point I à l'infini sur la génératrice G, on constate que:

Le plan asymptote en I coupe la surface suivant une courbe ayant un rebroussement en I; la tangente de rebroussement, ou la génératrice G, a avec la courbe un contact du $(m-2)^{\text{ème}}$ ordre.

Un plan quelconque parallèle au plan asymptote coupe la surface suivant une courbe passant par le point I, lequel est un point simple de la courbe; l'asymptote, qui est à l'infini parallèle à la génératrice G, a avec la courbe un contact du premier ordre.

Un plan quelconque passant par la génératrice G coupe la surface suivant une courbe passant par le point I, qui est un point simple; la tangente en ce point simple est la génératrice G, laquelle a avec la courbe un contact du $(m-1)^{\text{ème}}$ ordre.

Tout plan parallèle à la génératrice G coupe la surface suivant une courbe pour laquelle le point I est un point simple; la tangente est l'intersection du plan sécant avec le plan asymptote, le contact est du premier ordre; cette droite, située dans le plan asymptote et parallèle à la génératrice G, ne rencontre donc la surface qu'en deux points coincidents; et, par suite, le plan asymptote n'a avec la surface qu'un contact du premier ordre.

IV°. Je terminerai par *l'examen du cas où la surface possède une droite double à l'infini.*

L'équation de la surface est alors de la forme

(45.) $(Ax+By+Cz)^2\varphi(x,y,z)+t(Ax+By+Cz)\psi(x,y,z)+t^2\varphi_{m-2}(x,y,z)+\cdots=0.$

Un plan quelconque passant par la droite à l'infini

$$(D)\qquad P = Ax+By+Cz=0,\quad t=0,$$

par exemple

$$Ax+By+Cz = \lambda t,$$

rencontre la surface suivant deux droites coincidant avec la droite D à l'infini, car le premier membre de l'équation est divisible par t^2, quel que soit λ; la droite D est donc une *droite double*.

Pour une direction asymptotique quelconque (α,β,γ) parallèle au plan P, c. à. d. telle, que l'on ait

$$A\alpha+B\beta+C\gamma = 0,$$

l'équation du plan asymptote se réduit à une identité; et le cylindre asymptote (30.) a pour équation

$$\varphi(\alpha,\beta,\gamma)[Ax+By+Cz]^2+t\psi(\alpha,\beta,\gamma)[Ax+By+Cz]+t^2\varphi_{m-2}(\alpha,\beta,\gamma)=0.$$

Les conclusions énoncées au n°. 28, Remarque II, I° sont applicables ici;

c. à. d. que tous les points de la droite D sont des points de rebroussement conique dont l'axe est à l'infini; les $(m-2)$ points situés sur les droites d'intersection du plan P avec le cône $\varphi(x,y,z)$ sont des points de rebroussement de la nature de ceux qui ont été étudiés au n°. 25, le cylindre asymptote se compose alors de deux plans dont un est à l'infini.

On constate sans difficulté, en prenant le plan P pour plan des xz par exemple, que:

la section de la surface par le plan P se compose de deux fois la droite à l'infini D et d'une courbe d'ordre $(m-2)$;

la section de la surface par un plan quelconque parallèle au plan P se compose de la droite D et d'une courbe d'ordre $(m-1)$;

la section de la surface par un plan quelconque a un point double à l'infini au point où le plan sécant rencontre la droite D, la direction asymptotique est l'intersection du plan P avec le plan sécant; et les deux tangentes sont les intersections du plan sécant avec le cylindre asymptote correspondant à cette direction asymptotique.

Douai, 1864.

Ueber das Verschwinden der ϑ-Functionen.

(Von Herrn *B. Riemann* zu Göttingen.)

Die zweite Abtheilung meiner im 54sten Bande dieses Journals erschienenen Theorie der *Abel*schen Functionen enthält den Beweis eines Satzes über das Verschwinden der ϑ-Functionen, welchen ich sogleich wieder anführen werde, indem ich dabei die in jener Abhandlung angewandten Bezeichnungen als dem Leser bekannt voraussetze. Alles in der Abhandlung noch Folgende enthält kurze Andeutungen über die Anwendung dieses Satzes, welcher bei unserer Methode, die sich auf die Bestimmung der Functionen durch ihre Unstetigkeiten und ihr Unendlichwerden stützt, wie man leicht sieht, die Grundlage der Theorie der *Abel*schen Functionen bilden muss. Bei dem Satze selbst und dessen Beweise ist jedoch der Umstand nicht gehörig berücksichtigt worden, dass die ϑ-Function durch die Substitution der Integrale algebraischer Functionen Einer Veränderlichen identisch, d. h. für jeden Werth dieser Veränderlichen, verschwinden kann. Diesem Mangel abzuhelfen ist die folgende kleine Abhandlung bestimmt.

Bei der Darstellung der Untersuchungen über ϑ-Functionen mit einer unbestimmten Anzahl von Variablen macht sich das Bedürfniss einer abkürzenden Bezeichnung einer Reihe, wie

$$v_1,\quad v_2,\quad \ldots,\quad v_m$$

geltend, so bald der Ausdruck von v_ν durch ν complicirt ist. Man könnte dieses Zeichen ganz analog den Summen- und Productenzeichen bilden; eine solche Bezeichnung würde aber zu viel Raum wegnehmen und innerhalb der Functionszeichen unbequem für den Druck sein; ich ziehe es daher vor

$$v_1, v_2, \ldots, v_m \quad \text{durch} \quad \left(\overset{m}{\underset{1}{\nu}}(v_\nu)\right)$$

zu bezeichnen, also

$$\vartheta(v_1, v_2, \ldots, v_p) \quad \text{durch} \quad \vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(v_\nu)\right).$$

1.

Wenn man in der Function $\vartheta(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ für die p Veränderlichen v die p Integrale $u_1 - e_1$, $u_2 - e_2$, $\ldots$, $u_p - e_p$ algebraischer wie die Fläche

T verzweigter Functionen von z substituirt, so erhält man eine Function von z, welche in der ganzen Fläche T ausser den Linien b sich stetig ändert, beim Uebertritt von der negativen auf die positive Seite der Linie b_ν aber den Factor $e^{-u_\nu^+ - u_\nu^- + 2e_\nu}$ erlangt. Wie im §. 22 bewiesen worden ist, wird diese Function, wenn sie nicht für alle Werthe von z verschwindet, nur für p Punkte der Fläche T unendlich klein von der ersten Ordnung. Diese Punkte wurden durch $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p$ bezeichnet, und der Werth der Function u_ν im Punkte η_μ durch $\alpha_\nu^{(\mu)}$. Es ergab sich dann nach den $2p$ Modulsystemen der ϑ-Function die Congruenz

$$(1.)\quad (e_1, e_2, \ldots, e_p) \equiv \left(\sum_1^p \alpha_1^{(\mu)} + K_1, \sum_1^p \alpha_2^{(\mu)} + K_2, \ldots, \sum_1^p \alpha_p^{(\mu)} + K_p\right),$$

worin die Grössen K von den bis dahin noch willkürlichen additiven Constanten in den Functionen u abhingen, aber von den Grössen e und den Punkten η unabhängig waren.

Führt man die dort angegebene Rechnung aus, so findet sich

$$(2.)\quad 2K_\nu = \Sigma \frac{1}{\pi i}\int (u_\nu^+ + u_\nu^-)\, du_{\nu'} - \varepsilon_\nu \pi i - \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \varepsilon'_\mu a_{\mu,\nu}.$$

In diesem Ausdrucke ist das Integral $\int (u_\nu^+ + u_\nu^-)\, du_{\nu'}$ positiv durch $b_{\nu'}$ auszudehnen, und in der Summe sind für ν' alle Zahlen von 1 bis p ausser ν zu setzen; $\varepsilon_\nu = \pm 1$, je nachdem das Ende von l_ν auf der positiven oder negativen Seite von a_ν liegt, und $\varepsilon'_\nu = \pm 1$, je nachdem dasselbe auf der positiven oder negativen Seite von b_ν liegt. Die Bestimmung der Vorzeichen ist übrigens nur nöthig, wenn die Grössen e nach den in §. 22 gegebenen Gleichungen aus den Unstetigkeiten von $\log \vartheta$ völlig bestimmt werden sollen; die obige Congruenz (1.) bleibt richtig, welche Vorzeichen man wählen mag.

Wir behalten zunächst die dort gemachte vereinfachende Voraussetzung bei, dass die additiven Constanten in den Functionen u so bestimmt werden, dass die Grössen K sämmtlich gleich Null sind. Um die so gewonnenen Resultate schliesslich von dieser beschränkenden Voraussetzung zu befreien, hat man offenbar nur nöthig, überall in den ϑ-Functionen zu den Argumenten $-K_1, -K_2, \ldots, -K_p$ hinzuzufügen.

Wenn also die Function $\vartheta(u_1 - e_1, u_2 - e_2, \ldots, u_p - e_p)$ für die p Punkte $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p$ verschwindet ***und nicht identisch für jeden Werth von z verschwindet***, so ist

$$(e_1, e_2, \ldots, e_p) \equiv \left(\sum_1^p \alpha_1^{(\mu)}, \sum_1^p \alpha_2^{(\mu)}, \ldots, \sum_1^p \alpha_p^{(\mu)}\right).$$

Dieser Satz gilt für ganz beliebige Werthe der Grössen e, und wir haben hieraus, indem wir den Punkt (s, z) mit dem Punkte η_p zusammenfallen liessen, geschlossen, dass

$$\vartheta(-\sum_1^{p-1}\alpha_1^{(\mu)}, -\sum_1^{p-1}\alpha_2^{(\mu)}, \ldots, -\sum_1^{p-1}\alpha_p^{(\mu)}) = 0,$$

oder da die ϑ-Function gerade ist,

$$\vartheta(\sum_1^{p-1}\alpha_1^{(\mu)}, \sum_1^{p-1}\alpha_2^{(\mu)}, \ldots, \sum_1^{p-1}\alpha_p^{(\mu)}) = 0,$$

welches auch die Punkte $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{p-1}$ seien.

2.

Der Beweis dieses Satzes bedarf jedoch einer Vervollständigung wegen des Umstandes, dass die Function $\vartheta(u_1-e_1, u_2-e_2, \ldots, u_p-e_p)$ identisch verschwinden kann (was in der That bei jedem System von gleich verzweigten algebraischen Functionen für gewisse Werthe der Grössen e eintritt.)

Wegen dieses Umstandes muss man sich begnügen, zunächst zu zeigen, dass der Satz richtig bleibt, während die Punkte η unabhängig von einander innerhalb endlicher Grenzen ihre Lage ändern. Hieraus folgt dann die allgemeine Richtigkeit des Satzes nach dem Principe, dass eine Function einer complexen Grösse nicht innerhalb eines endlichen Gebiets gleich Null sein kann, ohne überall gleich Null zu sein.

Wenn z gegeben ist, so können die Grössen $e_1, e_2, \ldots, e_p$ immer so gewählt werden, dass $\vartheta(u_1-e_1, u_2-e_2, \ldots, u_p-e_p)$ nicht verschwindet; denn sonst müsste die Function $\vartheta(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ für jedwede Werthe der Grössen v verschwinden, und folglich müssten in ihrer Entwicklung nach ganzen Potenzen von $e^{2v_1}, e^{2v_2}, \ldots, e^{2v_p}$ sämmtliche Coefficienten gleich Null sein, was nicht der Fall ist. Die Grössen e können sich dann von einander unabhängig innerhalb endlicher Grössengebiete ändern, ohne dass die Function $\vartheta(u_1-e_1, u_2-e_2, \ldots, u_p-e_p)$ für diesen Werth von z verschwindet. Oder mit anderen Worten: man kann immer ein Grössengebiet E von $2p$ Dimensionen angeben, innerhalb dessen sich das System der Grössen e bewegen kann, ohne dass die Function $\vartheta(u_1-e_1, u_2-e_2, \ldots, u_p-e_p)$ für diesen Werth von z verschwindet. Sie wird also nur für p Lagen von (s, z) unendlich klein von der ersten Ordnung, und bezeichnet man diese Punkte durch $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p$, so ist

$$(1.) \quad (e_1, e_2, \ldots, e_p) \equiv (\sum_1^p \alpha_1^{(\mu)}, \sum_1^p \alpha_2^{(\mu)}, \ldots, \sum_1^p \alpha_p^{(\mu)}).$$

Jeder Bestimmungsweise des Systems der Grössen e innerhalb E oder jedem Punkte von E entspricht dann eine Bestimmungsweise der Punkte η, deren Gesammtheit ein dem Grössengebiete E entsprechendes Grössengebiet H bildet. In Folge der Gleichung (1.) entspricht jedem Punkte von H aber auch nur ein Punkt von E; hätte also H nur $2p-1$, oder weniger Dimensionen, so würde E nicht $2p$ Dimensionen haben können. Es hat folglich H $2p$ Dimensionen. Die Schlüsse, auf welche sich unser Satz stützt, bleiben daher anwendbar für beliebige Lagen der Punkte η innerhalb endlicher Gebiete, und die Gleichung

$$\vartheta(-\sum_1^{p-1}\alpha_1^{(\mu)}, -\sum_1^{p-1}\alpha_2^{(\mu)}, \ldots, -\sum_1^{p-1}\alpha_p^{(\mu)}) = 0$$

gilt für beliebige Lagen der Punkte $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{p-1}$ innerhalb endlicher Gebiete und folglich allgemein.

3.

Hieraus folgt, dass sich das Grössensystem $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ immer und nur auf eine Weise congruent einem Ausdrucke von der Form $\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(\sum_1^p \alpha_\nu^{(\mu)}\right)\right)$ setzen lässt, wenn $\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(u_\nu - e_\nu)\right)$ nicht für jeden Werth von s verschwindet; denn liessen sich die Punkte $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p$ auf mehr als eine Weise so bestimmen, dass der Congruenz

$$\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(e_\nu)\right) \equiv \left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(\sum_1^p \alpha_\nu^{(\mu)}\right)\right)$$

genügt wäre, so würde nach dem eben bewiesenen Satze die Function $\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(u_\nu - e_\nu)\right)$ für mehr als p Punkte verschwinden, ohne identisch gleich Null zu sein, was unmöglich ist.

Wenn $\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(u_\nu - e_\nu)\right)$ identisch verschwindet, muss man, um $\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(e_\nu)\right)$ in die obige Form zu setzen, $\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(u_\nu + \alpha_\nu^{(1)} - u_\nu^{(1)} - e_\nu)\right)$ betrachten, und wenn diese Function identisch für jeden Werth von s, ζ_1, s_1 verschwindet, die Function $\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(u_\nu + \sum_1^2 \alpha_\nu^{(\mu)} - \sum_1^2 u_\nu^{(\mu)} - e_\nu\right)\right)$.

(1.) Wir nehmen an, dass

$$\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(\sum_1^m \alpha_\nu^{(p+2-\mu)} - \sum_1^{m-1} u_\nu^{(p-\mu)} - e_\nu\right)\right)$$

identisch verschwindet,

$$\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(\sum_1^{m+1} \alpha_\nu^{(p+2-\mu)} - \sum_1^{m} u_\nu^{(p-\mu)} - e_\nu\right)\right)$$

aber nicht identisch verschwindet.

Diese letztere Function verschwindet dann, als Function von ζ_{p+1} betrachtet, für $\varepsilon_{p-1}, \varepsilon_{p-2}, \ldots, \varepsilon_{p-m}$, ausserdem also noch für $p-m$ Punkte, und bezeichnet man diese mit $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{p-m}$, so ist

$$\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(-\sum_{p-m+1}^{p} \alpha_\nu^{(\mu)} + e_\nu\right)\right) \equiv \left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(\sum_1^{p-m} \alpha_\nu^{(\mu)}\right)\right)$$

und diese Punkte $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{p-m}$ können nur auf eine Weise so bestimmt werden, dass diese Congruenz erfüllt wird, weil sonst die Function für mehr als p Punkte verschwinden würde. Dieselbe Function verschwindet, als Function von z_{p-1} betrachtet, ausser für $\eta_{p+1}, \eta_p, \ldots, \eta_{p-m+1}$ noch für $p-m-1$ Punkte, und bezeichnet man diese durch $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{p-m-1}$, so ist

$$\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(-\sum_{p-m}^{p-2} u_\nu^{(\mu)} - e_\nu\right)\right) \equiv \left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(\sum_1^{p-m-1} u_\nu^{(\mu)}\right)\right),$$

und die Punkte $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{p-m-1}$ sind durch diese Congruenz völlig bestimmt.

Unter der gemachten Voraussetzung (1.) können also, um den Congruenzen

$$(2.)\qquad \left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(e_\nu)\right) \equiv \left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(\sum_1^p \alpha_\nu^{(\mu)}\right)\right)$$

und

$$(3.)\qquad \left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(-e_\nu)\right) \equiv \left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(\sum_1^{p-2} u_\nu^{(\mu)}\right)\right)$$

zu genügen, m von den Punkten η und $m-1$ von den Punkten ε beliebig gewählt werden, dadurch aber sind die übrigen bestimmt. Offenbar gelten diese Sätze auch umgekehrt, d. h. die Function verschwindet, wenn eine dieser Bedingungen erfüllt ist. Wenn also die Congruenz (2.) auf mehr als eine Weise lösbar ist, so ist auch die Congruenz (3.) lösbar, und wenn von den Punkten η, m aber nicht mehr beliebig gewählt werden können, so können von den Punkten ε, $m-1$ beliebig gewählt werden und dadurch sind die übrigen bestimmt, und umgekehrt.

Auf ganz ähnlichem Wege ergiebt sich, dass, wenn

$$\vartheta\left(\begin{matrix}p\\ \nu(r_\nu)\\ 1\end{matrix}\right) = 0$$

ist, die Congruenzen

$$(4.)\qquad \left(\begin{matrix}p\\ \nu(r_\nu)\\ 1\end{matrix}\right) \equiv \left(\begin{matrix}p\\ \nu\left(\sum_{1}^{p-1}\alpha_\nu^{(\mu)}\right)\\ 1\end{matrix}\right),$$

$$(5.)\qquad \left(\begin{matrix}p\\ \nu(-r_\nu)\\ 1\end{matrix}\right) \equiv \left(\begin{matrix}p\\ \nu\left(\sum_{1}^{p-1}u_\nu^{(\mu)}\right)\\ 1\end{matrix}\right)$$

immer lösbar sind; und zwar können sowohl von den Punkten η als von den Punkten ε, m beliebig gewählt werden, und es sind dadurch die übrigen $p-1-m$ bestimmt, wenn

$$\vartheta\left(\begin{matrix}p\\ \nu\left(\sum_{1}^{m}u_\nu^{(\mu)}-\sum_{1}^{m}\alpha_\nu^{(\mu)}+r_\nu\right)\\ 1\end{matrix}\right)$$

identisch gleich Null ist,

$$\vartheta\left(\begin{matrix}p\\ \nu\left(\sum_{1}^{m+1}u_\nu^{(\mu)}-\sum_{1}^{m+1}\alpha_\nu^{(\mu)}+r_\nu\right)\\ 1\end{matrix}\right)$$

aber nicht identisch gleich Null ist, wobei der Fall $m = 0$ nicht ausgeschlossen ist. Dieser Satz lässt sich auch umkehren. Wenn also von den Punkten η, m und nicht mehr beliebig gewählt werden können, so ist die Voraussetzung desselben erfüllt; und es können folglich auch von den Punkten ε, m und nicht mehr beliebig gewählt werden.

4.

(1.) Bezeichnen wir die Derivirte von

$$\vartheta(v_1, v_2, \ldots, v_p)$$

nach v_ν mit ϑ'_ν, die zweite Derivirte nach v_ν und v_μ mit $\vartheta''_{\nu,\mu}$ u. s. f.,

so sind, wenn $\vartheta\left(\begin{matrix}p\\ \nu(u_\nu^{(1)}-\alpha_\nu^{(1)}+r_\nu)\\ 1\end{matrix}\right)$ identisch für jeden Werth von s_1 und ζ_1 verschwindet, sämmtliche Functionen $\vartheta'\left(\begin{matrix}p\\ \nu(r_\nu)\\ 1\end{matrix}\right)$ gleich Null. In der That geht die Gleichung

$$\vartheta\left(\begin{matrix}p\\ \nu(u_\nu^{(1)}-\alpha_\nu^{(1)}+r_\nu)\\ 1\end{matrix}\right) = 0,$$

wenn s_1 und z_1 unendlich wenig von σ_1 und ζ_1 verschieden sind, über in die Gleichung

$$\sum_1^p \vartheta'_\mu\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(r_\nu)\right) d\alpha_\mu^{(1)} = 0.$$

Nehmen wir an, dass

$$du_\mu = \frac{\varphi_\mu(s, z)\,\partial z}{\frac{\partial F}{\partial s}}$$

sei, so verwandelt sich diese Gleichung nach Weglassung des Factors $\frac{\partial \zeta_1}{\frac{\partial F(\sigma_1, \zeta_1)}{\partial \sigma_1}}$ in

$$\sum_1^p \vartheta'_\mu\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(r_\nu)\right) \varphi_\mu(\sigma_1, \zeta_1) = 0;$$

und da zwischen den Functionen φ keine lineare Gleichung mit constanten Coefficienten stattfindet, so folgt hieraus, dass sämmtliche erste Derivirten von $\vartheta(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ für $\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(v_\nu = r_\nu)$ verschwinden müssen.

Um den umgekehrten Satz zu beweisen, nehmen wir an, dass $\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(v_\nu = r_\nu)$ und $\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(v_\nu = t_\nu)$ zwei Werthsysteme seien, für welche die Function ϑ verschwindet, ohne für $\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(v_\nu = u_\nu^{(1)} - \alpha_\nu^{(1)} + r_\nu)$ und $\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(v_\nu = u_\nu^{(1)} - \alpha_\nu^{(1)} + t_\nu)$ identisch zu verschwinden, und bilden den Ausdruck

$$(2.)\qquad \frac{\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(u_\nu^{(1)} - \alpha_\nu^{(1)} + r_\nu)\right)\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(\alpha_\nu^{(1)} - u_\nu^{(1)} + r_\nu)\right)}{\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(u_\nu^{(1)} - \alpha_\nu^{(1)} + t_\nu)\right)\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(\alpha_\nu^{(1)} - u_\nu^{(1)} + t_\nu)\right)}.$$

Betrachten wir diesen Ausdruck als Function von z_1, so ergiebt sich, dass er eine algebraische Function von z_1 und zwar eine rationale Function von s_1 und z_1 ist, da Nenner und Zähler in T' stetig sind und an den Querschnitten dieselben Factoren erlangen. Für $z_1 = \zeta_1$ und $s_1 = \sigma_1$ werden Nenner und Zähler unendlich klein von der zweiten Ordnung, so dass die Function endlich bleibt; die übrigen Werthe aber, für welche Nenner oder Zähler verschwinden, sind, wie oben bewiesen, durch die Werthe der Grössen r und der Grössen t völlig bestimmt, also von ζ_1 ganz unabhängig. Da nun eine algebraische Function durch die Werthe, für welche sie Null und unendlich wird, bis auf einen

constanten Factor bestimmt ist, so ist der Ausdruck gleich einer rationalen von ζ_1 unabhängigen Function von s_1 und z_1, $\chi(s_1, z_1)$, multiplicirt in eine Constante, d. h. eine von z_1 unabhängige Grösse. Da der Ausdruck symmetrisch in Bezug auf die Grössensysteme (s_1, z_1) und (σ_1, ζ_1) ist, so ist diese Constante gleich $\chi(\sigma_1, \zeta_1)$, multiplicirt in eine auch von ζ_1 unabhängige Grösse A. Setzt man nun $\sqrt{A}.\chi(s, z) = \varrho(s, z)$, so erhält man für unsern Ausdruck (2.) den Werth

$$(3.)\qquad \varrho(s_1, z_1)\varrho(\sigma_1, \zeta_1)$$

wo $\varrho(s, z)$ eine rationale Function von s und z ist.

Um diese zu bestimmen, hat man nur nöthig $\zeta_1 = z_1$ und $\sigma_1 = s_1$ werden zu lassen; es ergiebt sich dann

$$(\varrho(s_1, z_1))^2 = \left\{\frac{\sum\limits_\mu \vartheta'_\mu\left(\begin{smallmatrix}p\\ \nu\\ 1\end{smallmatrix}(r_\nu)\right)du_\mu^{(1)}}{\sum\limits_\mu \vartheta'_\mu\left(\begin{smallmatrix}p\\ \nu\\ 1\end{smallmatrix}(t_\nu)\right)du_\mu^{(1)}}\right\}^2$$

oder nach Ausziehung der Quadratwurzel und Weghebung des Factors $\frac{dz_1}{\frac{\partial F(s_1, z_1)}{\partial s_1}}$

$$(4.)\qquad \varrho(s_1, z_1) = \pm\frac{\sum\limits_\mu \vartheta'_\mu\left(\begin{smallmatrix}p\\ \nu\\ 1\end{smallmatrix}(r_\nu)\right)\varphi_\mu(s_1, z_1)}{\sum\limits_\mu \vartheta'_\mu\left(\begin{smallmatrix}p\\ \nu\\ 1\end{smallmatrix}(t_\nu)\right)\varphi_\mu(s_1, z_1)}.$$

Man hat daher aus (3.) und (4.) die Gleichung

$$(5.)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\vartheta\left(\begin{smallmatrix}p\\ \nu\\ 1\end{smallmatrix}(u_\nu^{(1)}-a_\nu^{(1)}+r_\nu)\right)\vartheta\left(\begin{smallmatrix}p\\ \nu\\ 1\end{smallmatrix}(a_\nu^{(1)}-u_\nu^{(1)}+r_\nu)\right)}{\vartheta\left(\begin{smallmatrix}p\\ \nu\\ 1\end{smallmatrix}(u_\nu^{(1)}-a_\nu^{(1)}+t_\nu)\right)\vartheta\left(\begin{smallmatrix}p\\ \nu\\ 1\end{smallmatrix}(a_\nu^{(1)}-u_\nu^{(1)}+t_\nu)\right)}\\ &= \frac{\sum\limits_\mu \vartheta'_\mu\left(\begin{smallmatrix}p\\ \nu\\ 1\end{smallmatrix}(r_\nu)\right)\varphi_\mu(s_1, z_1)}{\sum\limits_\mu \vartheta'_\mu\left(\begin{smallmatrix}p\\ \nu\\ 1\end{smallmatrix}(t_\nu)\right)\varphi_\mu(s_1, z_1)}\cdot\frac{\sum\limits_\mu \vartheta'_\mu\left(\begin{smallmatrix}p\\ \nu\\ 1\end{smallmatrix}(r_\nu)\right)\varphi_\mu(\sigma_1, \zeta_1)}{\sum\limits_\mu \vartheta'_\mu\left(\begin{smallmatrix}p\\ \nu\\ 1\end{smallmatrix}(t_\nu)\right)\varphi_\mu(\sigma_1, \zeta_1)}.\end{aligned}\right.$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass $\vartheta\left(\begin{smallmatrix}p\\ \nu\\ 1\end{smallmatrix}(u_\nu^{(1)}-\alpha_\nu^{(1)}+r_\nu)\right)$ für jeden Werth

von s_1 und ζ_1 gleich Null sein muss, wenn die ersten Derivirten der Function $\vartheta(v_1, v_2, \dots, v_p)$ für $\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(v_\nu = r_\nu)$ sämmtlich verschwinden.

5.

Wenn

$$(1.)\qquad \vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(\sum_1^m \alpha_\nu^{(\mu)} - \sum_1^m u_\nu^{(\mu)} + r_\nu\right)\right)$$

identisch, d. h. für jedwede Werthe von $\overset{m}{\underset{1}{\mu}}(\sigma_\mu, \zeta_\mu)$ und $\overset{m}{\underset{1}{\mu}}(s_\mu, z_\mu)$, verschwindet, so findet man auf dem oben angegebenen Wege zunächst, indem man $\zeta_m = z_m$, $\sigma_m = s_m$ werden lässt, dass die ersten Derivirten der Function $\vartheta(v_1, v_2, \dots, v_p)$ für $\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(v_\nu = \sum_1^{m-1} \alpha_\nu^{(\mu)} - \sum_1^{m-1} u_\nu^{(\mu)} + r_\nu\right)$ sämmtlich verschwinden, dann, indem man $\zeta_{m-1} - z_{m-1}$, $\sigma_{m-1} - s_{m-1}$ unendlich klein werden lässt, dass für $\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(v_\nu = \sum_1^{m-2} \alpha_\nu^{(\mu)} - \sum_1^{m-2} u_\nu^{(\mu)} + r_\nu\right)$ auch die zweiten Derivirten sämmtlich verschwinden; und offenbar ergiebt sich allgemein, dass die Derivirten n^{ter} Ordnung sämmtlich verschwinden für $\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(v_\nu = \sum_1^{m-n} \alpha_\nu^{(\mu)} - \sum_1^{m-n} u_\nu^{(\mu)} + r_\nu\right)$, welche Werthe auch die Grössen s und die Grössen ζ haben mögen.

Es folgt hieraus, dass unter der gegenwärtigen Voraussetzung (1.) für $\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(v_\nu = r_\nu)$ die ersten bis m^{ten} Derivirten der Function $\vartheta(v_1, v_2, \dots, v_p)$ sämmtlich gleich Null sind.

Um zu zeigen, dass dieser Satz auch umgekehrt gilt, beweisen wir zunächst, dass wenn $\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(\sum_1^{m-1} \alpha_\nu^{(\mu)} - \sum_1^{m-1} u_\nu^{(\mu)} + r_\nu\right)\right)$ identisch verschwindet und die Grössen $\vartheta^{(m)}\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(r_\nu)\right)$ sämmtlich gleich Null sind, auch $\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(\sum_1^{m} \alpha_\nu^{(\mu)} - \sum_1^{m} u_\nu^{(\mu)} + r_\nu\right)\right)$ identisch verschwinden muss und verallgemeinern zu diesem Zwecke die Gleichung (§. 4, (5.)).

Wir nehmen an, dass $\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(\sum_1^{m-1} u_\nu^{(\mu)} - \sum_1^{m-1} \alpha_\nu^{(\mu)} + r_\nu\right)\right)$ identisch verschwinde, $\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(\sum_1^{m} u_\nu^{(\mu)} - \sum_1^{m} \alpha_\nu^{(\mu)} + r_\nu\right)\right)$ aber nicht identisch verschwinde, behalten in Bezug

auf die Grössen t die frühere Voraussetzung bei und betrachten den Ausdruck

$$(2.)\quad \frac{\vartheta\Big(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\big(\sum_1^m u_\nu^{(\mu)}-\sum_1^m \alpha_\nu^{(\mu)}+r_\nu\big)\Big)\,\vartheta\Big(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\big(\sum_1^m \alpha_\nu^{(\mu)}-\sum_1^m u_\nu^{(\mu)}+r_\nu\big)\Big)\,\prod_{\varrho\varrho'}\vartheta\Big(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(u_\nu^{\varrho}-u_\nu^{\varrho'}+t_\nu)\Big)\,\vartheta\Big(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(\alpha_\nu^{\varrho}-\alpha_\nu^{\varrho'}+t_\nu)\Big)}{\Big(\prod_1^m\Big)^2\,\vartheta\Big(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(u_\nu^{\varrho}-\alpha_\nu^{\varrho'}+t_\nu)\Big)\,\vartheta\Big(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(\alpha_\nu^{\varrho}-u_\nu^{\varrho'}+t_\nu)\Big)}$$

In diesem Ausdrucke sind unter den Productzeichen sowohl für ϱ, als für ϱ' sämmtliche Werthe von 1 bis m zu setzen, im Zähler aber die Fälle, wo $\varrho=\varrho'$ würde, wegzulassen.

Betrachten wir diesen Ausdruck als Function von s_1, so ergiebt sich, dass er an den Querschnitten den Factor 1 erlangt und folglich eine algebraische Function von s_1 ist. Für $s_1=\zeta_\varrho$ und $s_1=\sigma_\varrho$ werden Nenner und Zähler unendlich klein von der zweiten Ordnung, der Bruch bleibt also endlich; die übrigen Werthe aber, für welche Zähler und Nenner verschwinden, sind durch die Grössen $\overset{m}{\underset{2}{\mu}}(s_\mu, z_\mu)$, die Grössen r und die Grössen t, wie oben (§. 3) bewiesen, völlig bestimmt, und folglich von den Grössen ζ ganz unabhängig. Da der Ausdruck nun eine symmetrische Function von den Grössen s ist, so gilt dasselbe für jedes beliebige s_μ: er ist eine algebraische Function von s_μ, und die Werthe dieser Grösse, für welche er unendlich gross oder unendlich klein wird, sind von den Grössen ζ unabhängig. Er ist daher gleich einer von den Grössen ζ unabhängigen algebraischen Function der Grössen s, $\chi(s_1, s_2, \ldots, s_m)$, multiplicirt in einen von den Grössen s unabhängigen Factor. Da er aber ungeändert bleibt, wenn man die Grössen s mit den Grössen ζ vertauscht, so ist dieser Factor gleich $\chi(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m)$, multiplicirt mit einer von den Grössen s und den Grössen ζ unabhängigen Constanten A; und wir können daher, wenn wir $\sqrt{A}.\chi(s_1, s_2, \ldots, s_m)=\psi(s_1, s_2, \ldots, s_m)$ setzen, unserm Ausdrucke (2.) die Form

$$(3.)\qquad \psi(s_1, s_2, \ldots, s_m)\,\psi(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m)$$

geben, wo $\psi(s_1, s_2, \ldots, s_m)$ eine algebraische von den Grössen ζ unabhängige Function der Grössen s ist, welche in Folge ihrer Verzweigungsart sich rational in $\overset{m}{\underset{1}{\mu}}(s_\mu, z_\mu)$ ausdrücken lassen muss. Lässt man nun die Punkte η mit den Punkten ε zusammenfallen, so dass die Grössen $\zeta_\mu - s_\mu$ und die Grössen $\sigma_\mu - s_\mu$ sämmtlich unendlich klein werden, so ergiebt sich, wenn man die Derivirten

von $\vartheta(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ wie oben (§. 4, (1.)) bezeichnet,

$$(4.)\quad \psi(z_1, z_2, \ldots, z_m) = \pm \frac{\left(\sum_1^p\right)^m \vartheta^{(m)}_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m}\left(\overset{p}{\underset{1}{\varrho}}(r_\varrho)\right) du^{(1)}_{\nu_1} du^{(2)}_{\nu_2} \ldots du^{(m)}_{\nu_m}}{\prod_{\mu=1}^{\mu=m} \prod_{\nu=1}^{\nu=p} \vartheta'_\nu\left(\overset{p}{\underset{1}{\varrho}}(t_\varrho)\right) du^{(\mu)}_\nu},$$

wo die Summationen im Zähler sich auf $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$ beziehen. Es ist kaum nöthig zu bemerken, dass die Wahl des Vorzeichens gleichgültig ist, da sie auf den Werth von $\psi(z_1, z_2, \ldots, z_m)\psi(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m)$ keinen Einfluss hat, und dass statt der Grössen $du^{(\mu)}_1, du^{(\mu)}_2, \ldots, du^{(\mu)}_p$ auch, im Zähler und Nenner gleichzeitig, die ihnen proportionalen Grössen $\varphi_1(s_\mu, z_\mu), \varphi_2(s_\mu, z_\mu), \ldots, \varphi_p(s_\mu, z_\mu)$ eingeführt werden können.

Aus der in (2.), (3.) und (4.) enthaltenen Gleichung, welche für den Fall bewiesen ist, dass

$$\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(\sum_1^{m-1} u^{(\mu)}_\nu - \sum_1^{m-1} \alpha^{(\mu)}_\nu + r_\nu\right)\right)$$

gleich Null und

$$\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(\sum_1^{m} u^{(\mu)}_\nu - \sum_1^{m} \alpha^{(\mu)}_\nu + r_\nu\right)\right)$$

von Null verschieden ist, folgt, dass

$$\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(\sum_1^{m} u^{(\mu)}_\nu - \sum_1^{m} \alpha^{(\mu)}_\nu + r_\nu\right)\right)$$

nicht von Null verschieden sein kann, wenn die Functionen $\vartheta^{(m)}\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(r_\nu)\right)$ sämmtlich gleich Null sind.

Wenn also die Functionen $\vartheta^{(m+1)}\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(r_\nu)\right)$ sämmtlich gleich Null sind, so folgt aus der Gültigkeit der Gleichung

$$\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}\left(\sum_1^{n} u^{(\mu)}_\nu - \sum_1^{n} \alpha^{(\mu)}_\nu + r_\nu\right)\right) = 0$$

für $n = m$ ihre Gültigkeit für $n = m+1$. Gilt daher die Gleichung für $n = 0$ oder ist $\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(r_\nu)\right) = 0$ und verschwinden die ersten bis m^{ten} Derivirten der Function $\vartheta\left(\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(v_\nu)\right)$ für $\overset{p}{\underset{1}{\nu}}(v_\nu = r_\nu)$ sämmtlich, die $(m+1)^{\text{ten}}$ aber nicht sämmtlich,

so gilt die Gleichung auch für alle grösseren Werthe von s bis $s=m$, aber nicht für $s=m+1$; denn aus $\vartheta\left(\begin{smallmatrix}p\\ \nu\\ 1\end{smallmatrix}\left(\sum\limits_1^{m+1} u_\nu^{(\mu)}-\sum\limits_1^{m+1}\alpha_\nu^{(\mu)}+r_\nu\right)\right)=0$ würde, wie wir vorher schon gefunden hatten, folgen, dass die Grössen $\vartheta^{(m+1)}\left(\begin{smallmatrix}p\\ \nu\\ 1\end{smallmatrix}(r_\nu)\right)$ sämmtlich verschwinden müssten.

6.

Fassen wir das eben Bewiesene mit dem Früheren zusammen, so erhalten wir folgendes Resultat:

Ist $\vartheta(r_1, r_2, \dots, r_p)=0$, so lassen sich $(p-1)$ Punkte $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{p-1}$ so bestimmen, dass

$$(r_1, r_2, \dots, r_p) \equiv \left(\sum_1^{p-1}\alpha_1^{(\mu)}, \sum_1^{p-1}\alpha_2^{(\mu)}, \dots, \sum_1^{p-1}\alpha_p^{(\mu)}\right);$$

und umgekehrt.

Wenn ausser der Function $\vartheta(v_1, v_2, \dots, v_p)$ auch ihre ersten bis m^{ten} Derivirten für $v_1=r_1$, $v_2=r_2$, ..., $v_p=r_p$ sämmtlich gleich Null, die $(m+1)^{\text{ten}}$ aber nicht sämmtlich gleich Null sind, so können m von diesen Punkten η, ohne dass die Grössen r sich ändern, beliebig gewählt werden und dadurch sind die übrigen $p-1-m$ völlig bestimmt.

Und umgekehrt:

Wenn m und nicht mehr von den Punkten η, ohne dass sich die Grössen r ändern, beliebig gewählt werden können, so sind ausser der Function $\vartheta(v_1, v_2, \dots, v_p)$ auch ihre ersten bis m^{ten} Derivirten für $v_1=r_1$, $v_2=r_2$, ..., $v_p=r_p$ sämmtlich gleich Null, die $(m+1)^{\text{ten}}$ aber nicht sämmtlich gleich Null.

Die vollständige Untersuchung aller besonderen Fälle, welche bei dem Verschwinden einer ϑ-Function eintreten können, war weniger nöthig wegen der besondern Systeme von gleichverzweigten algebraischen Functionen, für welche diese Fälle eintreten, als vielmehr desshalb, weil ohne diese Untersuchung Lücken in dem Beweise der Sätze entstehen würden, welche auf unsern Satz über das Verschwinden einer ϑ-Function gegründet werden.

Göttingen, im October 1865.

Regel zur Bestimmung des Inhalts der Sternpolygone.

(Bruchstück aus den hinterlassenen Papieren von *C. G. J. Jacobi*, mitgetheilt durch Herrn *O. Hermes*.)

Wenn die Seiten eines Vielecks sich schneiden, in welchem Falle ein sogenanntes Sternpolygon entsteht, so hat man nicht mehr einen einzigen von einem Contoure umschlossenen Raum, sondern mehrere geschlossene Räume, die entweder durch eine gemeinschaftliche Ecke oder durch eine gemeinschaftliche Seite mit einander zusammenhängen. Die gewöhnlichen Entwicklungen über den Inhalt ebener Figuren hören für solche Vielecke auf ihre Gültigkeit zu haben. Man kann aber gleichwohl fragen, welches die geometrische Bedeutung des algebraischen Ausdruckes

$$\tfrac{1}{2}(x_1y_2-y_1x_2+x_2y_3-y_2x_3+\cdots+x_ny_1-y_nx_1)$$

für solche Sternpolygone sei, und der Gleichmässigkeit wegen die diesem Ausdrucke gleiche geometrische Grösse den *Inhalt des Sternpolygons* nennen. Dieser Inhalt ist keineswegs der Summe der einzelnen durch das Polygon gebildeten Räume gleich. Denn man wird bei näherer Betrachtung finden, dass von diesen Räumen einige einfach, andere doppelt oder mehrfach, einige mit dem positiven, andere mit dem negativen Zeichen zu nehmen sind. Die Entscheidung hierüber ist bei einer etwas complicirten Sternfigur ziemlich beschwerlich. Ich will daher eine Regel angeben, nach welcher der Inhalt des Sternpolygons so leicht, wie es möglich scheint, jedesmal gefunden werden kann, wobei ich jedoch voraussetze, dass niemals durch einen Punkt mehr als zwei Seiten gehen.

Man bezeichne alle durch die Durchschnittspunkte der Seiten sowohl an den Ecken als auf den Seiten selbst gebildeten Punkte mit Zahlen in der Ordnung, wie sie im Sinne des Umfanges auf einander folgen, indem man von 1 anfängt. Es wird auf diese Weise jeder Punkt, welcher der Durchschnitt zweier nicht auf einander folgenden Seiten oder kein Eckpunkt ist, mit *zwei* verschiedenen Zahlen bezeichnet, da man, wenn man im Sinne des Umfanges herumgeht, durch solchen Punkt zweimal, durch jede Ecke einmal kommt. Von einer beliebigen Zahl an bilde man eine Reihe Zahlen, indem

man auf jede diejenige folgen lässt, welche sich bei demselben Punkte befindet, bei welchem die nächst grössere Zahl steht, oder die nächst grössere Zahl selbst, wenn sie allein steht. Dieses thue man so lange, bis man wieder auf die Zahl kommt, von welcher man ausgegangen ist, wobei man auf die grösste der die Punkte bezeichnenden Zahlen wieder 1 folgen lassen muss. Man kann leicht einsehen, dass man nie bei diesem Verfahren auf dieselbe Zahl zweimal kommt. Durch die angegebene Regel ist nämlich für jede gegebene Zahl der Reihe auch die unmittelbar vorhergehende bestimmt, da sie die nächst kleinere sein muss, als die bei demselben Punkte mit der gegebenen befindliche Zahl, oder als die gegebene selbst, wenn diese allein steht. Wären daher die m^{te} und $(m+m')^{te}$ Zahl dieselben, so müssten auch dieselben Zahlen ihnen vorhergehen und also die $(m'+1)^{te}$ mit der ersten übereinkommen, was gegen die Voraussetzung ist, da man die Reihe abzubrechen hat, sowie man wieder auf die erste zurückkommt. Schwieriger ist es allgemein zu zeigen, *dass in der auf die angegebene Weise gebildeten Zahlenreihe niemals zwei demselben Punkte zugehörige Zahlen vorkommen können.* —

Erläuterung des vorstehenden *Jacobi*schen Bruchstücks.

(Von Herrn *O. Hermes.*)

Um die zuletzt angedeutete Eigenschaft der zu bildenden Zahlenreihen darzuthun, empfiehlt es sich, die von *Jacobi* angegebene Bezeichnung der auf einander folgenden Eckpunkte und Schnittpunkte der Seiten des Sternpolygons für diesen Beweis dahin abzuändern, dass man jeden Eckpunkt, durch welchen man beim Verfolgen des Umfanges hindurchgeht, statt mit einer einzigen, nunmehr mit zwei unmittelbar auf einander folgenden Zahlen der Zahlenreihe, und denjenigen Eckpunkt, von welchem man ausgegangen ist, mit der ersten und letzten Zahl bezeichnet, so dass sich schliesslich an jedem Eckpunkte, sowie an jedem Schnittpunkte der Seiten der Figur zwei Zahlen befinden, welche Zahlen *conjugirte* heissen mögen. *Alsdann ist von je zwei conjugirten Zahlen stets die eine gerade, die andere ungerade.*

Für die *Eckpunkte* ist diese Behauptung einleuchtend, denn an jedem derselben stehen zwei auf einander folgende Zahlen, mit Ausnahme desjenigen, von welchem aus der Umfang durchlaufen worden ist, an diesem aber stehen 1 und die letzte aller erhaltenen Zahlen; und dass diese eine gerade sein muss, folgt daraus, dass bei der gegenwärtigen Bezeichnung jeder Punkt, sei er Eck- oder Schnittpunkt, zwei Zahlen giebt.

Um die Behauptung auch für die Schnittpunkte zu beweisen, denke man sich, dass der den Umfang des Sternpolygons durchlaufende Punkt von dem Eckpunkt 1 anfangend durch einen bestimmten Schnittpunkt P bei g zum ersten Male, bei l zum zweiten Male hindurchgehe und bei $2r$ auf den Eckpunkt 1 zurückkomme. Dann kann man das gegebene Sternpolygon in zwei zerlegen, in das Polygon A, welches den Umlauf von g bis l umfasst und das Polygon B, welches den Umlauf von l bis

$2r$ und den sich daran anschliessenden von 1 bis g umfasst. Die zum Sternpolygon A gehörenden Zahlen von g bis l rühren her

1) von den Eckpunkten des Polygons A,
2) von den Punkten in welchen das Polygon A sich selbst durchschneidet,
3) von den Punkten (P ausgenommen), in welchen die Polygone A, B sich gegenseitig durchschneiden.

Jeder Punkt der ersten und zweiten Categorie giebt zwei Zahlen, jeder der dritten Categorie nur eine Zahl von den zwischen g und l liegenden. Aber die Anzahl der Punkte der dritten Categorie ist selbst gerade nach dem allgemeinen Grundsatz, dass je zwei geschlossene Curven sich in einer geraden Anzahl von Punkten schneiden, folglich liegt zwischen g und l eine gerade Anzahl von Zahlen, d. h. von den beiden zum Schnittpunkt P gehörenden conjugirten Zahlen g, l ist die eine gerade, die andere ungerade, w. z. b. w.

Da nun in den zu bildenden Zahlenreihen auf jede Zahl die der nächst höheren conjugirte Zahl folgt, so besteht jede Reihe aus lauter Zahlen, welche mit der Ausgangszahl gleichzeitig gerade oder ungerade sind, und es können daher in einer Zahlenreihe zwei conjugirte Zahlen, von denen, wie bewiesen worden, die eine gerade, die andere ungerade ist, nicht gleichzeitig vorkommen.

Ferner ist zu bemerken, dass man fortdauernd neue geschlossene Zahlenreihen bilden kann, bis jede der die Eckpunkte oder Schnittpunkte der Seiten bezeichnenden Zahlen in einer dieser Reihen, und zwar wie gezeigt worden ist, einmal vorkommt. Nur die kleineren der conjugirten Zahlen an den Eckpunkten sind bei der Doppelnumerirung dieser Punkte in den Zahlenreihen nicht enthalten. Dieser Ausnahmefall tritt jedoch bei Anwendung der *Jacobi*schen Bezeichnung, welche für das Folgende wieder vorausgesetzt wird, nicht ein.

Nimmt man jetzt an, dass die Zahlen einer jeden Reihe die Eckpunkte einer geradlinigen Figur bedeuten, deren Umfang in demselben Sinne genommen werden soll, als in welchem die Zahlen der Reihe auf einander folgen, so werden durch die einzelnen Zahlenreihen ebensoviele geschlossene Figuren dargestellt, und zwar weil in den Reihen conjugirte Zahlen nicht vorkommen, Figuren, deren Umfänge nicht einen und denselben Punkt zweimal berühren, d. h. deren Seiten sich nicht durchschneiden, also Figuren, welche im Gegensatz zu den Sternpolygonen als Theilvielecke im engeren Sinne zu bezeichnen sind. Jede Seite dieser Vielecke ist in demselben Sinne durchlaufen, als die entsprechende Seite, oder das entsprechende Stück einer Seite des Sternpolygons, weil man bei der Bildung der Zahlenreihen von jeder Zahl zu der conjugirten der nächst höheren, also im Sinne des ursprünglichen Umfanges des Sternpolygons fortgeschritten ist, und umgekehrt wird jede Seite oder jedes Stück einer Seite des Sternpolygons durch eine Seite eines Theilvielecks, und zwar weil keine Zahl doppelt vorkommen kann, nur durch eine einzige Seite eines Theilvielecks dargestellt. Mit anderen Worten, die Theilvielecke haben nur Eckpunkte, niemals eine oder mehrere Seiten gemeinschaftlich und erfüllen die Ebene des Sternpolygons in der Weise, dass jede Seite oder jedes Stück einer Seite desselben durch eine Seite eines, aber auch nur eines einzigen Theilvielecks bedeckt wird.

Dies vorausgesetzt lässt sich nunmehr zeigen, dass der von *Jacobi* sogenannte *Inhalt des Sternpolygons gleich ist der Summe aller durch die Zahlenreihen dargestellten Theilvielecke.*

Der Ausdruck nämlich $x_k y_{k+1} - y_k x_{k+1}$, wo x_k, y_k und x_{k+1}, y_{k+1} die rechtwinkligen Coordinaten zweier beliebiger Punkte p_k und p_{k+1} der Ebene sind, bedeutet den doppelten Flächeninhalt desjenigen Dreiecks, welches durch den Anfangspunkt der Coordinaten O und die Punkte p_k und p_{k+1} als Eckpunkte bestimmt wird, und zwar für dieselbe Drehrichtung der geraden Linie Op_k in Op_{k+1}, als durch welche die x-Axe in die Lage der y-Axe gebracht wird, so dass wenn man von Op_k nach

[illegible] beliebig [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] werden. [illegible] zur [illegible] darum kann [illegible] angesehen werden. —

Ausdehnung der *Jacobi*schen Regel zur Bestimmung des Inhalts der Sternpolygone für den Fall vielfacher Punkte.

(Von Herrn *O. Hermes.*)

Der in der *Jacobi*schen Untersuchung ausgeschlossene Fall, in welchem von den Seiten des Sternpolygons mehr als zwei durch denselben Punkt gehen, lässt sich auf den eben erledigten Fall dadurch zurückführen, dass man bei der Bezeichnung der Eckpunkte und Schnittpunkte der Seiten des Sternpolygons im Sinne des Umfanges jeden solchen Punkt auf jeder Seite mit soviel auf einander folgenden Zahlen bezeichnet, als in dem betreffenden Punkte Schnittpunkte mit den übrigen Seiten vereinigt gedacht werden können, so dass also wenn ein Punkt der Schnittpunkt von k Seiten ist, auf jede derselben, so wie man sie im Sinne des Umfanges durchläuft, an diesem Punkte $(k-1)$ auf einander folgende Zahlen zu setzen sind, ein solcher Punkt darum im Ganzen mit $k(k-1)$ Zahlen bezeichnet wird, und wenn sich in einem Punkte h Eckpunkte vereinigen und ausserdem k Seiten durchschneiden, so ist derselbe mit $(2h+k)(2h+k-1)$ Zahlen zu bezeichnen, weil in einem solchen Punkte $(2h+k)$ Seiten zusammentreffen. Demgemäss wird von jetzt ab wieder jeder einzelne Eckpunkt mit zwei auf einander folgenden Zahlen bezeichnet.

Nur diejenigen Sternpolygone, von welchen nicht mehr als zwei Seiten durch denselben Punkt gehen, und welche zur Unterscheidung von den übrigen *Sternpolygone im engeren Sinne* heissen mögen, sind in der Richtung ihres Umfanges durchweg bestimmt, sobald der Sinn der Richtung einer Seite fest angenommen ist. Die allgemeineren Sternpolygone dagegen enthalten solange eine Unbestimmtheit, als nicht genau angegeben ist, auf welchem Wege der Umfang derselben zu durchlaufen ist, weil jeder Schnittpunkt der Seiten derselben als ein Vereinigungspunkt von Eckpunkten angesehen werden kann, und andererseits Vereinigungspunkte von Ecken für den Fall, dass in ihnen zusammentreffende Seiten gleiche Richtung haben, zugleich als Schnittpunkte von Seiten betrachtet werden können, oder auch weil bei solchen Vereinigungs-

punkten zweifelhaft bleibt, welche Combinationen von Seiten die einzelnen zusammenfallenden Ecken bilden.

Jede Ungewissheit darüber, wie der Umfang des Sternpolygons zu verfolgen ist, sei von vorn herein beseitigt durch die genaue Angabe der Reihenfolge der Eckpunkte der Figur, so kann man nunmehr in Beziehung auf jeden mehrfachen Punkt des Umfanges das Sternpolygon als Grenzfall einer Figur betrachten, bei welcher die Schnittpunkte der Seiten oder die Eckpunkte noch nicht zusammengefallen sind, und demnach die gegebene Figur an jedem Punkt dieser Art so deformiren, dass die neue Figur daselbst ebensoviel Seiten und Ecken enthält, wie die Anzahl der Seiten und Ecken beträgt, durch deren Vereinigung der betreffende Punkt definirt ist. Hierbei hat man jedoch zu beachten, dass die Seiten einer solchen Hülfsfigur sich wirklich sämmtlich, und zwar nicht mehr als zwei in demselben Punkte, durchschneiden, hat also zu diesem Zwecke nöthigen Falls an den dabei in Betracht kommenden Eckpunkten die sie bildenden Seitenpaare über diese Eckpunkte hinaus zu verlängern, bis auch sie den ganzen Liniencomplex durchschneiden. Zur Bezeichnung dieser Hülfsfiguren, welche jetzt Sternpolygone im engeren Sinne sein werden, reichen alsdann gerade die sich um die zugehörigen mehrfachen Punkte gruppirenden Zahlen aus, weil auf jeder geraden Linie an dem betreffenden Punkte soviel auf einander folgende Zahlen stehen, wie die Anzahl der geraden Linien beträgt, mit denen sie in dem mehrfachen Punkte zusammentrifft.

Auch hier, bei der Aufstellung der Hülfsfigur, treten Unbestimmtheiten ein; es entsteht nämlich, was für das Folgende von Bedeutung ist, eine grosse Mannigfaltigkeit dieser Figuren dadurch, dass die ihnen zu Grunde liegenden Linien sich in verschiedener Reihenfolge und Gruppirung durchschneiden können. Wenn es sich jedoch lediglich um die Aufgabe handelt, das Sternpolygon in irgend einer Art durch Vielecke im engeren Sinne zu ersetzen, so kann von der zuletzt bemerkten Unbestimmtheit abgesehen werden, da dieselbe schliesslich nur eine Aenderung in der Eintheilung dieser Vielecke veranlasst. Mit Benutzung der nach dem obigen Verfahren zu bildenden Hülfsfigur kann man jedes allgemeine Sternpolygon, wieviel mehrfache Punkte auch der Umfang desselben enthalten mag, in derselben Weise, wie früher die Sternpolygone im engeren Sinne, als die Summe von Theilvielecken im engeren Sinne darstellen; sobald man bei der Bildung der einzelnen Zahlenreihen zu einem mehrfachen Punkte gelangt, hat man die jedesmalige Reihe



mit Zugrundelegung der Hülfsfigur zu vervollständigen, bis man von selbst wieder zur Rückkehr in die ursprüngliche Sternfigur veranlasst wird.

Hat man nach diesem Verfahren die sämmtlichen Zahlenreihen aufgestellt, so können bei den ihnen entsprechenden Vielecken schliesslich, wenn man dieselben aus dem gegebenen Sternpolygon darzustellen sucht, allein folgende beiden Fälle eintreten. Es können erstens ganze Theilpolygone oder Theile des Umfanges derselben sich in einen einzigen Punkt zusammenziehen, d. h. es reduciren sich entweder einige der resultirenden Theilvielecke auf einen Punkt, oder, wenn die sich zusammenziehenden Theile des Umfanges nur aus auf einander folgenden Seiten bestehen, verringert sich in ihnen nur die Seitenanzahl. Zweitens können getrennte Theile des Umfanges sich in dem mehrfachen Punkte vereinigen und demnach die resultirenden Vielecke aus einzelnen in dem mehrfachen Punkte als gemeinschaftlichem Eckpunkte zusammenhängenden Stücken bestehen. Der zweite Fall ist der einzige, in welchem durch die Zahlenreihen aus dem Sternpolygone nicht Theilpolygone im engeren Sinne ausgesondert werden, doch gestatten auch hier die den Reihen entsprechenden Figuren eine einfache Interpretation der von ihnen abgegrenzten Flächenstücke.

Berlin, 1865.

Sur un théorème relatif à huit points situés sur une conique.

(Par M. *A. Cayley* à Cambridge.)

On sait que le théorème de *Pascal* peut être déduit du théorème suivant: toute courbe cubique qui passe par 8 des 9 points d'intersection de deux courbes cubiques passe par tous les 9 points.

De même cet autre théorème — toute courbe quartique qui passe par 13 des 16 points d'intersection de deux courbes quartiques passe par tous les 16 points — conduit à un théorème relatif à 8 points situés sur une conique.

En effet si par 8 points donnés et situés sur une conique donnée on fait passer deux systèmes de 4 droites (ces deux systèmes doivent être sans droite commune) les deux systèmes sont des courbes quartiques qui se rencontrent dans les 8 points donnés et de plus dans 8 nouveaux points; donc toute courbe quartique qui passe par 13 des $8+8$ points passe par tous les $8+8$ points. Or la conique donnée passe par les 8 points donnés, et par 5 des 8 nouveaux points on peut faire passer une autre conique: les deux coniques forment ensemble une courbe quartique qui passe par $8+5$ des $8+8$ points, et qui passera ainsi par les $8+8$ points; c'est à dire la nouvelle conique passe par les 8 nouveaux points, ou autrement dit, les 8 nouveaux points sont situés sur une conique — c'est là le théorème relatif à 8 points situés sur une conique.

On déduit de là les théorèmes 3, 4, 5 de *Steiner* (Lehrsätze und Aufgaben, ce journal t. XXX, pp. 274 et 275). En effet considérons sur une conique donnée n points donnés, et les n tangentes dans ces mêmes points. En combinant deux à deux les n points on obtient $\frac{1}{2}n(n-1)$ droites G: ces droites se coupent deux à deux dans les n points donnés, qui comptent pour $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)$ intersections, et de plus dans $\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)$ points r. Chacune des n tangentes rencontre les $\{\frac{1}{2}n(n-1)-(n-1)\}$ droites G qui ne passent pas par le point de contact de cette tangente, dans $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ points s, ce qui donne en tout $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)$ points s. Enfin les n tangentes se rencontrent deux à deux dans $\frac{1}{2}n(n-1)$ points t.

On a ainsi

$$\begin{array}{ll} \tfrac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3) & \text{points } r \\ \tfrac{1}{2}n(n-1)(n-2) & \quad - \quad s \\ \tfrac{1}{2}n(n-1) & \quad - \quad t \\ \text{ensemble } \tfrac{1}{8}n(n-1)(n^2-n+2) & \text{points.} \end{array}$$

Or parmi ces points, il y a selon les trois théorèmes de *Steiner* un grand nombre de systèmes de 8 points sur une conique.

Prenons d'abord sur la conique donnée 4 points quelconques a, b, c, d des n points, et considérons aussi les points consécutifs a', b', c', d'. La figure des 4 points a, b, c, d et des 4 tangentes dans ces mêmes points équivaut à celle des 8 points $a, a', b, b', c, c', d, d'$ Partant de l'arrangement $abcd$ (lisez-le cycliquement et il correspondra a l'un des 3 quadrilatères que l'on peut former avec les 4 points) on forme avec les 8 points les deux systèmes que voici de 4 droites chacun

Système aa', bb', cc', dd', c'est à dire les tangentes aux 4 points a, b, c, d,

Système $a'b, b'c, c'd, d'a$, c'est à dire ab, bc, cd, da;

et ces deux systèmes se rencontrent dans les 8 points $a, a', b, b', c, c', d, d'$ (ou ce qui est la même chose dans les points a, b, c, d, chacun compté 2 fois) et dans 8 nouveaux points compris entre les points r, s, t; ces 8 points sont donc situées sur une conique. Comme il y a 3 arrangements $abcd, acdb, adbc$ des 4 points, on obtient de cette manière 3 systèmes de 8 points sur une conique.

Prenons sur la conique 5 points quelconques a, b, c, d, e des n points, et considérons aussi 3 points consécutifs a', b', c'. Partant de l'arrangement $abcde$ (qui correspond à l'un des 12 pentagones que l'on peut former avec les 5 points) on forme avec les points $a, a', b, b', c, c', d, e$ les deux systèmes de 4 droites chacun

Système aa', bb', cc', de, c'est à dire les tangentes en a, b, c et la droite de

Système $a'b, b'c, c'd, ea$, c'est à dire ab, bc, cd, ea,

et on obtient de là (parmi les points r, s, t) un système de 8 points sur une conique. A cause des 12 arrangements des 5 points, il y a 12 systèmes. Mais au lieu des points consécutifs (a', b', c') on aurait pu prendre toute autre combinaison (a', b', d') etc.; le nombre des combinaisons étant 10, il y a donc $12 \times 10 = 120$ systèmes de 8 points sur une conique.

Prenons de même 6 points quelconques a, b, c, d, e, f des n points.

En considérant les points consécutifs a', b' et en partant de l'arrangement *abcdef*, on forme avec les 8 points a, a', b, b', c, d, e, f les deux systèmes de 4 droites

Système aa', bb', cd, ef c'est à dire les tangentes en a, b et les droites cd, ef,

Système $a'b$, $b'c$, de, fa c'est à dire ab, bc, de, fa,

ce qui donne parmi les points r, s, t un système de 8 points sur une conique. Il y a 60 arrangements des points a, b, c, d, e, f et 15 combinaisons (a', b') etc. des points consécutifs; on a donc $60 \times 15 = 900$ systèmes de 8 points sur une conique.

Prenons encore 7 points quelconques a, b, c, d, e, f, g des n points. En considérant le point consécutif a', et en partant de l'arrangement *abcdefg*, on forme avec les points a, a', b, c, d, e, f, g les deux systèmes de 4 droites

Système aa', bc, de, fg c'est à dire la tangente en a, et les droites bc, de, fg,

Système $a'b$, cd, ef, ga c'est à dire ab, cd, ef, ga,

et on obtient ainsi parmi les points r, s, t un système de 8 points sur une conique. Il y a 360 arrangements *abcdefg* etc. et 7 différents points consécutifs a' etc.: cela donne $360 \times 7 = 2520$ systèmes de 8 points sur une conique.

Prenons enfin 8 points quelconques a, b, c, d, e, f, g, h des n points.

Partant de l'arrangement *abcdefgh*, on forme avec les 8 points les deux systèmes de 4 droites chacun (ab, cd, ef, gh) et (bc, de, fg, ha), ce qui conduit à un système de 8 points sur une conique. Mais on a 2520 arrangements *abcdefgh* etc. — il y a ainsi 2520 systèmes de 8 points sur une conique.

On voit que les systèmes de 8 points sur une conique dérivent de 4, 5, 6, 7 ou 8 des n points sur la conique donnée. En supposant $n = 4$ on n'a que les systèmes qui dérivent des 4 points; si $n = 5$, on a les systèmes qui dérivent de 4 points choisis d'une manière quelconque entre les 5 points — et les systèmes qui dérivent des 5 points: et ainsi de suite; pour $n = 8$ on a les systèmes qui dérivent de 4, 5, 6 ou 7 points choisis d'une manière quelconque entre les 8 points, et les systèmes qui dérivent des 8 points. On peut former la table suivante pour montrer dans les différents cas le nombre des systèmes de 8 points sur une conique

	$r=$	$s=$	$t=$	$r+s+t=$	Nombre des systèmes de 8 points sur une conique				
					4 points 3	5 points 120	6 points 900	7 points 2520	8 points 2520
$n=4$, St. 3	3	12	6	21	$\times 1=3$				
$n=5$, St. 4	15	30	10	55	$\times 5=15$	$\times 1=120$			
$n=6$, St. 5	45	60	15	110	$\times 15=45$	$\times 6=720$	$\times 1=900$		
$n=7$	105	105	21	231	$\times 35=105$	$\times 21=2520$	$\times 7=6300$	$\times 1=2520$	
$n=8$	210	168	28	406	$\times 70=210$	$\times 56=6720$	$\times 28=25200$	$\times 8=20160$	$\times 1=2520$

Le cas $n=4$ est le théorème 3 de *Steiner*, il y a 3 systèmes de 8 points sur une conique; le cas $n=5$ est le théorème 4, il y a $15+120$ systèmes; le cas $n=6$ est le théorème 5, il y a $45+720+900$ systèmes. Pour $n=7$ il y a $105+2520+6300+2520$ systèmes et pour $n=8$, $210+6720+25200+20160+2520$ systèmes.

Le cas $n=5$ est surtout intéressant: en effet comme une conique est déterminée par 5 points, on a ici 5 points quelconques (a, b, c, d, e) et les cinq tangentes (les droites A, B, C, D, E de *Steiner*) sont des droites déterminées par les cinq points et que l'on peut construire (avec la règle seulement) c'est là en effet la forme sous laquelle le théorème est présenté par *Steiner;* il ne parle nullement de la conique qui passe par les 5 points — et il donne pour les 5 droites une construction; à savoir, les 15 points r sont situés deux à deux sur 15 droites L qui ne dépendent chacune que de 4 points, et sur 60 droites H qui dépendent chacune des 5 points; les 60 droites H combinées deux à deux d'une manière convenable se rencontrent dans 30 points s (c'est la définition de ces points) et puis (théorème) on a 5 droites A, B, C, D, E qui contiennent chacune 6 points s et qui passent par les points a, b, c, d, e respectivement — et (théorème) les 30 points s sont aussi situés sur les 10 droites G, 3 points sur chaque droite. Je remarque qu'en prenant sur la conique qui passe par a, b, c, d, e, un point quelconque g, il y aurait 24 hexagones inscrits ayant ag pour côté — et de là 24 droites Pascaliennes — et par le point d'intersection de ag avec l'une quelconque des 6 droites bc etc. on a 4 de ces droites Pascaliennes. Cela posé, en prenant pour g le point consécutif a', les 24 hexagones se confondent deux à deux — on a donc 12 hexagones inscrits et autant de droites Pascaliennes — ces droites sont les 12 droites H lesquelles se rencontrent deux à deux dans les 6 points s situés sur la droite aa' ou A. *Steiner* dit que les 120 coniques dépendent des 5 points, mais que les 15 coniques *dépendent chacune de* 4 *points seulement;* en donnant (comme il l'a fait) le théorème comme un théo-

rème par rapport à cinq points quelconques, cela n'est pas exact — en effet les coniques dont il s'agit dépendent chacune de 4 des cinq points, et des 4 droites correspondantes, tangentes dans ces mêmes points à la conique qui passe par les cinq points — ces coniques dépendent ainsi des cinq points.

Je remarque en passant que partant des cinq points donnés a, b, c, d, e il y a sur chacune des droites A, B, C, D, E un point remarquable, dont *Steiner* ne parle pas, mais qui aurait pu servir à une construction de cette droite — par exemple il y a sur la droite A le point α qui est l'intersection commune des polaires de a par rapport à toutes les coniques qui passent par les points b, c, d, e — en particulier ce point α est l'intersection commune des polaires (harmonicales) de a par rapport aux trois paires de droites (bc, de), (bd, ec), (be, cd) respectivement.

Cambridge, 16 Fev. 1865.

Ueber invariantive Elemente einer orthogonalen Substitution, wenn dieselbe als Ausdruck einer Bewegung jeder Gruppe von Werthen der Variabeln aus dem identischen Zustande in den transformirten gefasst wird.

(Von Herrn *Schläfli* zu Bern.)

Euler hat gezeigt, dass jede gegebene Ortsveränderung eines starren Körpers um einen festen Punkt durch eine einfache Drehung um eine feste Axe dargestellt werden kann, wenn nur der Anfangs- und Endeszustand, aber nicht die Zwischenzeit in Betracht kommen. Nimmt man den festen Punkt als Ursprung eines orthogonalen Axensystems an, dem im Anfange die identische Substitution entsprechen möge, so wird die gegebene Ortsveränderung durch eine orthogonale Substitution dargestellt. Diese hat nun ein einziges invariantives Element, den Winkel der Drehung um jene feste Axe, der den eigentlichen Betrag der gegebenen Ortsveränderung ausdrückt, frei von der Zufälligkeit der Wahl der Axen des Körpers.

Versuchen wir diesen Begriff auf n Dimensionen zu übertragen, so sehen wir uns veranlasst, zwei orthogonale Substitutionen zu unterscheiden. Die eine, S, ist *gegeben* und stellt gleichsam die Verrückung eines starren Systemes von n Dimensionen dar, wir nennen sie die *Verrückungssubstitution*. Die andere, P, ist *verfügbar* und soll nur dienen die Zufälligkeit der Wahl der Axen auszudrücken, wir nennen sie die *Transformationssubstitution*. Der allgemeine Ausdruck für die Verrückungssubstitution wird dann $(P^{-1}SP)$ sein. Es fragt sich, wie stark dieser Ausdruck reducirt werden kann *).

Für eine infinitesimale Verrückung giebt die Theorie der *schiefen Determinanten*, die *Cayley* im 38sten Bande dieses Journals aufgestellt hat, eine schnelle Antwort auf obige Frage. Wenn man nämlich die zweite Ordnung vernachlässigt, so kann S nicht anders als durch eine schiefe Matrix dargestellt werden, worin die diagonalen Elemente alle 1 und die übrigen infinitesimal erster Ordnung sind. Streicht man die diagonalen Elemente, so dass die Matrix schief und symmetrisch wird, so hat man die Coefficienten in denjenigen linearen Gleichungen, welche die Projectionen der linearen Verschiebung irgend eines Punktes ausdrücken. Da der Determinant dieser Matrix nur für ein ungerades n verschwindet, so giebt es auch nur in diesem Falle eine

---

*) Der Determinant einer orthog. Substitution ist hier immer gleich 1 vorausgesetzt.

feste Axe, d. h. es giebt Punkte, deren Verschiebungsprojectionen sämmtlich Null sind; und diese Axe ist desshalb bestimmt, weil die ersten Minore nicht alle verschwinden. Wenn n gerade ist, so kann man jenen linearen Gleichungen, die die Ruhe eines Punktes ausdrücken, nicht genügen, es giebt keine feste Axe, und es bleibt nur noch übrig, nach einem Maximum der angularen Verschiebung zu fragen. Man bekommt als gleich mit Null wieder einen schiefen symmetrischen Determinant, dessen Elemente lineare Functionen des gesuchten Maximums sind. Da aber derselbe nothwendig ein Quadrat ist, so giebt die Gleichung nur $\frac{1}{2}n$ verschiedene Lösungen, und alle zu einer solchen Lösung gehörenden ersten Minore verschwinden. Der Strahl *) also, dem die Wurzel als maximale angulare Verschiebung zukäme, wird nicht bestimmt, sondern kann eine Ebene beschreiben, und alle Strahlen dieser Ebene drehen sich um denselben maximalen Betrag, und ihre Verschiebungen fallen in diese Ebene. Wählt man in jeder der $\frac{1}{2}n$ Ebenen ein Paar zu einander senkrechter Strahlen, so kann man zeigen, dass alle n Strahlen ein orthogonales System bilden; aus der Orthogonalität folgt dann die Realität aller Wurzeln jener Gleichung $\frac{1}{2}n^{\text{ten}}$ Grades, also auch diejenige der $\frac{1}{2}n$ *Hauptebenen*. Wenn eine Wurzel der erwähnten Gleichung αfach vorhanden ist, so wird nur ein lineares Continuum von 2α Dimensionen bestimmt, worin man eine Gruppe von α Hauptebenen mit $\alpha(\alpha-1)$facher Willkür wählen kann.

Eine *endliche* Verrückung verhält sich ähnlich. Ihre Substitution sei S, die maximalen Drehungswinkel seien $\theta, \theta', \ldots$. Man addire je zwei entsprechende Elemente der Substitutionen S und S^{-1}, setze zu jedem diagonalen Elemente noch $-2\cos\theta$ und bezeichne den Determinant der so gebildeten Matrix mit U. Ferner multiplicire man jedes Element von S mit $-2\cos\theta$, addire das Product zum entsprechenden Elemente von S^2 und setze jedem diagonalen Elemente noch $+1$ zu; der Determinant aller so erhaltenen Elemente sei V. Endlich setze man $-e^{i\theta}$ zu jedem diagonalen Elemente von S und bezeichne den Determinant aller Elemente mit $T(\theta)$ **). Dann ist $U=V$ identisch richtig, und wenn man die Matrix von $T(-\theta)$ um ihre Diagonale umwendet und jede ihrer Zeilen mit jeder Zeile von $T(\theta)$ combinirt, so erhält man $T(\theta).T(-\theta)=V$. Aber $T(-\theta)=(-1)^n e^{-in\theta}T(\theta)$; also $U=(-1)^n e^{-in\theta}(T(\theta))^2$.

---

*) Wenn von Strahlen, Ebenen, Continuen die Rede ist, so ist immer gemeint, dass sie durch den Ursprung gehen.

**) Dieser Ausdruck findet sich in *Baltzers* Theorie der Determinanten, wo *Brioschi Liouv*. J. 19 citirt wird; aber nur die Wurzel $e^{i\theta}=1$ wird erwähnt.

Wenn nun n ungerade ist, so ist $e^{i\theta}=1$ eine Wurzel von $T(\theta)=0$, und dieser entspricht eine einfache Wurzel $\cos\theta=1$ von $U=0$, während alle übrigen Wurzeln doppelt sind, d. h. $\sqrt{\frac{U}{1-\cos\theta}}=(\cos\theta, 1)^{\frac{1}{2}(n-1)}$. Wenn aber n gerade ist, so ist $\sqrt{U}=e^{-i.\frac{1}{2}n\theta}T(\theta)=(\cos\theta, 1)^{\frac{1}{2}n}$. Nun sind aber die Elemente der Matrix von U die Coefficienten in denjenigen linearen Gleichungen, welche die Richtung eines Strahls von maximalem Drehungswinkel bestimmen. Für ein ungerades n und $\cos\theta=1$, da diese Wurzel nur einfach ist, verschwinden also die ersten Minore des Determinants U nicht alle; es giebt eine *feste Axe.* Aber für jede doppelte Wurzel von $U=0$ verschwinden alle ersten Minore, im Allgemeinen jedoch nicht die zweiten, und es giebt eine entsprechende *feste Hauptebene*, in der die zugehörige maximale Drehung θ geschieht. Für ein gerades n hingegen kann es nur Hauptebenen geben. Die Orthogonalität und die Realität des invariantiven Systems sind auch hier leicht zu beweisen.

Wenn die Elemente von T als Coefficienten in linearen Gleichungen gebraucht werden, so bestimmen diese Gleichungen den Strahl, der in einer Hauptebene nach einem der zwei festen Kreispunkte im Unendlichen geht.

(Ich will der Kürze wegen ein System von $n-r$ homogenen linearen Gleichungen zwischen den n Coordinaten, als Gesammtheit aller seiner Lösungen oder Punkte aufgefasst, mit (∞^r) bezeichnen und lineares Continuum von r Dimensionen nennen.) Wenn in der auf $\cos\theta$ reducirten Gleichung $T=0$ eine Wurzel αfach vorhanden ist, so bestimmt sie ein $(\infty^{2\alpha})$, das zu allen übrigen Hauptebenen (oder Hauptcontinuen) orthogonal ist. Durch jeden Strahl dieses Continuums geht eine Hauptebene, und diese ist dadurch bestimmt, dass sie mit jedem von zwei festen imaginären und conjugirten (∞^{α}) je einen Strahl gemein hat. Wenn im $(\infty^{2\alpha})$ ein orthogonales Axensystem $(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots x_\alpha, y_\alpha)$ gewählt ist, wo je zwei mit demselben Zeiger versehene Axen eine Hauptebene bilden, so ist $(x_r+iy_r=0, r=1, 2, \ldots \alpha)$ das eine jener festen imaginären Continuen und $\Sigma(x-iy=0)$ das andere; und wenn nun irgend ein Strahl durch seine Projectionen $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots a_\alpha, b_\alpha$ gegeben ist, so ist die durch ihn gehende Hauptebene dadurch bestimmt, dass noch der auf ihm senkrechte Strahl $(-b_1, a_1, -b_2, a_2, \ldots -b_\alpha, a_\alpha)$ in derselben Hauptebene liegt. Multiplicirt man die Projectionen des letzten mit i und addirt sie dann zu denen des ersten Strahls, so bekommt man den Strahl, den diese Hauptebene mit dem Continuum $\Sigma(x+iy=0)$ gemein hat.

Bern, 1865.

Programme pour le prix *Carpi.*

(Proposé par l'Académie Pontificale des Nuovi Lincei.)

Thème. „Exposer une méthode au moyen de laquelle on puisse déterminer *toutes* les valeurs rationnelles de x capables de rendre un carré ou un cube parfait le polynôme $A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4$, pour des valeurs entières de $A, B, C, D, E,$ pourvu qu'une ou plusieurs de ces valeurs de x existent réellement, et qui, en cas contraire, en fasse connaître l'impossibilité".

Un „éclaircissement" qui accompagne ce programme fait connaître les travaux des géomètres qui ont traité la question dont il s'agit:

Une méthode de *Fermat* se trouve exposée par *Jacques de Billy: Doctrinae analyticae inventum novum* (p. 30 et 31 de l'édition intitulée: *Diophanti Alexandrini Arithmeticorum libri sex, et de numeris multangulis liber unus*, etc. *Tolosae* M.DC.LXX), par *Léonard Euler: Einleitung in die höhere Algebra,* traduit en français sous le titre d'*Élémens d'algèbre,* tome second, chapitres VIII, IX, X, et par *Legendre: Théorie des nombres,* troisième édition 1830, tome II, (p. 123—125).

Les plus importants mémoires relatifs à la question sont les suivants: *Euler: Methodus nova et facilis formulas cubicas et biquadraticas ad quadratum reducendi,* mémoire posthume qui fait partie du tome XI des mémoires de l'académie de St. Petersbourg (année 1830), *Jacobi: De usu theoriae integralium ellipticorum et integralium Abelianorum in analysi Diophantea,* tome 13 de ce Journal et *Lagrange: sur quelques problèmes de l'Analyse de Diophante, Mémoires de l'Académie de Berlin* année 1777.

Cependant ces méthodes sont imparfaites 1°. parce qu'elles supposent une solution déjà connue; 2°. parce qu'il n'est pas prouvé qu'elles fournissent toutes les solutions possibles. Il serait par conséquent à désirer, qu'on en trouvât une autre, qui n'eût besoin de la connaissance d'aucune solution, fît connaître si le problème est possible ou non, et dans le cas où il est possible, en donnât toutes les solutions.

Les mémoires sur le thème proposé devront être rédigés en italien, en latin, ou en français. Chaque mémoire portera sur son frontispice une épigraphe, qui sera répétée à l'extérieur d'une enveloppe cachetée, dans laquelle se trouveront le nom et l'adresse de l'auteur. On ouvrira seulement l'enveloppe correspondante au mémoire qui aura obtenu le prix. Si les auteurs qui auront obtenu une mention honorable désirent que l'Académie publie leurs noms, il faudra qu'ils en fassent la demande dans les quatre mois qui suivront le jour dans lequel le prix aura été décerné; ce terme expiré les enveloppes seront brulées sans être décachetées. Chaque mémoire avec l'enveloppe cachetée correspondante devra être envoyé *franco* à l'Académie, avant le dernier jour du mois d'octobre 1866, date de la clôture du concours. Le prix sera décerné par l'Académie dans le mois de janvier 1867 et consistera en une médaille d'or de la valeur de *cent écus romains.* Le mémoire couronné sera publié entièrement ou par extrait, dans les *Atti* de l'Académie, et l'auteur en recevra cinquante exemplaires.

Rome, 11 juin 1865.

Erweiterung des Satzes, dass zwei polare Dreiecke perspectivisch liegen, auf eine beliebige Zahl von Dimensionen.

(Von Herrn *Schläfli* zu Bern.)

Im Quarterly mathematical Journal, vol. I, S. 191, S. 239 und S. 241 haben *Salmon* und *Ferrers* Beweise des im Titel ausgesprochenen Satzes für die Ebene und den Raum gegeben; in dem letzteren treten vier Reihen von je vier Coordinatenwerthen auf, die zusammen einen symmetrischen Determinant bilden. Da die diagonalen Elemente dieses Determinants in den dortigen Proportionen (S. 241 (1) bis (4)) nicht vorkommen, so sind sie variabel, aber durch drei Relationen, die aus der Aufgabe entspringen, mit einander verbunden. *Ferrers* zeigt dann, dass eine vierte von der Aufgabe verlangte Relation, die, wenn sie unabhängig wäre, alle vier Punkte vollständig bestimmte, nur eine nothwendige Folge der drei vorigen ist. Die Betrachtung des *Ferrers*schen Beweises hat mich überzeugt, dass er wesentlich auf diesem Satze beruht:

Das Verschwinden aller ersten Minore eines symmetrischen Determinants zählt nur für drei Bedingungen, während es für einen freien Determinant deren vier zählt.

Der Beweis dieses Satzes ist überflüssig, da er als specieller Fall in dem *Kronecker*schen Satze enthalten ist, welchen *Baltzer* in seiner Determinanten-Theorie, 2[te] Auflage S. 33 mittheilt.

Ich will die Zeilen eines Determinants $\varDelta = \binom{0\,1\,2\,3 \dots n}{0\,1\,2\,3 \dots n}$ mit obern, die Spalten mit untern Zeigern bezeichnen, und indem ich die Elemente selbst als Determinanten erster Ordnung betrachte, bezeichne ich diejenigen der obersten Zeile mit $\binom{0}{0}, \binom{0}{1}, \binom{0}{2}, \dots \binom{0}{n}$, ferner setze ich $\binom{0}{0}\binom{1}{1} - \binom{0}{1}\binom{1}{0} = \binom{01}{01}$, u. s. f.; das im Determinant mit $\binom{0}{0}$ multiplicirte Aggregat bezeichne ich mit $\genfrac{[}{]}{0pt}{}{0}{0} = \binom{1\,2\,3 \dots n}{1\,2\,3 \dots n}$, das mit $\binom{01}{02}$ multiplicirte Aggregat mit $\genfrac{[}{]}{0pt}{}{01}{02} = \binom{2\,3\,4 \dots n}{3\,1\,4 \dots n}$, u. s. f., so dass z. B. $\genfrac{[}{]}{0pt}{}{0}{0}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{r}{1} - \genfrac{[}{]}{0pt}{}{0}{1}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{r}{0} = \genfrac{[}{]}{0pt}{}{0r}{01}\varDelta$ wird.

Dies vorausgesetzt, kann der Satz über die ersten Minore, um den es

sich hier handelt, folgendermassen ausgesprochen werden: es seien die zweiten Minore des Determinants Δ nicht sämmtlich gleich Null sondern mindestens einer derselben z. B. $\begin{bmatrix}01\\01\end{bmatrix}$ von Null verschieden, dann hat das Verschwinden der vier ersten Minore $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ das Verschwinden sämmtlicher ersten Minore zur Folge.

Im Allgemeinen reichen also die vier Bedingungen $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=0$, $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=0$, $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=0$, $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=0$ hin um das Verschwinden sämmtlicher ersten Minore des Determinants Δ zu bewirken. Wenn aber der Determinant symmetrisch ist, so ist $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, und die Bedingungen sind bloss drei an Zahl.

Die Behandlung des allgemeinen Satzes, der Gegenstand dieses Aufsatzes ist, wird verständlicher werden, wenn ich zuerst den *Ferrers*schen Beweis für den räumlichen Fall mit stärkerer Hervorhebung dessen, was ich als Fundament betrachte, wiederhole.

Es sei $V=(w, x, y, z)^2$ das Polynom einer gegebenen Fläche zweiten Grades,

$$\begin{aligned}
p &= kw+ax+by+cz,\\
q &= aw+lx+hy+gz,\\
r &= bw+hx+my+fz,\\
s &= cw+gx+fy+nz
\end{aligned}$$

seien seine halben Abgeleiteten, also $V=pw+qx+ry+sz=0$ die Gleichung der Fläche. Dann sind die zwei Tetraeder $wxyz=0$ und $pqrs=0$ zu einander polar. Im Eck $\frac{\partial}{\partial w}$ des ersten Tetraeders ist $p=k$, $q=a$, $r=b$, $s=c$, im homologen Eck des zweiten Tetraeders $q=0$, $r=0$, $s=0$. Wenn also φ eine Variable bedeutet und p, q, r, s als Coordinaten gelten, die auf das zweite Tetraeder bezogen sind, so sind φ, a, b, c Coordinaten des laufenden Punktes in der Geraden, die beide homologen Ecken verbindet. Wenn χ, ψ, ω ebenfalls Variable bedeuten, so sind alle vier Geraden, die je zwei homologe Ecken beider Tetraeder verbinden, durch die Zeilen der Matrix

$$\begin{Bmatrix}
\varphi & a & b & c\\
a & \chi & h & g\\
b & h & \psi & f\\
c & g & f & \omega
\end{Bmatrix}$$

dargestellt. Verlangen wir nun, dass alle vier Punkte, je einer auf jeder Verbindungslinie, in einer Geraden liegen, so müssen sämmtliche ersten Minore dieser Matrix verschwinden. Da dieses nur drei Relationen liefert, denen die Variabeln φ, χ, ψ, ω genügen müssen, so bleibt eine derselben frei, die verlangte Gerade wird nicht bestimmt, sondern kann sich einfach bewegen und beschreibt daher eine Fläche zweiten Grades. Es sei (p, q, r, s) ein Punkt der erzeugenden Geraden, so steht es uns frei, für denselben die Bedingungen

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ b & \psi & f \\ c & f & \omega \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} p & q & r \\ b & h & \psi \\ c & g & f \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} p & q & s \\ b & h & f \\ c & g & \omega \end{vmatrix} = 0$$

zu wählen und aus diesen ψ, ω zu eliminiren. Schliessen wir den Fall aus, wo $bg = ch$, diesem Systeme also entweder durch $hp = bq$ und eine Relation zwischen ψ, ω, oder ohne eine Relation zwischen p, q, r, s durch $c\psi = bf$, $b\omega = cf$ genügt würde, so ergiebt sich

$$(bg-ch)(fpq+ars)+(ch-af)(gpr+bqs)+(af-bg)(hps+cqr) = 0$$

als Gleichung der Fläche zweiten Grades, die alle vier Verbindungsgeraden enthält, was man mit grösster Leichtigkeit verificiren kann.

Will man diese Fläche auf das erste Tetraeder beziehen, so braucht man nur p, q, r, s durch w, x, y, z und die Elemente a, b, ... durch die entsprechenden Minore A, B, ... zu ersetzen. Da $BG-CH = \Delta(bg-ch)$, etc., so erhält man $\Sigma(bg-ch)(Fwx+Ayz) = 0$.

Wollte man diese Fläche in Bezug auf $V=0$ polarisiren, um diejenige Fläche zweiten Grades zu erhalten, die alle vier Geraden $(w=0,\ p=0)$, $(x=0, q=0)$, $(y=0, r=0)$, $(z=0, s=0)$ enthält, in denen je zwei homologe Seitenebenen beider Tetraeder sich schneiden, so hätte man, $bg-ch = \alpha$, $ch-af = \beta$, $af-bg = \gamma$ setzend, die Bedingungen

$$\begin{cases} 0 = wp + xq + yr + zs, \\ tw = \alpha fq + \beta gr + \gamma hs, \\ tx = \alpha fp + \gamma cr + \beta bs, \\ ty = \beta gp + \gamma cq + \alpha as, \\ tz = \gamma hp + \beta bq + \alpha ar \quad , \end{cases}$$

aus denen p, q, r, s, t zu eliminiren wären. Der Determinant der Coefficienten in den vier untern Zeilen rechts ist $(\alpha\beta\gamma)^2$, und alle ersten Minore sind durch $\alpha\beta\gamma$ theilbar. Befreit man sie von diesem Factor, so erhält man

in der obersten Zeile $2abc$, $a(bg+ch)$, etc. Wir wollen indess die Gleichung dieser Fläche direct aus der Betrachtung obiger Matrix $\left|\begin{smallmatrix}\varphi & a & b & c\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\end{smallmatrix}\right|$ herleiten. Wenn φ willkürlich ist, so ist $\varphi w+ax+by+cz=0$ die Gleichung irgend einer Ebene, die durch die Gerade $(w=0, p=0)$ gelegt ist, u. s. f. Denken wir uns nun die drei Relationen zwischen φ, χ, ψ, ω erfüllt, vermöge deren sämmtliche ersten Minore jener Matrix verschwinden, so giebt es zwei von einander unabhängige *Lösungen* (w, x, y, z), (w', x', y', z') des Systems aller vier Gleichungen ($\varphi w+ax+by+cz=0$, etc.). Dann ist aber auch der Punkt $(w+\lambda w', x+\lambda x', y+\lambda y', z+\lambda z')$ eine Lösung desselben Systems, und wir haben (wegen des willkürlichen Factors λ) eine *Gerade,* die allen vier Ebenen $\varphi w+ax+by+cz=0$, etc. gemein ist und sich einfach bewegt, also eine Fläche zweiten Grades beschreibt, in der alle vier Durchschnitte $(w=0, p=0)$, etc. liegen. Um ihre Gleichung zu bekommen, brauchen wir nur ψ, ω aus den drei Gleichungen

$$\begin{vmatrix} a & h & g\\ b & \psi & f\\ c & f & \omega\end{vmatrix}=0,\qquad \begin{matrix} bw+hx+\psi y+fz=0,\\ cw+gx+fy+\omega z=0\end{matrix}$$

zu eliminiren und erhalten *)

$$T=abcw^2+ahgx^2+bhfy^2+cgfz^2+(bg+ch)(awx+fyz)+(ch+af)(bwy+gxz)$$
$$+(af+bg)(cwz+hxy)=0.$$

Dass diese Fläche durch die vier Geraden $(w=0, p=0)$, etc. geht, verificirt sich sogleich an der Form

$$T=abcw^2+w(a(bg+ch)x+b(ch+af)y+c(af+bg)z)+(ax+by+cz)(ghx+hfy+fgz)$$

ihres Polynoms, wobei zu beachten ist, dass die zweite Gerade $ghx+hfy+fgz=0$, in der die Ebene $w=0$ von der Fläche $T=0$ geschnitten wird, die Lösung unserer Aufgabe in der *Ebene* für das Dreieck $xyz=0$ und sein polares in Bezug auf die Curve $lx^2+my^2+nz^2+2fyz+2gxz+2hxy=0$ darstellt. Der Discriminant von $2T$ ist $(\alpha\beta\gamma)^2$, und seine Minore sind $\alpha\beta\gamma \times (0, \alpha f, \beta g, \gamma h)$, etc.

Wir gehen nun an die allgemeine Aufgabe. Es sei

$$V=a_0x_0^2+a_1x_1^2+\cdots+a_nx_n^2+2\binom{0}{1}x_0x_1+2\binom{0}{2}x_0x_2+\cdots+2\binom{n-1}{n}x_{n-1}x_n=0$$

---

*) Vergleiche Quart. Journal I., p. 195 unten.

die quadratische Gleichung, in Bezug auf die das Gebilde $x_0 x_1 x_2 \ldots x_n = 0$ polarisirt werden soll $\left(\text{es ist } \binom{1}{0} = \binom{0}{1}, \text{ etc. angenommen}\right)$. Wird

$$p_0 = a_0 x_0 + \binom{0}{1} x_1 + \binom{0}{2} x_2 + \cdots + \binom{0}{n} x_n, \quad \text{etc.}$$

gesetzt, so ist das zweite zum vorigen polare Gebilde $p_0 p_1 p_2 \ldots p_n = 0$. Da der erste Theil der Aufgabe [die homologen Ecken beider polaren Gebilde durch Gerade zu verbinden, auf jeder von $n-2$ dieser Geraden je einen Punkt willkürlich zu wählen, durch diese $n-2$ Punkte eine *einfach drehbare lineare Gleichung* (im Raume wäre es ein Ebenenbüschel) so zu legen, dass sie noch mit der $(n-1)^{\text{ten}}$ Verbindungslinie einen Punkt und mit der n^{ten} einen Punkt gemein habe, worauf sie von selbst mit der $(n+1)^{\text{ten}}$ Verbindungslinie einen Punkt gemein haben wird, endlich alle jene erstgenannten $n-2$ Punkte unabhängig von einander auf den betreffenden Verbindungslinien zu bewegen, die drehbare lineare Gleichung, welche $n+1$ Punkte mit sämmtlichen Verbindungslinien (mit jeder einen) gemein hat, zu drehen und nun die *höhere Gleichung* zu finden, die von der $(n-1)$fach beweglichen linearen Gleichung *umhüllt* wird] zu grossen Schwierigkeiten unterliegt, so wenden wir uns sogleich zum zweiten Theile, eine Gerade zu ziehen, die mit jedem der Durchschnitte $(x_r = 0, p_r = 0)$, $(r = 0, 1, 2, \ldots n)$ einen Punkt gemein hat. Statt der gegebenen $a_0, a_1, \ldots a_n$ führen wir als diagonale Elemente der Matrix $\begin{pmatrix} 0\,1\,2 \ldots n \\ 0\,1\,2 \ldots n \end{pmatrix}$ die Variabeln $\binom{0}{0}, \binom{1}{1}, \ldots \binom{n}{n}$ ein und unterwerfen sie den drei Bedingungen, die das Verschwinden aller ersten Minore bewirkt. Dann werden alle $n+1$ Gleichungen $\binom{r}{0} x_0 + \binom{r}{1} x_1 + \binom{r}{2} x_2 + \cdots + \binom{r}{n} x_n = 0$, $(r = 0, 1, \ldots n)$ durch zwei von einander unabhängige Coordinatengruppen befriedigt; ihre Lösungen bilden also eine Gerade; und da $n-2$ unabhängige Variabeln, z. B. $\binom{3}{3}, \binom{4}{4}, \ldots \binom{n}{n}$ übrig bleiben, so beschreibt die Gerade ein krummes Continuum von $n-1$ Dimensionen, das also durch eine einzige Gleichung $T = 0$ auszudrücken ist. Nimmt man z. B. aus den linearen Gleichungen mit $r = 2, 3, \ldots n$ die Werthe für $\binom{2}{2}, \binom{3}{3}, \ldots \binom{n}{n}$ und substituirt sie in der Bedingung $-\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$, so erhält man eine Gleichung $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades in $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$. Denn man muss z. B. die Zeilen $2, 3, \ldots n$ resp. mit $-x_2, -x_3, \ldots -x_n$ multipliciren, um substituiren zu können. Es sei $T = (-1)^n x_2 x_3 \ldots x_n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, wenn die Substitutionen ausgeführt sind. Giebt man der

Matrix die Anordnung $\binom{1\,2\,3\ldots n}{0\,2\,3\ldots n}$, so sind es nur diagonale Elemente, die x_0 und x_1 enthalten. Daher ist in T der Coefficient von x_0^{n-1} gleich $\binom{0}{1}\binom{0}{2}\binom{0}{3}\cdots\binom{0}{n}$, und das Aggregat aller Terme, in denen $x_2, x_3, \ldots x_n$ fehlen, kann durch

$$\binom{0}{1}\left(\binom{0}{2}x_0+\binom{1}{2}x_1\right)\left(\binom{0}{3}x_0+\binom{1}{3}x_1\right)\cdots\left(\binom{0}{n}x_0+\binom{1}{n}x_1\right)$$

dargestellt werden, woraus sogleich auch die Gestalt der Coefficienten von $x_0^{n-1-\lambda}x_1^\lambda$ erhellt. Aber die Coefficienten der Terme, welche $x_2, x_3, \ldots$ enthalten, aus der Matrix von $-\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ abzuleiten, wird mir zu schwierig. Ich will daher zunächst nur zeigen, dass man die Aufgabe von n Dimensionen auf $n-1$ zurück bringen kann. Wenn in dieser Matrix die Zeilen 2, 3, ... n wie oben gesagt multiplicirt sind, so dürfen wir die Zeile 2 dadurch verändern, dass wir zu ihr alle folgenden Zeilen und das $x_1$fache der Zeile 1 addiren. Dadurch wird

$$T = x_0\left\{(-1)^n x_3x_4\ldots x_n\left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}-\binom{0}{0}\begin{bmatrix}01\\02\end{bmatrix}\right)\right\}+\left(\binom{0}{1}x_1+\binom{0}{2}x_2+\cdots+\binom{0}{n}x_n\right)$$
$$\times(-1)^{n-1}x_3x_4\ldots x_n\begin{bmatrix}01\\02\end{bmatrix}.$$

Für $x_0=0$ reducirt sich also dieser Ausdruck auf seinen zweiten Term, und dieser zerfällt in zwei Factoren, von denen der erste lineare unserer Aufgabe entspricht, der zweite $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades aber, wenn darin auch $x_1=0$ gesetzt wird, in Bezug auf die Matrix $\binom{1\,2\,3\ldots n}{1\,2\,3\ldots n}$ gerade dieselbe Function ist, welche T in Bezug auf $\binom{0\,1\,2\,3\ldots n}{0\,1\,2\,3\ldots n}$ war. Da in T kein Term alle Coordinaten zugleich enthalten kann, sondern immer mindestens zwei fehlen müssen, so ist hiemit die Möglichkeit gezeigt, die Coefficienten successiv durch Aufsteigen von 3 zu 4, von 4 zu 5, ... Dimensionen und jedesmalige Multiplication zu berechnen. Man kann aber auch das Gesetz errathen, nach dem der Coefficient irgend eines Terms in T gebildet ist, und zeigen, dass die so definirte Function für jede Lösung von $(x_0=0, p_0=0)$, etc. verschwindet. Wenn dann ferner gezeigt wird, dass diese Bedingungen mehr als hinreichen, um die Coefficienten in einer Function $(x_0, x_1, x_2, \ldots x_n)^{n-1}$ zu bestimmen; so ist damit auch die Identität der definirten Function mit T bewiesen.

Eine Function $(x_0\ldots x_n)^{n-1}$ zählt $\binom{2n-1}{n-1}-1$ Elemente, wenn es nur auf die Verhältnisse der Coefficienten ankommt. Ihr Continuum würde von $(x_0=0, p_0=0)$ in einem krummen Continuum $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades mit $n-1$ ho-

mogenen Variabeln geschnitten, das durch $\binom{2n-3}{n-2}-1$ Punkte bestimmt würde. Damit also jenes Continuum das lineare Continuum ($x_0=0, p_0=0$) nicht schneiden könne, sondern es ganz in sich enthalte, müssen jenem in diesem $\binom{2n-3}{n-2}$ Punkte gegeben werden. Da dieses sich $n+1$ Male wiederholt, so sind dem gesuchten krummen Continuum $(n+1)\binom{2n-3}{n-2}$ Punkte gegeben. Der Ueberschuss dieser Zahl über die Anzahl der Elemente der gesuchten Function beträgt $(n-1)\binom{2n-3}{n-2}+1$, also für $n=2, 3, 4, 5$ resp. 1, 3, 16, 85. Die Function T ist also durch die erwähnten Bedingungen mehr als bestimmt.

Wenn den untern Zeigern $1, 2, 3, \ldots n$ irgend eine Anordnung eben so vieler zum Theil wiederholter Zeiger, unter denen aber der fremde Zeiger 0 sich nicht befindet, übergesetzt wird, so ist es nicht möglich, *Kreisläufe* wie $\binom{1}{1}$, $\binom{1}{2}\binom{2}{1}$, $\binom{1}{2}\binom{2}{3}\binom{3}{1}$, ... zu vermeiden. Denn fängt man mit einem Element an, dessen unterer Zeiger auch oben irgendwo vorkommt, so kann man eine Kette von Elementen bilden, wo jeder obere Zeiger eines Elements mit dem untern des nachfolgenden übereinstimmt, und diese Kette könnte nur dann offen bleiben, wenn sie mit einem obern Zeiger schlösse, der unten nicht vorkäme. Da dieses nicht der Fall ist, so muss die Kette einmal sich schliessen, d. h. der obere Zeiger des letzten Elements muss mit dem untern Zeiger dieses oder irgend eines der vorangegangenen Elemente übereinstimmen; und die Combination von Elementen enthält mindestens einen Kreislauf. Ich brauche hierfür nur an die Abhandlungen von *Cauchy* (Journal de l'école polytechnique Cah. 17, p. 37) und von *Jacobi* (dieses Journal Bd. 22, S. 288) zu erinnern. Ich will nun eine Function (T) definiren, deren Identität mit T zu untersuchen ist.

Um den Coefficienten von $x_0^\alpha x_1^\beta x_2^\gamma x_3^\delta x_4^\varepsilon$, $(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=n-1)$, *in* ($T$) *zu erhalten, setze man der festen Reihe* $1\,2\,3\,4 \ldots n$ *unterer Zeiger alle diejenigen Permutationen von* $0^{\alpha+1}1^\beta 2^\gamma 3^\delta 4^\varepsilon$ *über, welche keine Kreisläufe erzeugen, und fasse jede Anordnung als Product derjenigen Elemente von* V *auf, welche durch je zwei übereinanderstehende Zeiger bezeichnet sind. Die Summe aller solchen Producte, deren Anzahl gleich der Permutationszahl der Coordinatencombination ist, ist der gesuchte Coefficient.*

Ich muss zuerst zeigen, dass diese Definition nicht etwa den Widerspruch in sich enthält, von der Ausschliessung des untern Zeigers 0 abzuhängen.

Es sei $n=6$, so wird $\binom{4}{1}\binom{5}{2}\binom{0}{3}\binom{0}{4}\binom{1}{5}\binom{1}{6}$ als einzelner Term im Ausdruck des Coefficienten von $x_0 x_1^2 x_4 x_6$ vorkommen. Wählen wir 023456 als feste Reihe der untern Zeiger, so ist jener Term in der Form $\binom{4}{0}\binom{5}{2}\binom{0}{3}\binom{1}{4}\binom{1}{5}\binom{1}{6}$ darzustellen, indem man nur die Zeiger der Elemente $\binom{4}{1}$, $\binom{0}{4}$ umkehrt (sie bilden eine *offene Kette,* die mit 1 beginnt, mit 0 schliesst und 4 zum verbindenden Zeiger hat), und diese neue Form desselben Terms entspricht wieder obiger Definition, indem, wenn unten 1 fehlt, oben $0^1 1^3 4^1 5^1$, d. i. 011145 zu permutiren ist. Soll 6 in der festen Reihe unterer Zeiger fehlen, so kehren wir zuerst $\binom{1}{6}$ in $\binom{6}{1}$ um, dann $\binom{4}{1}$ in $\binom{1}{4}$, dann $\binom{0}{4}$ in $\binom{4}{0}$ und haben endlich $\begin{vmatrix} 4 & 6 & 5 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ der Definition gemäss; die offene Kette beginnt mit 6, endigt mit 0 und hat 1, 4 als verbindende Zeiger. Wenn z. B. 1 als unterer Zeiger durch 0 ersetzt werden soll, so wird, da 0 in der obern Permutation nicht fehlt, und die übrigen Zeiger auch unten sich finden, stets eine offene Kette von Elementen da sein, die mit dem untern Zeiger 1 beginnt und mit dem obern 0 aufhört. Haben wir den zum Coefficienten von $x_2 x_3 x_4 x_5 x_6$ gehörenden Term $\binom{2}{1}\binom{3}{2}\binom{4}{3}\binom{5}{4}\binom{6}{5}\binom{0}{6}$ so darzustellen, dass 023456 als untere Zeigerreihe erscheint, so durchläuft die Kette alle sechs Elemente, und die neue Darstellung wird $\binom{6\;1\;2\;3\;4\;5}{0\;2\;3\;4\;5\;6}$. Wie auch die Kette sonst beschaffen sein mag, durch die Umwendung aller ihrer Elemente wird der Wiederholungsexponent des beginnenden Zeigers oben um 1 vermehrt, derjenige des schliessenden oben um 1 vermindert, während alle verbindenden Zeiger in gleicher Anzahl oben bleiben, wie zuvor.

Wir denken uns nun das fragliche Polynom (T) nicht nur nach den Coordinatencombinationen, sondern auch nach den Producten der Elemente in Terme aufgelöst und fragen nach dem Aggregate aller Terme, die den Factor $\binom{0}{1}$, aber nicht x_0 enthalten. Als feste Reihe der untern Zeiger sei $1234\ldots n$ angenommen. Die Permutation der obern Zeiger wird dann mit 0 beginnen, aber ***sonst diesen Zeiger nicht enthalten.*** Damit nun die über $234\ldots n$ stehende Permutation keinen Kreislauf erzeuge, so muss nothwendig 1 als ein der untern Reihe fremder Zeiger darin vorkommen, da der ebenfalls fremde Zeiger 0 schon ausgeschlossen ist. Folglich ist der Term auch noch durch x_1 theilbar. Sondern wir nun den Factor $\binom{0}{1}x_1$ ab, so bleibt ein Term, wie

er nach der Definition der um einen Grad und eine Dimension niedrigeren Function (T), die zu einem V mit der Matrix $\binom{1\,2\,3\dots n}{1\,2\,3\dots n}$ gehörte, entspräche; und umgekehrt, wenn wir irgend einen Term dieser letzten Function (T) mit $\binom{0}{1}x_1$ multipliciren, so haben wir einen Term der höheren Function (T). Da dasselbe auch für die Factoren $\binom{0}{2}x_2$, $\binom{0}{3}x_3$, ... $\binom{0}{n}x_n$ bewiesen werden kann, so folgt, dass (T) sich für $x_0 = 0$ auf das Product von $\binom{0}{1}x_1+\binom{0}{2}x_2+\dots+\binom{0}{n}x_n$ mit der erwähnten niedrigeren Function reducirt. Da endlich die Definition auch $\binom{0}{1}\binom{0}{2}\binom{0}{3}\dots\binom{0}{n}x_0^{n-1}$ als Anfangsterm von (T) giebt, so ist die Identität der definirten Function (T) mit der ursprünglichen T bewiesen.

Es bleibt noch übrig zu zeigen, dass die Anzahl der Terme des Coefficienten einer Coordinatencombination der Permutationszahl dieser letzten gleich ist. Setzen wir $V = (x_0+x_1+x_2+\dots+x_n)^2$, so ist klar, dass alle Schnitte des Gebildes $x_0x_1x_2\dots x_n = 0$ mit dem polaren Gebilde in die lineare Gleichung $x_0+x_1+\dots+x_n = 0$ hinein fallen, und dass daher $T = (x_0+x_1+\dots+x_n)^{n-1}$ wird. Da jedes Elementproduct jetzt $= 1$ ist, so ist ferner klar, dass die Anzahl solcher in irgend einem Coefficienten dem Coefficienten der betreffenden Coordinatencombination in der Entwicklung von $(\Sigma x)^{n-1}$ gleich ist. Man kann aber die Richtigkeit dieser Anzahl auch aus obiger Definition der Function T herleiten, wenn man mit $x_0^\alpha x_1^\beta$, $(\alpha+\beta = n-1)$, beginnt, dann $x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma$, $(\alpha+\beta+\gamma = n-1)$, betrachtet und so fortgeht, indem man immer den Satz für die niedrigere Stufe als schon bewiesen voraussetzt. Das Fundament der Beweisführung würde dann sein, dass in der Entwicklung von

$$\left(1+\binom{\alpha}{1}x+\binom{\alpha}{2}x+\cdots\right)\left(1+\binom{\beta}{1}x+\binom{\beta}{2}x^2+\cdots\right)\left(1+\binom{\gamma}{1}x+\binom{\gamma}{2}x^2+\cdots\right)\times\cdots$$

der Coefficient von x^r gleich $\binom{\alpha+\beta+\gamma+\cdots}{r}$ ist, wo $1+\binom{\alpha}{1}x+\binom{\alpha}{2}x^2+\cdots$ die Entwicklung von $(1+x)^\alpha$ bedeutet.

Bern, 1865.

Recherche des points à l'infini sur les surfaces algébriques.

Deuxième Partie.

(Voir p. 112 de ce volume.)

(Par M. *L. Painvin* à Douai.)

---

§. I.

Definition et ordre de la surface asymptote.

1. La surface proposée ayant pour équation

$$U = \varphi_m(x, y, z) + t\varphi_{m-1}(x, y, z) + t^2\varphi_{m-2}(x, y, z) + \cdots = 0$$

l'équation du plan asymptote au point à l'infini $\left(\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}, t = 0\right)$ est

$$(1.)\ (P) \qquad x\frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha} + y\frac{\partial\varphi_m}{\partial\beta} + z\frac{\partial\varphi_m}{\partial\gamma} + t\varphi_{m-1}(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

avec la condition

$$(1^{\text{bis}}.) \qquad \varphi_m(\alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

Les plans asymptotes enveloppent une surface développable, car les coefficients de l'équation (1.) ne dépendent en réalité que d'un seul paramètre arbitraire; j'appellerai *Développable asymptote* de la surface U la surface enveloppée par les plans asymptotes de U; ou, ce qui revient au même, la surface circonscrite à la surface U suivant la courbe d'intersection avec le plan à l'infini.

Cette développable est de la classe $m(m-1)$; car, par un point quelconque (x_0, y_0, z_0, t_0) passent $m(m-1)$ plans tangents (P), comme il est visible d'après les équations (1.) et (1bis.).

2. Lorsque l'équation de la surface U peut être amenée à ne plus contenir de termes de degré $(m-1)$, la développable se réduit à un cône que nous nommerons *cône asymptote* de la surface. Dans ce cas, en effet, les coefficients de la fonction $\varphi_{m-1}(x, y, z)$ sont nuls; par suite, les plans (P) passent constamment par l'origine et enveloppent évidemment le cône

$$(C) \qquad \varphi_m(x, y, z) = 0.$$

Réciproque: Supposons que tous les plans asymptotes enveloppent un cône c. à. d. passent par un point fixe; nous pouvons prendre pour origine le sommet du cône. L'équation de la surface, rapportée à la nouvelle origine,

étant supposée de la forme

$$\varphi_m(x, y, z) + t\varphi_{m-1}(x, y, z) + t^2\varphi_{m-2}(x, y, z) + \cdots = 0,$$

on devra avoir

$$\varphi_{m-1}(\alpha, \beta, \gamma) = 0$$

pour toutes les solutions possibles (α, β, γ) de l'équation

$$\varphi_m(\alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

Ces deux équations doivent donc avoir une infinité de solutions communes; ou mieux, toutes les génératrices du cône $\varphi_m(x, y, z)$ doivent se trouver sur le cône $\varphi_{m-1}(x, y, z)$; ce qui est évidemment impossible, à moins que la fonction du $(m-1)^{\text{ème}}$ degré, $\varphi_{m-1}(x, y, z)$, ne soit identiquement nulle. Ainsi:

„Lorsque les plans asymptotes d'une surface enveloppent un cône, l'équation de la surface peut toujours être amenée à ne plus renfermer les termes de degré $(m-1)$."

3. Etudions maintenant la surface asymptote dans le cas le plus général. En désignant par P le premier membre de l'équation (1.), nous aurons pour les équations d'une génératrice quelconque de la développable asymptote

$$(2.)\quad (\delta)\qquad \frac{\frac{\partial P}{\partial \alpha}}{\frac{\partial \varphi_m}{\partial \alpha}} = \frac{\frac{\partial P}{\partial \beta}}{\frac{\partial \varphi_m}{\partial \beta}} = \frac{\frac{\partial P}{\partial \gamma}}{\frac{\partial \varphi_m}{\partial \gamma}}, \quad \text{avec} \quad \varphi_m(\alpha, \beta, \gamma) = 0;$$

l'équation (1.) est une conséquence des équations (2.).

La droite (δ) est parallèle à la génératrice $G(\alpha, \beta, \gamma)$ du cône des directions asymptotiques, car cette droite passe par le point à l'infini

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}, \quad t = 0.$$

De plus, si nous nous reportons à l'équation (12.) [§. I., 1ère partie] de la surface S, on voit que les équations des plans des centres sont

$$\frac{\partial P}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial \gamma} = 0;$$

donc *la génératrice* (δ) *de la développable asymptote passe par le centre de la surface S correspondant à la direction asymptotique parallèle à cette droite* (δ).

Le lieu des centres des surfaces (S) est une courbe dont les équations s'obtiennent en éliminant α, β, γ entre les quatre équations

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha^2}+y\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\beta}+z\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\gamma}+t\dfrac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\alpha} = 0, \\ x\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\partial\alpha}+y\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta^2}+z\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\partial\gamma}+t\dfrac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\beta} = 0, \\ x\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma\partial\alpha}+y\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma\partial\beta}+z\dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma^2}+t\dfrac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\gamma} = 0, \\ \varphi_m(\alpha,\beta,\gamma) = 0. \end{cases}$$

L'ordre de la courbe, lieu des centres, est le nombre de points où elle est coupée par un plan quelconque

$$Mx+Ny+Pz+Qt = 0;$$

le nombre de ces points est égal au nombre des solutions communes aux deux équations

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha^2} & \dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\beta} & \dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha\partial\gamma} & \dfrac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\alpha} \\ \dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\partial\alpha} & \dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta^2} & \dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta\partial\gamma} & \dfrac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\beta} \\ \dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma\partial\alpha} & \dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma\partial\beta} & \dfrac{\partial^2\varphi_m}{\partial\gamma^2} & \dfrac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\gamma} \\ M & N & P & Q \end{vmatrix} = 0, \quad \varphi_m(\alpha,\beta,\gamma)=0,$$

lequel nombre est visiblement égal à $3m(m-2)$.

Ainsi *les centres des surfaces* S [(12.) §. I., 1ère partie] *décrivent une courbe d'ordre* $3m(m-2)$, *en général; et cette courbe est sur la développable asymptote.*

L'ordre de cette courbe est précisément égal au nombre des arêtes d'inflexion du cône des directions asymptotiques, si l'on suppose que ce cône soit le plus général de son espèce c. à. d. n'ait pas d'arêtes multiples. Nous devons encore observer que la courbe, lieu des centres des surfaces S, n'est pas l'arête de rebroussement de la développable asymptote.

4. Comme les calculs que nous allons développer présentent une certaine complication, il sera avantageux de modifier la notation que nous avons adoptée jusqu'à présent.

Nous remplacerons les variables x, y, z par x_1, x_2, x_3; les quantités α, β, γ, qui désignent habituellement la direction asymptotique seront remplacées par x_1', x_2', x_3'; les fonctions $\varphi_m(x,y,z)$, $\varphi_{m-1}(x,y,z)$ seront représentées respectivement par $u(x_1,x_2,x_3)$, $\varphi(x_1,x_2,x_3)$. Formant le tableau

de ces changements:

on remplacera $x, y, z,$ par $x_1, x_2, x_3;$
- - $\alpha, \beta, \gamma,$ - $x_1^0, x_2^0, x_3^0;$
- - $\varphi_m(x, y, z)$ - $u(x_1, x_2, x_3);$
- - $\varphi_{m-1}(x, y, z)$ - $v(x_1, x_2, x_3).$

Suivant l'usage, nous poserons

$$u_r = \frac{\partial u}{\partial x_r}, \quad u_{rs} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_r \partial x_s}, \quad v_r = \frac{\partial v}{\partial x_r};$$

nous conviendrons, en outre, d'indiquer par l'indice supérieur 0 la substitution des valeurs particulières x_1^0, x_2^0, x_3^0 aux variables x_1, x_2, x_3; nous aurons ainsi

$$u^0 = u(x_1^0, x_2^0, x_3^0),$$

$$u_r^0 = \left(\frac{\partial u}{\partial x_r}\right)_0, \quad u_{rs}^0 = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_r \partial x_s}\right)_0, \quad \text{etc.}$$

en convenant aussi d'indiquer par la notation $(\;)_0$ la substitution ci-dessus mentionnée.

5. Ces notations étant admises, les équations d'une génératrice (δ) de la surface asymptote seront

$$(3.)\ (\delta)\qquad \frac{\frac{\partial P}{\partial x_1^0}}{u_1^0} = \frac{\frac{\partial P}{\partial x_2^0}}{u_2^0} = \frac{\frac{\partial P}{\partial x_3^0}}{u_3^0}, \quad \text{avec} \quad u^0 = 0,$$

équations dans lesquelles

$$(4.)\qquad P = x_1 u_1^0 + x_2 u_2^0 + x_3 u_3^0 + t v^0.$$

Nous poserons encore

$$(5.)\qquad H = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix}, \quad H_{rs} = \frac{\partial H}{\partial u_{rs}}.$$

Le théorème des fonctions homogènes nous donne les identités

$$(6.)\qquad x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = m u;$$

$$(7.)\qquad x_1 u_{r1} + x_2 u_{r2} + x_3 u_{r3} = (m-1) u_r, \quad \text{où} \quad r = 1, 2, 3.$$

La résolution des trois équations (7.) par rapport à x_1, x_2, x_3, conduit à

$$(8.)\qquad x_r H = (m-1)[u_1 H_{r1} + u_2 H_{r2} + u_3 H_{r3}], \quad \text{où} \quad r = 1, 2, 3.$$

6. Les équations (3.) de la génératrice (δ) peuvent s'écrire

$$(9.)\quad \begin{cases} x_1u_{11}^0+x_2u_{12}^0+x_3u_{13}^0+tv_1^0 \;=\; \lambda u_1^0, \\ x_1u_{21}^0+x_2u_{22}^0+x_3u_{23}^0+tv_2^0 \;=\; \lambda u_2^0, \\ x_1u_{31}^0+x_2u_{32}^0+x_3u_{33}^0+tv_3^0 \;=\; \lambda u_3^0 \\ \text{avec la condition} \\ \qquad u(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = u^0 = 0. \end{cases}$$

Multipliant ces dernières équations respectivement par H_{11}^0, H_{21}^0, H_{31}^0; puis par H_{12}^0, H_{22}^0, H_{32}^0; etc. et ajoutant, on donnera aux équations de la génératrice la forme suivante

$$(10.)\;(\delta)\quad \begin{cases} \dfrac{H^0x_1+G_1^0t}{x_1^0} = \dfrac{H^0x_2+G_2^0t}{x_2^0} = \dfrac{H^0x_3+G_3^0t}{x_3^0}, \\ \text{avec}\quad u^0=0; \end{cases}$$

en désignant par les lettres G_1, G_2, G_3 les fonctions dont le type général est:

$$(11.)\qquad G_r = v_1H_{r1}+v_2H_{r2}+v_3H_{r3},\quad \text{où}\quad r=1, 2, 3.$$

En multipliant les trois égalités (11.) par u_1, u_2, u_3, et ajoutant, on a, d'après (8.) et (6.):

$$(12.)\qquad u_1G_1+u_2G_2+u_3G_3 \;=\; Hv.$$

7. Remarques. 1°. On voit encore, par les équations (10.), que la génératrice de la surface asymptote est parallèle à la direction asymptotique correspondante.

2°. Nous pouvons constater aussi que les coordonnées du centre de la surface (S) sont, d'après les équations qui le déterminent et les notations adoptées,

$$\frac{x_1}{t} = -\frac{G_1}{H},\qquad \frac{x_2}{t} = -\frac{G_2}{H},\qquad \frac{x_3}{t} = -\frac{G_3}{H};$$

la génératrice (δ) passe donc par le centre de la surface S qui correspond à la direction asymptotique parallèle à cette génératrice. Nous aurions pu profiter de cette propriété pour écrire immédiatement les équations (10.).

3°. Si l'équation de la surface peut être amenée à n'avoir plus de termes de degré $(m-1)$, les équations (10.) de la génératrice deviendront

$$\frac{x_1}{x_1^0} = \frac{x_2}{x_2^0} = \frac{x_3}{x_3^0},\qquad u(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = 0;$$

il est alors visible que les génératrices (δ) décrivent le cône $u(x_1, x_2, x_3) = 0$.

4°. Lorsque la solution (x_1^0, x_2^0, x_3^0) satisfait, en outre, à la condition

$$H(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = 0,\quad \text{ou}\quad H^0 = 0,$$

les équations (10.) donnent, dans ce cas, $t=0$; et les équations de la génératrice (δ) sont alors

$$t = 0,$$
$$(P) \qquad x_1 u_1^0 + x_2 u_2^0 + x_3 u_3^0 + t v^0 = 0;$$

cette génératrice est donc à l'infini dans le plan (P). Or le nombre des solutions du système

$$H=0, \quad u=0,$$

est égal à $3m(m-2)$; donc

Il y a sur la surface asymptote $3m(m-2)$ droites à l'infini, parallèles aux $3m(m-2)$ arêtes d'inflexion du cône des directions asymptotiques; ces droites sont respectivement dans les plans asymptotes correspondant à ces arêtes.

Nous concluons de là que le plan à l'infini coupe la surface asymptote suivant ces $3m(m-2)$ droites, et, en outre, suivant une courbe du $m^{\text{ème}}$ ordre, laquelle est la courbe de contact de la surface asymptote avec la surface proposée U; donc la développable asymptote est de l'ordre

$$m+3m(m-2) \quad \text{ou} \quad m(3m-5),$$

résultat que nous retrouverons tout-à-l'heure par une autre méthode.

NB. Il peut arriver, pour certaines valeurs spéciales des coefficients, que la génératrice de la développable, correspondant à une arête d'inflexion, ne soit pas à l'infini. C'est ce qui a lieu dans la surface

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6tx_1x_2 + t^2 \ldots = 0.$$

8. Ordre de la développable asymptote.

L'ordre de la développable est égal au nombre des points en lesquels elle est rencontrée par une droite quelconque; nous résoudrons cette question en cherchant le nombre des génératrices (δ) rencontrant la droite arbitrairement choisie.

Les équations de cette droite peuvent se mettre sous la forme

$$(13.) \quad \begin{cases} \dfrac{x_1 - A_1 t}{a_1} = \dfrac{x_2 - A_2 t}{a_2} = \dfrac{x_3 - A_3 t}{a_3} = \varrho, \\ \text{ou} \\ x_1 = a_1\varrho + A_1 t, \\ x_2 = a_2\varrho + A_2 t, \\ x_3 = a_3\varrho + A_3 t, \end{cases}$$

a_1, a_2, a_3; A_1, A_2, A_3, désignant des constantes tout-à-fait arbitraires.

Pour obtenir l'intersection de cette droite avec la génératrice (δ), il faut remplacer x_1, x_2, x_3, par les valeurs précédentes dans les équations (10.); il vient alors

$$\frac{H^0 a_1 \varrho + (G_1^0 + A_1 H^0) t}{x_1^0} = \frac{H^0 a_2 \varrho + (G_2^0 + A_2 H^0) t}{x_2^0} = \frac{H^0 a_3 \varrho + (G_3^0 + A_3 H^0) t}{x_3^0}.$$

Pour que les deux droites se rencontrent, il faut et il suffit que les valeurs de $\frac{H^0 \varrho}{t}$ données par ces équations soient les mêmes, car les équations (13.) détermineront alors les coordonnées $\frac{x_1}{t}$, $\frac{x_2}{t}$, $\frac{x_3}{t}$ du point de rencontre. Si nous désignons par $-k$ la valeur commune des rapports ci-dessus, on a, en éliminant les indéterminées $H\varrho$, t, et k, l'équation de condition

$$\begin{vmatrix} a_1 & x_1^0 & G_1^0 + A_1 H^0 \\ a_2 & x_2^0 & G_2^0 + A_2 H^0 \\ a_3 & x_3^0 & G_3^0 + A_3 H^0 \end{vmatrix} = 0.$$

Le nombre des génératrices (δ) rencontrées par la droite (13.) est donc égal au nombre des solutions (x_1, x_2, x_3) communes aux deux équations

$$(14.)\quad \begin{cases} F(x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} a_1 & x_1 & G_1 + A_1 H \\ a_2 & x_2 & G_2 + A_2 H \\ a_3 & x_3 & G_3 + A_3 H \end{vmatrix} = 0, \\ u(x_1, x_2, x_3) = 0, \end{cases}$$

homogènes en x_1, x_2, x_3.

Or les fonctions G_1, G_2, G_3, H sont du degré $3(m-2)$ en x_1, x_2, x_3; la 1[ère] équation est, par suite, du degré $3(m-2)+1$ ou $(3m-5)$; la 2[ème] est du degré m; donc

La surface développable asymptote est de l'ordre

$$N = m(3m-5).$$

Nous remarquerons de suite que l'équation de la développable asymptote ne dépend que des coefficients des fonctions u et v ou φ_m et φ_{m-1}.

§. II.

Influence des points doubles à l'infini de la surface U sur l'ordre de la développable asymptote.

I°. Identités.

9. On a d'abord les identités suivantes déjà écrites (6.) et (7.):

$$(1.)\qquad x_1u_1+x_2u_2+x_3u_3 = mu, \quad \text{ou} \quad \sum_{n=1}^{n=3} x_n u_n = mu,$$

$$(2.)\qquad \begin{cases} x_1u_{r1}+x_2u_{r2}+x_3u_{r3} = (m-1)u_r, \quad \text{ou} \quad \sum_{n=1}^{n=3} x_n u_{rn} = (m-1)u_r, \\ \text{où} \quad r = 1,\ 2,\ 3. \end{cases}$$

En différentiant une et deux fois les identités (2.), il vient

$$(3.)\qquad \sum_{n=1}^{n=3} x_n \frac{\partial u_{rn}}{\partial x_i} = (m-2)u_{ri},$$

$$(4.)\qquad \sum_{n=1}^{n=3} x_n \frac{\partial^2 u_{rn}}{\partial x_i \partial x_j} = (m-3)\frac{\partial u_{ij}}{\partial x_r},$$

car

$$\frac{\partial u_{ri}}{\partial x_j} = \frac{\partial u_{ij}}{\partial x_r}.$$

N. B. Dorénavant, au lieu du signe sommatoire $\sum\limits_{n=1}^{n=3}$, nous écrirons seulement $\sum\limits^{n}$, en convenant d'indiquer par là qu'on devra faire la somme des résultats obtenus lorsqu'on donne à l'indice n les valeurs 1, 2, 3, dans l'expression soumise à ce signe.

Posant, comme nous l'avons déjà fait

$$(5.)\qquad H = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix}, \quad H_{rs} = \frac{\partial H}{\partial u_{rs}},$$

on a les identités

$$(6.)\qquad \begin{cases} \sum\limits^{n} u_{rn}H_{rn} = H, \\ \sum\limits^{n} u_{sn}H_{rn} = 0. \end{cases}$$

La résolution des équations (2.) par rapport à x_r donne

$$(7.)\qquad x_rH = (m-1)\sum^{n} u_n H_{rn}, \quad \text{où} \quad r = 1,\ 2,\ 3.$$

Différentiant une, deux, et trois fois ces dernières identités, on a successive-

ment, eu égard aux relations (6.);

$$(8.)\quad\begin{cases} x_r\dfrac{\partial H}{\partial x_r} = (m-2)H+(m-1)\overset{n}{\Sigma}u_n\dfrac{\partial H_{rn}}{\partial x_r}, \\ x_r\dfrac{\partial H}{\partial x_s} = (m-1)\overset{n}{\Sigma}u_n\dfrac{\partial H_{rn}}{\partial x_s};\quad r\gtrless s. \end{cases}$$

$$(9.)\quad\begin{cases} x_r\dfrac{\partial^2 H}{\partial x_r^2} = (m-3)\dfrac{\partial H}{\partial x_r}+(m-1)\Big[\overset{n}{\Sigma}u_{nr}\dfrac{\partial H_{rn}}{\partial x_r}+\overset{n}{\Sigma}u_n\dfrac{\partial^2 H_{rn}}{\partial x_r^2}\Big]; \\ x_r\dfrac{\partial^2 H}{\partial x_r\partial x_s} = (m-2)\dfrac{\partial H}{\partial x_s}+(m-1)\Big[\overset{n}{\Sigma}u_{ns}\dfrac{\partial H_{rn}}{\partial x_r}+\overset{n}{\Sigma}u_n\dfrac{\partial^2 H_{rn}}{\partial x_r\partial x_s}\Big];\quad r\gtrless s; \\ x_r\dfrac{\partial^2 H}{\partial x_s\partial x_i} = (m-1)\Big[\overset{n}{\Sigma}u_{ni}\dfrac{\partial H_{rn}}{\partial x_s}+\overset{n}{\Sigma}u_n\dfrac{\partial^2 H_{rn}}{\partial x_s\partial x_i}\Big];\quad \begin{cases} r\gtrless s \\ s\gtrless i \end{cases}; \end{cases}$$

$$(10.)\quad\begin{cases} x_r\dfrac{\partial^3 H}{\partial x_r^3} = (m-4)\dfrac{\partial^2 H}{\partial x_r^2}+(m-1)\left[\begin{matrix} 2\overset{n}{\Sigma}u_{nr}\dfrac{\partial^2 H_{rn}}{\partial x_r^2} \\ +\overset{n}{\Sigma}\dfrac{\partial u_{nr}}{\partial x_r}\dfrac{\partial H_{rn}}{\partial x_r}+\overset{n}{\Sigma}u_n\dfrac{\partial^3 H_{rn}}{\partial x_r^3} \end{matrix}\right]; \\ x_r\dfrac{\partial^3 H}{\partial x_r^2\partial x_s} = (m-3)\dfrac{\partial^2 H}{\partial x_r\partial x_s}+(m-1)\left[\begin{matrix} \overset{n}{\Sigma}u_{ns}\dfrac{\partial^2 H_{rn}}{\partial x_r^2}+\overset{n}{\Sigma}u_{nr}\dfrac{\partial^2 H_{rn}}{\partial x_r\partial x_s} \\ +\overset{n}{\Sigma}\dfrac{\partial u_{ns}}{\partial x_r}\dfrac{\partial H_{rn}}{\partial x_r}+\overset{n}{\Sigma}u_n\dfrac{\partial^3 H_{rn}}{\partial x_r^2\partial x_s} \end{matrix}\right],\quad r\gtrless s; \\ x_r\dfrac{\partial^3 H}{\partial x_r\partial x_s\partial x_i} = -\dfrac{\partial^2 H}{\partial x_s\partial x_i}+(m-1)\left[\begin{matrix} \overset{n}{\Sigma}u_{ni}\dfrac{\partial^2 H_{rn}}{\partial x_s\partial x_r}+\overset{n}{\Sigma}u_{nr}\dfrac{\partial^2 H_{rn}}{\partial x_s\partial x_i} \\ +\overset{n}{\Sigma}\dfrac{\partial u_{ni}}{\partial x_r}\dfrac{\partial H_{rn}}{\partial x_s}+\overset{n}{\Sigma}u_n\dfrac{\partial^3 H_{rn}}{\partial x_r\partial x_s\partial x_i} \end{matrix}\right],\quad \begin{cases} r\gtrless s \\ r\gtrless i \end{cases}. \end{cases}$$

La différentiation successive des identités (6.) nous conduit à

$$(11.)\quad\begin{cases} \overset{n}{\Sigma}\dfrac{\partial u_{rn}}{\partial x_i}H_{rn}+\overset{n}{\Sigma}u_{rn}\dfrac{\partial H_{rn}}{\partial x_i} = \dfrac{\partial H}{\partial x_i} \\ \overset{n}{\Sigma}\dfrac{\partial u_{sn}}{\partial x_i}H_{rn}+\overset{n}{\Sigma}u_{sn}\dfrac{\partial H_{rn}}{\partial x_i} = 0,\quad r\gtrless s. \end{cases}$$

$$(12.)\quad\begin{cases} \left.\begin{matrix} \overset{n}{\Sigma}\dfrac{\partial u_{rn}}{\partial x_i}\dfrac{\partial H_{rn}}{\partial x_j}+\overset{n}{\Sigma}\dfrac{\partial u_{rn}}{\partial x_j}\dfrac{\partial H_{rn}}{\partial x_i} \\ +\overset{n}{\Sigma}H_{rn}\dfrac{\partial^2 u_{rn}}{\partial x_i\partial x_j}+\overset{n}{\Sigma}u_{rn}\dfrac{\partial^2 H_{rn}}{\partial x_i\partial x_j} \end{matrix}\right\} = \dfrac{\partial^2 H}{\partial x_i\partial x_j}, \\ \left.\begin{matrix} \overset{n}{\Sigma}\dfrac{\partial u_{sn}}{\partial x_i}\dfrac{\partial H_{rn}}{\partial x_j}+\overset{n}{\Sigma}\dfrac{\partial u_{sn}}{\partial x_j}\dfrac{\partial H_{rn}}{\partial x_i} \\ +\overset{n}{\Sigma}H_{rn}\dfrac{\partial^2 u_{sn}}{\partial x_i\partial x_j}+\overset{n}{\Sigma}u_{sn}\dfrac{\partial^2 H_{rn}}{\partial x_i\partial x_j} \end{matrix}\right\} = 0,\quad r\gtrless s. \end{cases}$$

Nous aurons encore à faire usage de l'identité suivante

$$(13.)\qquad H\frac{\partial^2 H}{\partial u_{rs}\,\partial u_{r_1 s_1}} = H_{rs}H_{r_1 s_1} - H_{rs_1}H_{r_1 s}.$$

Différentiant successivement par rapport à x_i, x_j, x_k, on a l'identité

$$(14.)\qquad \left.\begin{array}{l} H\cdot\dfrac{\partial^3\cdot\dfrac{\partial^2 H}{\partial u_{rs}\,\partial u_{r_1 s_1}}}{\partial x_i\,\partial x_j\,\partial x_k} \\[2ex] +\dfrac{\partial^3 H}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k}\cdot\dfrac{\partial^2 H}{\partial u_{rs}\,\partial u_{r_1 s_1}} \\[2ex] +\mathrm{S}\dfrac{\partial^2 H}{\partial x_j\,\partial x_k}\cdot\dfrac{\partial\cdot\dfrac{\partial^2 H}{\partial u_{rs}\partial u_{r_1 s_1}}}{\partial x_i} \\[2ex] +\mathrm{S}\dfrac{\partial H}{\partial x_i}\cdot\dfrac{\partial^2\cdot\dfrac{\partial^2 H}{\partial u_{rs}\partial u_{r_1 s_1}}}{\partial x_j\partial x_k} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} H_{rs}\cdot\dfrac{\partial^3 H_{r_1 s_1}}{\partial x_i\,\partial x_j\partial x_k}+H_{r_1 s_1}\cdot\dfrac{\partial^3 H_{rs}}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k} \\[2ex] \qquad +\mathrm{S}\dfrac{\partial H_{rs}}{\partial x_i}\,\dfrac{\partial^2 H_{r_1 s_1}}{\partial x_j\partial x_k} \\[2ex] \qquad +\mathrm{S}\dfrac{\partial H_{r_1 s_1}}{\partial x_i}\,\dfrac{\partial^2 H_{rs}}{\partial x_j\,\partial x_k} \\[2ex] -H_{rs_1}\cdot\dfrac{\partial^3 H_{r_1 s}}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k}-H_{r_1 s}\dfrac{\partial^3 H_{rs_1}}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k} \\[2ex] \qquad -\mathrm{S}\dfrac{\partial H_{rs_1}}{\partial x_i}\,\dfrac{\partial^2 H_{r_1 s}}{\partial x_j\partial x_k} \\[2ex] \qquad -\mathrm{S}\dfrac{\partial H_{r_1 s}}{\partial x_i}\,\dfrac{\partial^2 H_{rs_1}}{\partial x_j\partial x_k}; \end{array}\right.$$

le signe S indique une somme de termes formés par les combinaisons semblables des trois indices *i*, *j* et *k*.

10. Les fonctions G_r sont définies par les égalités (11.) du §. I.; on a

$$(15.)\qquad G_r = \overset{n}{\Sigma} v_n H_{rn},\quad \text{où } r = 1, 2 \text{ ou } 3.$$

On obtient en différentiant successivement:

$$(16.)\qquad \frac{\partial G_r}{\partial x_i} = \overset{n}{\Sigma} v_n\frac{\partial H_{rn}}{\partial x_i} + \overset{n}{\Sigma} H_{rn}\frac{\partial v_n}{\partial x_i},$$

$$(17.)\qquad \frac{\partial^2 G_r}{\partial x_i\partial x_j} = \left\{\begin{array}{l} +\overset{n}{\Sigma}\dfrac{\partial v_n}{\partial x_j}\,\dfrac{\partial H_{rn}}{\partial x_i}+\overset{n}{\Sigma}\dfrac{\partial v_n}{\partial x_i}\,\dfrac{\partial H_{rn}}{\partial x_j} \\[2ex] \overset{n}{\Sigma} v_n\dfrac{\partial^2 H_{rn}}{\partial x_i\partial x_j}+\overset{n}{\Sigma} H_{rn}\dfrac{\partial^2 v_n}{\partial x_i\partial x_j}; \end{array}\right.$$

$$(18.)\qquad \frac{\partial^3 G_r}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k} = \left\{\begin{array}{l} \overset{n}{\Sigma} v_n\dfrac{\partial^3 H_{rn}}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k}+\overset{n}{\Sigma} H_{rn}\dfrac{\partial^3 v_n}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k} \\[2ex] +\overset{n}{\Sigma}\dfrac{\partial v_n}{\partial x_k}\,\dfrac{\partial^2 H_{rn}}{\partial x_i\partial x_j}+\overset{n}{\Sigma}\dfrac{\partial^2 v_n}{\partial x_i\partial x_j}\,\dfrac{\partial H_{rn}}{\partial x_k} \\[2ex] +\overset{n}{\Sigma}\dfrac{\partial v_n}{\partial x_i}\,\dfrac{\partial^2 H_{rn}}{\partial x_j\partial x_k}+\overset{n}{\Sigma}\dfrac{\partial^2 v_n}{\partial x_j\partial x_k}\,\dfrac{\partial H_{rn}}{\partial x_i} \\[2ex] +\overset{n}{\Sigma}\dfrac{\partial v_n}{\partial x_j}\,\dfrac{\partial^2 H_{rn}}{\partial x_i\partial x_k}+\overset{n}{\Sigma}\dfrac{\partial^2 v_n}{\partial x_i\partial x_k}\,\dfrac{\partial H_{rn}}{\partial x_j}. \end{array}\right.$$

Nous déduirons de suite de ces formules les différences suivantes qui se présenteront fréquemment dans nos calculs:

$$(19.)\quad \begin{cases} x_2 G_3 - x_3 G_2 = \overset{n}{\Sigma} v_n (x_2 H_{3n} - x_3 H_{2n}), \\ x_3 G_1 - x_1 G_3 = \overset{n}{\Sigma} v_n (x_3 H_{1n} - x_1 H_{3n}), \\ x_1 G_2 - x_2 G_1 = \overset{n}{\Sigma} v_n (x_1 H_{2n} - x_2 H_{1n}). \end{cases}$$

$$(20.)\quad x_2 \frac{\partial G_3}{\partial x_i} - x_3 \frac{\partial G_2}{\partial x_i} = \overset{n}{\Sigma} v_n \left(x_2 \frac{\partial H_{3n}}{\partial x_i} - x_3 \frac{\partial H_{2n}}{\partial x_i} \right) + \overset{n}{\Sigma} \frac{\partial v_n}{\partial x_i} (x_2 H_{3n} - x_3 H_{2n}).$$

$$(21.)\quad \begin{cases} x_2 \dfrac{\partial^2 G_3}{\partial x_i \partial x_j} - x_3 \dfrac{\partial^2 G_2}{\partial x_i \partial x_j} = \\ \overset{n}{\Sigma} v_n \left(x_2 \dfrac{\partial^2 H_{3n}}{\partial x_i \partial x_j} - x_3 \dfrac{\partial^2 H_{2n}}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \overset{n}{\Sigma} \dfrac{\partial^2 v_n}{\partial x_i \partial x_j} (x_2 H_{3n} - x_3 H_{2n}) \\ + \overset{n}{\Sigma} \dfrac{\partial v_n}{\partial x_j} \left(x_2 \dfrac{\partial H_{3n}}{\partial x_i} - x_3 \dfrac{\partial H_{2n}}{\partial x_i} \right) + \overset{n}{\Sigma} \dfrac{\partial v_n}{\partial x_i} \left(x_2 \dfrac{\partial H_{3n}}{\partial x_j} - x_3 \dfrac{\partial H_{2n}}{\partial x_j} \right). \end{cases}$$

$$(22.)\quad \begin{cases} x_2 \dfrac{\partial^3 G_3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} - x_3 \dfrac{\partial^3 G_2}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = \\ \overset{n}{\Sigma} v_n \left(x_2 \dfrac{\partial^3 H_{3n}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} - x_3 \dfrac{\partial^3 H_{2n}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \right) + \overset{n}{\Sigma} \dfrac{\partial^3 v_n}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} (x_2 H_{3n} - x_3 H_{2n}) \\ + \overset{n}{\Sigma} \dfrac{\partial v_n}{\partial x_k} \left(x_2 \dfrac{\partial^2 H_{3n}}{\partial x_i \partial x_j} - x_3 \dfrac{\partial^2 H_{2n}}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \overset{n}{\Sigma} \dfrac{\partial^2 v_n}{\partial x_i \partial x_j} \left(x_2 \dfrac{\partial H_{3n}}{\partial x_k} - x_3 \dfrac{\partial H_{2n}}{\partial x_k} \right) \\ + \overset{n}{\Sigma} \dfrac{\partial v_n}{\partial x_i} \left(x_2 \dfrac{\partial^2 H_{3n}}{\partial x_j \partial x_k} - x_3 \dfrac{\partial^2 H_{2n}}{\partial x_j \partial x_k} \right) + \overset{n}{\Sigma} \dfrac{\partial^2 v_n}{\partial x_j \partial x_k} \left(x_2 \dfrac{\partial H_{3n}}{\partial x_i} - x_3 \dfrac{\partial H_{2n}}{\partial x_i} \right) \\ + \overset{n}{\Sigma} \dfrac{\partial v_n}{\partial x_j} \left(x_2 \dfrac{\partial^2 H_{3n}}{\partial x_i \partial x_k} - x_3 \dfrac{\partial^2 H_{2n}}{\partial x_i \partial x_k} \right) + \overset{n}{\Sigma} \dfrac{\partial^2 v_n}{\partial x_i \partial x_k} \left(x_2 \dfrac{\partial H_{3n}}{\partial x_j} - x_3 \dfrac{\partial H_{2n}}{\partial x_j} \right). \end{cases}$$

II°. Exposé de la question.

11. La direction asymptotique (x_1^0, x_2^0, x_3^0), correspondant à un point double de la surface (U), doit satisfaire aux relations

$$(23.)\quad \begin{cases} u_1^0 = 0, \quad u_2^0 = 0, \quad u_3^0 = 0, \\ \text{et} \\ v(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = v^0 = 0. \end{cases}$$

Remarquons que lorsqu'on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes, les termes du degré m (c. à. d. du degré le plus élevé) dans l'équation



de la surface U ne changent pas, mais les termes du degré $(m-1)$ sont alterés par cette transformation; autrement, lorsqu'on modifie la position des axes de coordonnées en les laissant parallèles, la fonction $\varphi_m(x, y, z)$ ou $u(x_1, x_2, x_3)$ reste la même, mais la fonction $\varphi_{m-1}(x, y, z)$ ou $v(x_1, x_2, x_3)$ change de forme. Nous allons démontrer que

si l'arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0) est une arête double pour le cône $u(x_1, x_2, x_3) = 0$ et située sur le cône $v(x_1, x_2, x_3) = 0$, on peut, en général, transporter les axes parallèlement à eux-mêmes de manière que cette arête soit aussi une arête double pour le cône représenté par l'ensemble des nouveaux termes du degré $(m-1)$.

Soit en effet, l'équation primitive de la surface U:

$$u(x_1, x_2, x_3) + tv(x_1, x_2, x_3) + t^2 w(x_1, x_2, x_3) + \cdots = 0$$

ou, en supposant $t = 1$:

$$(24.)\qquad u(x_1, x_2, x_3) + v(x_1, x_2, x_3) + w(x_1, x_2, x_3) + \cdots = 0.$$

Posons

$$x_1 = a_1 + y_1, \qquad x_2 = a_2 + y_2, \qquad x_3 = a_3 + y_3;$$

l'équation de la surface prendra la forme

$$(24^{\text{bis}}.)\qquad u(y_1, y_2, y_3) + V(y_1, y_2, y_3) + W(y_1, y_2, y_3) + \cdots = 0,$$

où V désigne l'ensemble des nouveaux termes du degré $(m-1)$, et a pour valeur

$$(25.)\qquad V(y_1, y_2, y_3) = a_1 \frac{\partial u}{\partial y_1} + a_2 \frac{\partial u}{\partial y_2} + a_3 \frac{\partial u}{\partial y_3} + v(y_1, y_2, y_3).$$

Or si l'on suppose les relations (23.) vérifiées par la solution (x_1^0, x_2^0, x_3^0), on pourra disposer des arbitraires a_1, a_2, a_3, de façon que les valeurs

$$y_1 = x_1^0, \qquad y_2 = x_2^0, \qquad y_3 = x_3^0,$$

annulent les dérivées premières de la fonction V. En effet, ceci aura lieu, si

$$(26.)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial V}{\partial y_1}\right)_0 = a_1 u_{11}^0 + a_2 u_{12}^0 + a_3 u_{13}^0 + v_1^0 = 0, \\ \left(\dfrac{\partial V}{\partial y_2}\right)_0 = a_1 u_{21}^0 + a_2 u_{22}^0 + a_3 u_{23}^0 + v_2^0 = 0, \\ \left(\dfrac{\partial V}{\partial y_3}\right)_0 = a_1 u_{31}^0 + a_2 u_{32}^0 + a_3 u_{33}^0 + v_3^0 = 0. \end{cases}$$

Si l'on multiplie ces équations respectivement par x_1^0, x_2^0, x_3^0, et qu'on ajoute, on trouve

$$a_1 u_1^0 + a_2 u_2^0 + a_3 u_3^0 + v^0 = 0,$$

ce qui est une identité, d'après les relations admises (23.). Les trois équations (26.) se réduisent donc à deux équations distinctes; on pourra, par suite transporter les axes d'une infinité de manières, de façon que la direction (x_1^0, x_2^0, x_3^0) soit une arête double pour le cône formé par l'ensemble des nouveaux termes du $(m-1)^{\text{ème}}$ degré. Dans cette transformation, les termes du $m^{\text{ème}}$ degré ne changent pas; par suite, les relations qui ont lieu entre les coefficients de ces termes subsisteront encore après le changement des axes.

La proposition énoncée souffre cependant des exceptions. Si, dans les équations (26.), on regarde a_1, a_2, a_3, comme des variables, on aura un système de trois plans. Dans le cas général que nous examinons, ces trois plans se coupent suivant une même droite; mais il arrivera que les trois plans (26.) sont parallèles, si (x_1^0, x_2^0, x_3^0) est une arête de rebroussement du cône $u(x_1, x_2, x_3)$; il pourra arriver aussi que les trois plans soient à l'infini, si l'arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0) est une arête triple du cône $u(x_1, x_2, x_3)$; ce sont les seuls cas exceptionnels.

12. Pour étudier d'une manière complète l'influence, sur l'ordre de la développable asymptote, des points doubles à l'infini de la surface U, il nous faudra donc examiner les cas suivants:

1er cas. *La direction asymptotique (x_1^0, x_2^0, x_3^0) est une arête double ordinaire du cône $u(x_1, x_2, x_3)$ et appartient au cône $v(x_1, x_2, x_3)$.*

D'après la première hypothèse, on aura

$$u_1^0 = 0, \quad u_2^0 = 0, \quad u_3^0 = 0; \quad \text{les} \quad H_{rs} \gtrless 0;$$

et, d'après la remarque précédente, on pourra admettre que la deuxième hypothèse $v(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ ou $v^0 = 0$ entraine les trois relations

$$v_1^0 = 0, \quad v_2^0 = 0, \quad v_3^0 = 0.$$

2me cas. *La direction asymptotique (x_1^0, x_2^0, x_3^0) est une arête de rebroussement du cône $u(x_1, x_2, x_3)$ et appartient au cône $v(x_1, x_2, x_3)$.*

La première hypothèse entraine les relations

$$u_1^0 = 0, \quad u_2^0 = 0, \quad u_3^0 = 0, \quad \text{et} \quad H_{rs}^0 = 0;$$

quant à la 2me hypothèse, elle ne peut pas être modifiée, et l'on a la seule relation

$$v^0 = 0.$$

3me cas. *La direction asymptotique (x_1^0, x_2^0, x_3^0) est une arête triple du cône $u(x_1, x_2, x_3)$ et appartient au cône $v(x_1, x_2, x_3)$.*

La 1[ère] hypothèse exige les conditions

$$u^{0}_{rs} = 0;$$

la 2[me] hypothèse ne donne lieu qu'à la seule relation

$$v^{0} = 0.$$

4[me] cas. *La direction asymptotique* (x^0_1, x^0_2, x^0_3) *est une arête triple pour le cône* $u(x_1, x_2, x_3)$ *et une arête double pour le cône* $v(x_1, x_2, x_3)$.

Cette double hypothèse entraine les relations

$$u^{0}_{rs} = 0; \quad \text{et} \quad v^0_1 = 0, \quad v^0_2 = 0, \quad v^0_3 = 0.$$

Nous allons faire maintenant la discussion de ces différents cas.

III°. Discussion.

Premier cas:

13. *La direction asymptotique* (x^0_1, x^0_2, x^0_3) *est une arête double du cône* $u(x_1, x_2, x_3) = 0$, ce qui donne

$$(27.)_1 \quad u^0_1 = 0, \quad u^0_2 = 0, \quad u^0_3 = 0, \quad \text{d'où} \quad u^0 = 0;$$

et *l'on peut supposer qu'elle est aussi une arête double du cône* $v(x_1, x_2, x_3) = 0$, ce qui donne

$$(28.)_1 \quad v^0_1 = 0, \quad v^0_2 = 0, \quad v^0_3 = 0, \quad \text{d'où} \quad v^0 = 0.$$

14. Pour déterminer l'ordre de la surface asymptote, nous chercherons le nombre des points en lesquels elle est rencontrée par une droite arbitraire telle que

$$(29.) \quad \begin{cases} x_1 = \varrho a_1 + A_1 t, \\ x_2 = \varrho a_2 + A_2 t, \\ x_3 = \varrho a_3 + A_3 t. \end{cases}$$

En reprenant les raisonnements du n°. 8, nous voyons que le nombre des points de rencontre ou *l'ordre* de la surface asymptote est égal au nombre des génératrices communes aux deux cônes

$$(30.) \quad F(x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} a_1 & x_1 & G_1 + A_1 H \\ a_2 & x_2 & G_2 + A_2 H \\ a_3 & x_3 & G_3 + A_3 H \end{vmatrix} = 0,$$

$$(30^{\text{bis}}.) \quad u(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Développons la fonction F et ses dérivées

$$(30.)\quad F = \begin{cases} a_1(x_2G_3-x_3G_2)\;+a_2(x_3G_1-x_1G_3)\;+a_3(x_1G_2-x_2G_1) \\ +a_1H(x_2A_3-x_3A_2)+a_2H(x_3A_1-x_1A_3)+a_3H(x_1A_2-x_2A_1). \end{cases}$$

Posant

$$(31.)\quad \begin{cases} E_1 = a_2G_3-a_3G_2, \\ E_2 = a_3G_1-a_1G_3, \\ E_3 = a_1G_2-a_2G_1; \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_1 = a_2A_3-a_3A_2, \\ \alpha_2 = a_3A_1-a_1A_3, \\ \alpha_3 = a_1A_2-a_2A_1; \end{cases}$$

on a:

$$(32.)\quad \frac{\partial F}{\partial x_i} = \begin{cases} a_1\Big(x_2\frac{\partial G_3}{\partial x_i}-x_3\frac{\partial G_2}{\partial x_i}\Big)+a_2\Big(x_3\frac{\partial G_1}{\partial x_i}-x_1\frac{\partial G_3}{\partial x_i}\Big)+a_3\Big(x_1\frac{\partial G_2}{\partial x_i}-x_2\frac{\partial G_1}{\partial x_i}\Big) \\ +a_1(x_2A_3-x_3A_2)\frac{\partial H}{\partial x_i}+a_2(x_3A_1-x_1A_3)\frac{\partial H}{\partial x_i}+a_3(x_1A_2-x_2A_1)\frac{\partial H}{\partial x_i} \\ \qquad -E_i-\alpha_iH; \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j} =$$

$$(33.)\quad \begin{cases} a_1\Big(x_2\frac{\partial^2 G_3}{\partial x_i\partial x_j}-x_3\frac{\partial^2 G_2}{\partial x_i\partial x_j}\Big)+a_2\Big(x_3\frac{\partial^2 G_1}{\partial x_i\partial x_j}-x_1\frac{\partial^2 G_3}{\partial x_i\partial x_j}\Big)+a_3\Big(x_1\frac{\partial^2 G_2}{\partial x_i\partial x_j}-x_2\frac{\partial^2 G_1}{\partial x_i\partial x_j}\Big) \\ +a_1(x_2A_3-x_3A_2)\frac{\partial^2 H}{\partial x_i\partial x_j}+a_2(x_3A_1-x_1A_3)\frac{\partial^2 H}{\partial x_i\partial x_j}+a_3(x_1A_2-x_2A_1)\frac{\partial^2 H}{\partial x_i\partial x_j} \\ \qquad -\frac{\partial E_j}{\partial x_i}-\frac{\partial E_i}{\partial x_j}-\alpha_i\frac{\partial H}{\partial x_j}-\alpha_j\frac{\partial H}{\partial x_i}. \end{cases}$$

15. Nous allons d'abord écrire les relations particulières qui résultent des hypothèses (27), savoir:

$$(27.)_1\quad u_1^0 = 0,\quad u_2^0 = 0,\quad u_3^0 = 0.$$

On conclut immédiatement des identités (7.)

$$(34.)_1\quad H^0 = 0.$$

1°. Puisque les H_{rs} ne sont pas nuls, la comparaison des équations fournies par les identités (2.) et (6.), où l'on introduit les hypothèses (27.) et (34.), nous conduit aux relations

$$(35.)_1\quad H^0_{rs} = \lambda_r x^0_s = \lambda_s x^0_r;$$

et nous poserons

$$(35^{\text{bis}}.)_1\quad \frac{\lambda_r}{x_r^0} = \omega.$$

Les identités (8.) donnent visiblement

$$(36.)_1\quad \Big(\frac{\partial H}{\partial x_r}\Big)_0 = 0.$$

2°. Eu égard aux relations (27.) et (36.), on déduit des identités (9.)

$$x_r^0\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_s \partial x_i}\right)_0 = (m-1)\left[\sum^n u_{ni}\frac{\partial H_{rn}}{\partial x_s}\right]_0,$$

cette égalité aura lieu quelles que soient les valeurs respectives des nombres r, s, i, égales ou inégales. D'un autre côté, les identités (11.) donnent d'après (36.)

$$\left[\sum^n u_{ni}\frac{\partial H_{rn}}{\partial x_s}\right]_0 = -\left[\sum^n \frac{\partial u_{ni}}{\partial x_s} H_{rn}\right]_0;$$

on conclut de là

$$x_r^0\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_s \partial x_i}\right)_0 = -(m-1)\left[\sum^n \frac{\partial u_{ni}}{\partial x_s} H_{rn}\right]_0.$$

Les relations (35.), (35bis.) et l'identité (3.) nous permettent de transformer le second membre de cette dernière égalité, lequel devient successivement

$$-(m-1)\lambda_r \sum^n x_n \frac{\partial u_{ni}}{\partial x_s}; \quad -(m-1)(m-2)\lambda_r u_{si};$$

et on a définitivement

$$(37.)_1 \quad \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_s \partial x_i}\right)_0 = -(m-1)(m-2)\omega u_{si}^0.$$

3°. Eu égard aux relations (35.) et (36.), les identités (11.) donnent

$$\left(\sum^n u_{sn}\frac{\partial H_{rn}}{\partial x_i}\right)_0 + \lambda_r\left[\sum^n x_n \frac{\partial u_{sn}}{\partial x_i}\right] = 0;$$

puis, d'après l'identité (3.):

$$(38.)_1 \quad \left[\sum^n u_{sn}\frac{\partial H_{rn}}{\partial x_i}\right]_0 + (m-2)\lambda_r u_{si}^0 = 0;$$

égalité qui a lieu aussi lorsque $s = r$.

Si, dans cette dernière égalité, on fait successivement $s = 1, 2, 3$, en laissant à i une valeur fixe, et que l'on compare les trois équations ainsi obtenues avec celles que fournit le groupe (2.) dans le cas actuel, on obtient les nouvelles relations

$$(39.)_1 \quad \begin{cases} \dfrac{\left(\dfrac{\partial H_{r1}}{\partial x_1}\right)_0 + (m-2)\lambda_r}{x_1^0} = \dfrac{\left(\dfrac{\partial H_{r2}}{\partial x_1}\right)_0}{x_2^0} = \dfrac{\left(\dfrac{\partial H_{r3}}{\partial x_1}\right)_0}{x_3^0}, \\[2ex] \dfrac{\left(\dfrac{\partial H_{r1}}{\partial x_2}\right)_0}{x_1^0} = \dfrac{\left(\dfrac{\partial H_{r2}}{\partial x_2}\right)_0 + (m-2)\lambda_r}{x_2^0} = \dfrac{\left(\dfrac{\partial H_{r3}}{\partial x_2}\right)_0}{x_3^0}, \\[2ex] \dfrac{\left(\dfrac{\partial H_{r1}}{\partial x_3}\right)_0}{x_1^0} = \dfrac{\left(\dfrac{\partial H_{r2}}{\partial x_3}\right)_0}{x_2^0} = \dfrac{\left(\dfrac{\partial H_{r3}}{\partial x_3}\right)_0 + (m-2)\lambda_r}{x_3^0}. \end{cases}$$

16. Nous allons maintenant démontrer que la droite (x_1^0, x_2^0, x_3^0) est une arête double pour les deux cônes F et u [n°. 14], et que les plans tangents suivant cette arête double sont les mêmes.

1°. D'après les relations (28.), les valeurs (15.) des G_r sont nulles, et l'on a

$$(40.) \qquad G_1^0 = 0, \quad G_2^0 = 0, \quad G_3^0 = 0;$$

et comme H^0 est aussi nul, on voit que l'arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0) appartient également au premier des cônes (30.), savoir au cône $F(x_1, x_2, x_3) = 0$.

2°. D'après les relations (40.), (34.) et (36.), l'expression (32.) des $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ ne dépend plus que des binômes de la forme

$$\left(x_2 \frac{\partial G_3}{\partial x_i} - x_3 \frac{\partial G_2}{\partial x_i}\right);$$

or, eu égard aux hypothèses (28.), la valeur (20.) de ces binômes ne dépend plus que des quantités

$$(x_2 H_{3n} - x_3 H_{2n}),$$

quantités nulles, d'après les relations (35.). Donc

$$(41.) \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_0 = 0;$$

c. à. d. que la droite (x_1^0, x_2^0, x_3^0) est aussi une arête double pour le cône $F(x_1, x_2, x_3) = 0$.

3°. Les relations (28.) et (35.) nous donnent pour les valeurs (16.) des $\frac{\partial G_r}{\partial x_i}$

$$\frac{\partial G_r}{\partial x_i} = \lambda_r \overset{n}{\Sigma} x_n \frac{\partial v_n}{\partial x_i} = \lambda_r \overset{n}{\Sigma} x_n \frac{\partial v_i}{\partial x_n} = \lambda_r (m-2) v_i;$$

et, d'après (28.):

$$(42.) \qquad \left(\frac{\partial G_r}{\partial x_i}\right)_0 = 0.$$

4°. Eu égard aux relations (40.), (42.), (36.), la valeur (33.) des $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}$ se réduit à

$$a_1\left(x_2 \frac{\partial^2 G_3}{\partial x_i \partial x_j} - x_3 \frac{\partial^2 G_2}{\partial x_i \partial x_j}\right) + a_1 (x_2 A_3 - x_3 A_2) \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j}$$
$$+ a_2(\ldots) + \cdots$$

D'après l'égalité (37.), le second terme a pour valeur

$$-a_1 (x_2^0 A_3 - x_3^0 A_2)(m-1)(m-2)\omega . u_{ij}^0.$$

La 1ère expression, dont la valeur est fournie par les formules (21.), se réduit,

en vertu des égalités (28.) et (35.), à

$$\sum^n \frac{\partial v_n}{\partial x_j}\Big(x_2\frac{\partial H_{3n}}{\partial x_i} - x_3\frac{\partial H_{2n}}{\partial x_i}\Big)+\sum^n \frac{\partial v_n}{\partial x_i}\Big(x_2\frac{\partial H_{3n}}{\partial x_j} - x_3\frac{\partial H_{2n}}{\partial x_j}\Big).$$

La réduction de ces sommes s'opère aisément à l'aide des relations (39.); et, si l'on tient compte des hypothèses (28.), on a définitivement

$$(43.)\qquad \Big(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\Big)_0 = R u_{ij}^0,$$

en désignant par R la quantité suivante indépendante des indices i et j

$$-(m-1)(m-2)\omega[a_1(x_2^0A_3-x_3^0A_2)+a_2(x_3^0A_1-x_1^0A_3)+a_3(x_1^0A_2-x_2^0A_1)].$$

Or l'équation des plans tangents au cône F suivant l'arête double (x_1^0, x_2^0, x_3^0) est

$$\mathrm{S}\, x_i x_j\Big(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\Big)_0 = 0;$$

cette équation devient, en y substituant les valeurs (43.):

$$x_1^2u_{11}^0+x_2^2u_{22}^0+x_3^2u_{33}^0+2x_2x_3u_{23}^0+2x_1x_3u_{13}^0+2x_1x_2u_{12}^0 = 0;$$

c'est précisément l'équation des plans tangents au cône $u(x_1,x_2,x_3)=0$ suivant l'arête double (x_1^0, x_2^0, x_3^0).

Comme conséquence de cette analyse du 1[er] cas, il résulte donc que *Les deux cônes $F(x_1, x_2, x_3)$ et $u(x_1, x_2, x_3)$ ont en commun six arêtes coincidant avec la génératrice (x_1^0, x_2^0, x_3^0).*

Deuxième cas.

17. *La direction asymptotique (x_1^0, x_2^0, x_3^0) est une arête de rebroussement du cône $u(x_1, x_2, x_3)$*; on doit donc avoir d'abord

$$(44.)_2\qquad u_1^0=0,\quad u_2^0=0,\quad u_3^0=0,\quad \text{d'où } u^0=0,$$

puis

$$(45.)_2\qquad H_{rs}^0=0,\quad \text{d'où}\quad H^0=0\quad (45^{\text{bis}}.);$$

de plus cette arête appartient au cône $v(x_1, x_2, x_3)$, et l'on ne peut pas supposer, en général, qu'elle en soit une arête double; on a donc la seule condition

$$(46.)\qquad v^0 = 0.$$

Nous allons chercher encore le nombre des arêtes communes aux deux cônes (30.) et (30[bis].) et coincidant avec la génératrice (x_1^0, x_2^0, x_3^0).

18. Les relations établies dans le 1[er] cas ne sont plus applicables ici, car les identités (2.) et (6.) ne fournissent plus des systèmes d'équations distinctes.

1°. Les relations admises (45.), ou $H_{rs} = 0$, entrainent comme conséquence immédiate

$$(47.)_2 \qquad u^{0}_{rs} = g_r g_s.$$

En effet, on peut toujours poser

$$u_{12} = g'_1 g'_2, \quad u_{13} = g'_1 g'_3, \quad u_{23} = k g'_2 g'_3;$$

en cherchant à vérifier les relations (45.), on conclut

$$u_{11} = \frac{g'^2_1}{k}, \quad u_{22} = k g'^2_2, \quad u_{33} = k g'^2_3;$$

or on peut encore poser

$$g'_1 = g_1 \sqrt{k}, \quad g'_2 = \frac{g_2}{\sqrt{k}}, \quad g'_3 = \frac{g_3}{\sqrt{k}},$$

g_1, g_2, g_3, étant de nouvelles indeterminées; on arrive ainsi aux valeurs (47.).

Les identités (2.) donnent alors

$$(48.)_2 \qquad x^{0}_1 g_1 + x^{0}_2 g_2 + x^{0}_3 g_3 = 0;$$

et les identités (8.) conduisent à

$$(49.)_2 \qquad \left(\frac{\partial H}{\partial x_r}\right)_0 = 0.$$

En ayant égard aux relations (44.), (45.), (47.) et (49.), nous conclurons des identités (9.)

$$(50.)_2 \qquad \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_r \partial x_s}\right) = 0,$$

après avoir remarqué que les identités (11.) nous conduisent, d'après (45.), (47.) et (50.), à

$$(51.)_2 \qquad g_1\left(\frac{\partial H_{r1}}{\partial x_i}\right)_0 + g_2\left(\frac{\partial H_{r2}}{\partial x_i}\right)_0 + g_3\left(\frac{\partial H_{r3}}{\partial x_i}\right)_0 = 0.$$

2°. En supposant $j = i$, les identités (12.) donnent, d'après (45.), (47.) et (49.);

$$\frac{\partial u_{s1}}{\partial x_i}\frac{\partial H_{r1}}{\partial x_i} + \frac{\partial u_{s2}}{\partial x_i}\frac{\partial H_{r2}}{\partial x_i} + \frac{\partial u_{s3}}{\partial x_i}\frac{\partial H_{r3}}{\partial x_i} = -\tfrac{1}{2} g_s \sum^{n} g_n \frac{\partial^2 H_{rn}}{\partial x_i^2},$$

en supprimant, pour un instant, l'indice 0. Posons

$$(52.)_2 \qquad g_1\left(\frac{\partial^2 H_{r1}}{\partial x_i^2}\right)_0 + g_2\left(\frac{\partial^2 H_{r2}}{\partial x_i^2}\right)_0 + g_3\left(\frac{\partial^2 H_{r3}}{\partial x_i^2}\right)_0 = -2 g_i A_{ri};$$

l'égalité précédente devient alors

$$\left[\frac{\partial u_{s1}}{\partial x_i}\frac{\partial H_{r1}}{\partial x_i} + \frac{\partial u_{s2}}{\partial x_i}\frac{\partial H_{r2}}{\partial x_i} + \frac{\partial u_{s3}}{\partial x_i}\frac{\partial H_{r3}}{\partial x_i}\right]_0 = g_s g_i A_{ri},$$

égalité qui a lieu aussi pour $s = r$. Faisons-y successivement $s = 1, 2, 3$, et résolvons les trois équations obtenues par rapport aux $\frac{\partial H_{rn}}{\partial x_i}$, on trouve par exemple

$$(\text{I.})\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial u_{11}}{\partial x_i} & \frac{\partial u_{12}}{\partial x_i} & \frac{\partial u_{13}}{\partial x_i} \\ \frac{\partial u_{21}}{\partial x_i} & \frac{\partial u_{22}}{\partial x_i} & \frac{\partial u_{23}}{\partial x_i} \\ \frac{\partial u_{31}}{\partial x_i} & \frac{\partial u_{32}}{\partial x_i} & \frac{\partial u_{33}}{\partial x_i} \end{vmatrix}_0 \cdot \left(\frac{\partial H_{r1}}{\partial x_i}\right)_0 = A_{ri} g_i \begin{vmatrix} g_1 & \frac{\partial u_{12}}{\partial x_i} & \frac{\partial u_{13}}{\partial x_i} \\ g_2 & \frac{\partial u_{22}}{\partial x_i} & \frac{\partial u_{23}}{\partial x_i} \\ g_3 & \frac{\partial u_{32}}{\partial x_i} & \frac{\partial u_{33}}{\partial x_i} \end{vmatrix}_0 .$$

D'un autre côté, les identités (3.) deviennent, d'après (47.):

$$\left(x_1 \frac{\partial u_{s1}}{\partial x_i} + x_2 \frac{\partial u_{s2}}{\partial x_i} + x_3 \frac{\partial u_{s3}}{\partial x_i}\right)_0 = (m-2) g_s g_i .$$

Faisons encore, dans cette égalité, $s = 1, 2, 3$ et résolvons les trois équations obtenues par rapport à x_1, x_2, x_3; on a, par exemple:

$$(\text{II.})\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial u_{11}}{\partial x_i} & \frac{\partial u_{12}}{\partial x_i} & \frac{\partial u_{13}}{\partial x_i} \\ \frac{\partial u_{21}}{\partial x_i} & \frac{\partial u_{22}}{\partial x_i} & \frac{\partial u_{23}}{\partial x_i} \\ \frac{\partial u_{31}}{\partial x_i} & \frac{\partial u_{32}}{\partial x_i} & \frac{\partial u_{33}}{\partial x_i} \end{vmatrix}_0 \cdot x_1^0 = (m-2) g_i \begin{vmatrix} g_1 & \frac{\partial u_{12}}{\partial x_i} & \frac{\partial u_{13}}{\partial x_i} \\ g_2 & \frac{\partial u_{22}}{\partial x_i} & \frac{\partial u_{23}}{\partial x_i} \\ g_3 & \frac{\partial u_{32}}{\partial x_i} & \frac{\partial u_{33}}{\partial x_i} \end{vmatrix}_0 .$$

Divisant membre à membre les égalités (I.) et (II.), nous conclurons une relation comprise dans le type général suivant:

$$(53.)_2 \qquad \left(\frac{\partial H_{rs}}{\partial x_i}\right)_0 = \frac{A_{ri}}{m-2} x_s^0 .$$

Il résultera, en outre, de l'égalité $\frac{\partial H_{rs}}{\partial x_i} = \frac{\partial H_{sr}}{\partial x_i}$

$$(53^{\text{bis}}.)_2 \qquad \frac{A_{ri}}{x_r^0} = \frac{A_{si}}{x_s^0} .$$

La substitution de ces valeurs dans les identités (12.) nous donnera, en tenant compte des relations (45.), (47.), (53.) et (3.);

$$(54.)_2 \qquad g_1 \left(\frac{\partial^2 H_{r1}}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0 + g_2 \left(\frac{\partial^2 H_{r2}}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0 + g_3 \left(\frac{\partial^2 H_{r3}}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0 = -(A_{rj} g_i + A_{ri} g_j);$$

cette égalité donne l'égalité (52.) comme cas particulier.

3°. Si l'on combine successivement avec la relation (48.) les relations (52.) et (54.), et qu'après avoir attribué à i et j des valeurs spéciales 1, 2 ou 3, on élimine alternativement les quantités g_1, g_2, g_3, on sera conduit,

après avoir posé:

$$(55.)_2\quad \begin{cases} K^{ij}_{r,1} = x_2^0\left(\dfrac{\partial^2 H_{r3}}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0 - x_3^0\left(\dfrac{\partial^2 H_{r2}}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0, \\ K^{ij}_{r,2} = x_3^0\left(\dfrac{\partial^2 H_{r1}}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0 - x_1^0\left(\dfrac{\partial^2 H_{r3}}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0, \\ K^{ij}_{r,3} = x_1^0\left(\dfrac{\partial^2 H_{r2}}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0 - x_2^0\left(\dfrac{\partial^2 H_{r1}}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0; \end{cases}$$

au groupe des relations suivantes:

$$(56.)_2\quad \begin{cases} \dfrac{K^{11}_{r,1}}{g_1} = \dfrac{K^{11}_{r,2}+2x_3^0A_{r1}}{g_2} = \dfrac{K^{11}_{r,3}-2x_2^0A_{r1}}{g_3}, \\ \dfrac{K^{22}_{r,1}-2x_3^0A_{r2}}{g_1} = \dfrac{K^{22}_{r,2}}{g_2} = \dfrac{K^{22}_{r,3}+2x_1^0A_{r2}}{g_3}, \\ \dfrac{K^{33}_{r,1}+2x_2^0A_{r3}}{g_1} = \dfrac{K^{33}_{r,2}-2x_1^0A_{r2}}{g_2} = \dfrac{K^{33}_{r,3}}{g_3}; \end{cases}$$

$$(56^{bis}.)_2\quad \begin{cases} \dfrac{K^{23}_{r,1}+x_2^0A_{r2}-x_3^0A_{r3}}{g_1} = \dfrac{K^{23}_{r,2}-x_1^0A_{r2}}{g_2} = \dfrac{K^{23}_{r,3}+x_1^0A_{r3}}{g_3}, \\ \dfrac{K^{31}_{r,1}+x_2^0A_{r1}}{g_1} = \dfrac{K^{31}_{r,2}+x_3^0A_{r3}-x_1^0A_{r1}}{g_2} = \dfrac{K^{31}_{r,3}-x_2^0A_{r3}}{g_3}, \\ \dfrac{K^{12}_{r,1}-x_3^0A_{r1}}{g_1} = \dfrac{K^{12}_{r,2}+x_3^0A_{r2}}{g_2} = \dfrac{K^{12}_{r,3}+x_1^0A_{r1}-x_2^0A_{r2}}{g_3}. \end{cases}$$

En tenant compte des relations (53bis.), (54.) et des valeurs (55.), on vérifie facilement l'égalité

$$(57.)_2\quad g_1K^{ij}_{1,\varkappa}+g_2K^{ij}_{2,\varkappa}+g_3K^{ij}_{3,\varkappa} = 0.$$

4°. En ayant égard aux relations (44.), (45.), (47.), (49.), (50.), (51.), (52.), (54.) et à l'identité (3.), on déduira des identités (10.) les valeurs suivantes:

$$(58.)_2\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial^3 H}{\partial x_i^3}\right)_0 = -(m-1)\dfrac{3g_i^2 A_{ii}}{x_i^0}, \\ \left(\dfrac{\partial^3 H}{\partial x_i^2 \partial x_j}\right)_0 = -(m-1)\dfrac{g_i}{x_i^0}(2A_{ii}g_j+A_{ij}g_i), \\ \left(\dfrac{\partial^3 H}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3}\right)_0 = -\dfrac{(m-1)}{x_1^0}(A_{11}g_2g_3+A_{12}g_1g_3+A_{13}g_1g_2). \end{cases}$$

5°. Si l'on élimine successivement les quantités g_1, g_2, g_3, entre les deux relations (48.) et (57.), on en conclut l'égalité des rapports

$$(59.)_2\quad \frac{x_2^0K^{ij}_{3,\varkappa}-x_3^0K^{ij}_{2,\varkappa}}{g_1} = \frac{x_3^0K^{ij}_{1,\varkappa}-x_1^0K^{ij}_{3,\varkappa}}{g_2} = \frac{x_1^0K^{ij}_{2,\varkappa}-x_2^0K^{ij}_{1,\varkappa}}{g_3} = \omega^{ij}_{\varkappa}.$$

Nous déterminerons la valeur des rapports $\omega^{ij}_{\varkappa}$ à l'aide de l'identité (14.).

En tenant compte successivement des relations (45.), (49.), (50.), (53.), (55.), l'identité (14.) devient, en supposant, par exemple, $s=2$, $s_1=3$

$$\text{(I.)}\quad (m-2)\frac{\partial^2 H}{\partial u_{r2}\partial u_{r_1 3}}\cdot\frac{\partial^3 H}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k} = \mathsf{S}(A_{rk}K^{ij}_{r_1,1}-A_{r_1 k}K^{ij}_{r,1}),$$

la somme S s'étendant aux combinaisons des trois indices i, j, k.

Si maintenant on donne à r et r_1 des valeurs particulières, et qu'on ait égard aux relations (53bis.), (58.), (47.) et à la définition (59.) des ω^{ij}_s, on trouvera pour les valeurs cherchées

$$(59^{\text{bis}}.)_2\qquad \omega^{ij}_s = -(m-1)(m-2)g_s.u^0_{ij}.$$

19. Nous allons constater maintenant que la droite (x^0_1, x^0_2, x^0_3) est une arête de rebroussement pour les deux cônes F et u, et que le plan tangent de rebroussement est le même pour tous deux.

1°. D'après les relations (45.), les formules (15.) donnent

$$(60.)\qquad G^0_1=0,\quad G^0_2=0,\quad G^0_3=0;$$

et comme la quantité H est évidemment nulle, il en résulte pour la valeur (30.) de F

$$(61.)\qquad F^0 = 0,$$

c. à. d. que l'arête (x^0_1, x^0_2, x^0_3) appartient au cône $F(x_1, x_2, x_3)=0$.

2°. Eu égard aux relations (45.) et (53.), la valeur (16.) des $\frac{\partial G_r}{\partial x_i}$ se réduit à

$$\left(\frac{\partial G_r}{\partial x_i}\right)_0 = \frac{m-1}{m-2}A_{ri}v^0;$$

et comme v^0 est nul, d'après l'hypothèse (46.), il vient

$$(62.)\qquad \left(\frac{\partial G_r}{\partial x_i}\right)_0 = 0.$$

En vertu des relations (45.), (49.), (60.) et (62.), les formules (32.) donnent

$$(63.)\qquad \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_0 = 0;$$

c. à. d. que la droite (x^0_1, x^0_2, x^0_3) est une arête double pour le cône $F(x_1, x_2, x_3)=0$.

3°. Calculons enfin les $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}$ définies par les équations (33.).

D'après les relations (49.), (50.), et (62.) la valeur (33.) de $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}$ se réduit à

$$\mathsf{S}\,a_1\left(x_2\frac{\partial^2 G_3}{\partial x_i\partial x_j}-x_3\frac{\partial^2 G_2}{\partial x_i\partial x_j}\right);$$

or, eu égard aux relations (45.), (53.) et (53bis.), l'équation (21.) nous donne

$$x_2\frac{\partial^2 G_3}{\partial x_i \partial x_j} - x_3\frac{\partial^2 G_2}{\partial x_i \partial x_j} = \overset{n}{\Sigma} v_n\left(x_2\frac{\partial^2 H_{3n}}{\partial x_i \partial x_j} - x_3\frac{\partial^2 H_{2n}}{\partial x_i \partial x_j}\right);$$

par suite, d'après les notations (55.),

$$\text{(I.)} \quad \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0 = a_1\overset{n}{\Sigma} v_n K_{n,1}^{ij} + a_2\overset{n}{\Sigma} v_n K_{n,2}^{ij} + a_3\overset{n}{\Sigma} v_n K_{n,3}^{ij}.$$

Il nous reste à déterminer les sommes qui se trouvent dans le second membre. Posons, pour un instant,

$$(1^{\circ}.) \quad S_r^{ij} = \overset{n}{\Sigma} v_n^0 K_{n,r}^{ij} = v_1^0 K_{1,r}^{ij} + v_2^0 K_{2,r}^{ij} + v_3^0 K_{3,r}^{ij};$$

on a, en outre, d'après (57.), (48.) et (46.):

$$(2^{\circ}.) \quad 0 = g_1 K_{1,r}^{ij} + g_2 K_{2,r}^{ij} + g_3 K_{3,r}^{ij};$$

$$(3^{\circ}.) \quad 0 = g_1 x_1^0 + g_2 x_2^0 + g_3 x_3^0;$$

$$(4^{\circ}.) \quad 0 = v^0 = x_1^0 v_1^0 + x_2^0 v_2^0 + x_3^0 v_3^0.$$

Eliminant d'abord les x_i entre les équations (3°.) et (4°.), il vient

$$(5^{\circ}.) \quad \frac{g_2 v_3^0 - g_3 v_2^0}{x_1^0} = \frac{g_3 v_1^0 - g_1 v_3^0}{x_2^0} = \frac{g_1 v_2^0 - g_2 v_1^0}{x_3^0} = \theta;$$

puis éliminant les $K_{1,r}$ entre les équations (1°.) et (2°.), et tenant compte de l'égalité des rapports précédents, on trouve

$$g_1 S_r^{ij} = \theta(x_3^0 K_{2,r}^{ij} - x_2^0 K_{3,r}^{ij}).$$

Et enfin, d'après les relations (59.) et (59bis.), il vient définitivement

$$(64.) \quad S_r^{ij} = v_1^0 K_{1,r}^{ij} + v_2^0 K_{2,r}^{ij} + v_3^0 K_{3,r}^{ij} = -\theta(m-1)(m-2)g_r . u_{ij}^0.$$

Nous aurons, par suite, pour la valeur (I.) de $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}$:

$$(65.) \quad \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0 = -\theta(m-1)(m-2)(a_1 g_1 + a_2 g_2 + a_3 g_3) . u_{ij}^0,$$

θ étant une quantité dont la valeur est indépendante des indices i et j.

Or l'équation des plans tangents au cône $F(x_1, x_2, x_3)$ suivant l'arête double (x_1^0, x_2^0, x_3^0) est

$$\mathrm{S}\, x_i x_j \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0 = 0;$$

cette équation devient, en y substituant les valeurs (65.):

$$x_1^2 u_{11}^0 + x_2^2 u_{22}^0 + x_3^2 u_{33}^0 + 2x_2 x_3 u_{23}^0 + 2x_3 x_1 u_{13}^0 + 2x_1 x_2 u_{12}^0 = 0,$$

ou

$$(x_1 g_1 + x_2 g_2 + x_3 g_3)^2 = 0;$$

ce qui est précisément l'équation des plans tangents au cône $u(x_1, x_2, x_3) = 0$ suivant l'arête de rebroussement (x_1^0, x_2^0, x_3^0).

Comme conséquence de cette analyse, il résulte que, dans ce 2[ième] cas, *Les deux cônes* $F(x_1, x_2, x_3)$ *et* $u(x_1, x_2, x_3)$ *ont en commun six arêtes coincidant avec la génératrice* (x_1^0, x_2^0, x_3^0).

Troisième cas.

20. *La direction asymptotique* (x_1^0, x_2^0, x_3^0) *est une arête triple pour le cône* $u(x_1, x_2, x_3)$; on doit donc avoir

$$(66.)_3 \qquad u_{rs}^0 = 0, \text{ quels que soient } r \text{ et } s;$$

et, *en outre, cette droite est une arête simple du cône* $v(x_1, x_2, x_3) = 0$; d'où la relation unique

$$(67.)_3 \qquad v^0 = 0.$$

21. 1°. Comme conséquence immédiate des hypothèses (66.), on a d'abord

$$(68.)_3 \qquad u_1^0 = 0, \quad u_2^0 = 0, \quad u_3^0 = 0, \quad \text{d'où } u^0 = 0;$$

$$(68^{\text{bis}}.)_3 \qquad H^0 = 0; \quad H_{rs}^0 = 0.$$

Les identités (8.) et (9.) donnent ensuite

$$(69.)_3 \qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial H}{\partial x_r}\right)_0 = 0, \\ \left(\dfrac{\partial^2 H}{\partial x_r \partial x_s}\right)_0 = 0. \end{cases}$$

Les quantités H_{rs} étant des fonctions homogènes et du second degré par rapport aux u_{rs}, on a évidemment

$$(70.)_3 \qquad \left(\frac{\partial H_{rs}}{\partial x_i}\right)_0 = 0;$$

et les identités (10.) donnent alors

$$(71.)_3 \qquad \left(\frac{\partial^3 H}{\partial x_r \partial x_s \partial x_i}\right)_0 = 0.$$

2°. Différentiant encore une fois les identités (12.), et introduisant les hypothèses actuelles, nous trouverons

$$(\text{I}) \qquad \sum^{m} \frac{\partial u_{sm}}{\partial x_i} \frac{\partial^2 H_{rm}}{\partial x_j \partial x_k} + \sum^{m} \frac{\partial u_{sm}}{\partial x_j} \frac{\partial^2 H_{rm}}{\partial x_i \partial x_k} = 0.$$

Faisons d'abord $k = j = i$, puis donnons à s les valeurs 1, 2, 3; les trois équations ainsi obtenues, comparées avec celles que fournit la relation

$$x_1 \frac{\partial u_{s1}}{\partial x_i} + x_2 \frac{\partial u_{s2}}{\partial x_i} + x_3 \frac{\partial u_{s3}}{\partial x_i} = 0$$

lorsqu'on y donne aussi à s les valeurs 1, 2, 3, nous conduiront aux relations

$$(72.)_3 \qquad \frac{\left(\frac{\partial^2 H_{r1}}{\partial x_1^2}\right)_0}{x_1^0} = \frac{\left(\frac{\partial^2 H_{r2}}{\partial x_1^2}\right)_0}{x_2^0} = \frac{\left(\frac{\partial^2 H_{r3}}{\partial x_1^2}\right)_0}{x_3^0}.$$

Eu égard à ces dernières relations, l'égalité (I) nous conduira, à l'aide d'un calcul semblable au précédent, aux équations

$$(72^{\text{bis}}.)_3 \qquad \frac{\left(\frac{\partial^2 H_{r1}}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0}{x_1^0} = \frac{\left(\frac{\partial^2 H_{r2}}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0}{x_2^0} = \frac{\left(\frac{\partial^2 H_{r3}}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0}{x_3^0}$$

22. Nous allons constater maintenant que la droite (x_1^0, x_2^0, x_3^0) est aussi une arête triple pour le cône $F(x_1, x_2, x_3) = 0$.

D'après les relations (68.) et (70.), les formules (15.) et (16.) donnent d'abord

$$(73.) \qquad G_r^0 = 0, \quad \left(\frac{\partial G_r}{\partial x_i}\right)_0 = 0;$$

et, par suite des relations (68.), (70.), (72.) et (67.), les formules (17.) donnent

$$(74.) \qquad \left(\frac{\partial^2 G_r}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0 = 0.$$

Les équations (30.), (32.) et (33.) donnent alors immédiatement

$$(75.) \qquad F^0 = 0, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0 = 0.$$

En poussant plus loin les calculs on constaterait que les $\partial^3 F$ ne sont ni nuls, ni proportionnels aux $\partial^3 u$. L'arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0) est donc triple pour les deux cônes F et u; par conséquent *les deux cônes* $F(x_1, x_2, x_3)$ *et* $u(x_1, x_2, x_3)$ *ont en commun neuf arêtes coïncidant avec la génératrice* (x_1^0, x_2^0, x_3^0).

Quatrième cas.

23. *La direction asymptotique* (x_1^0, x_2^0, x_3^0) *est une arête triple pour le cône* $u(x_1, x_2, x_3)$; c. à. d. que

$$(76.)_4 \qquad u_{rs}^0 = 0, \text{ quels que soient } r \text{ et } s;$$

et *est, en même temps, une arête double pour le cône* $v(x_1, x_2, x_3)$; c. à. d. que

$$(77.)_4 \qquad v_1^0 = 0, \quad v_2^0 = 0, \quad v_3^0 = 0, \quad \text{d'où} \quad v^0 = 0.$$

24. Les relations des n°s 21 et 22 sont applicables à ce cas; les formules (18.) nous donnent en outre, d'après (77.):

$$(78.)_4 \qquad \left(\frac{\partial^3 G_r}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}\right)_0 = 0;$$

et on conclut immédiatement de l'identité (33.), après l'avoir différentiée,

$$\left(\frac{\partial^3 F}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}\right)_0 = 0;$$

c. à. d. que la droite (x_1^0, x_2^0, x_3^0) est une arête quadruple pour le cône F. Donc

Les deux cônes $F(x_1, x_2, x_3)$ et $u(x_1, x_2, x_3)$ ont en commun douze arêtes coïncidant avec la génératrice (x_1^0, x_2^0, x_3^0).

IV°. Conclusion générale.

25. Nous venons donc de démontrer que, lorsque la surface U possède un point double à l'infini, les deux cônes (30.) et (30bis.)

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad u(x_1, x_2, x_3) = 0$$

ont en commun, en général, *six* arêtes coïncidant avec la direction asymptotique (x_1^0, x_2^0, x_3^0) correspondant au point double. Lorsque l'arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0) est triple pour le cône $u(x_1, x_2, x_3) = 0$, les deux cônes auront en commun *neuf* ou *douze* arêtes coïncidant avec l'arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0), suivant que cette droite est une arête simple ou une arête double du cône $v(x_1, x_2, x_3) = 0$. On sait d'ailleurs que les solutions communes à ces deux cônes déterminent tous les points en lesquels la surface asymptote est rencontrée par une droite quelconque, et font, par suite, connaître *l'ordre* de cette développable.

Or, pour $(x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0, x_3 = x_3^0)$, les équations (10.) §. I de la génératrice (δ) correspondant à cette direction asymptotique se réduisent à des identités, puisque les quantités H et G_r sont nulles; il n'y a plus, en effet, de plan asymptote, il n'y a plus de génératrice (δ) correspondant à la direction asymptotique (x_1^0, x_2^0, x_3^0).

Par conséquent, le nombre des génératrices (δ), rencontrées par la droite arbitrairement choisie, sera égal au nombre des arêtes communes aux deux cônes $F(x_1, x_2, x_3)$, $u(x_1, x_2, x_3)$ et distinctes de l'arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0); c. à. d. égal à

$$[m(3m-5)-6], \text{ ou } [m(3m-5)-9], \text{ ou } [m(3m-5)-12]$$

suivant que la direction asymptotique (x_1^0, x_2^0, x_3^0), qui détermine le point double, est une arête double du cône $u(x_1, x_2, x_3)$; ou, une arête triple pour le cône $u(x_1, x_2, x_3)$ et une arête simple pour le cône $v(x_1, x_2, x_3)$; ou, une arête triple pour le cône u et une arête double pour le cône v.

Donc

26. *Lorsque la surface U a un point double à l'infini, l'ordre*

$$N = m(3m-5)$$

de la surface asymptote est diminué, en général, de six unités. Lorsque la direction asymptotique, correspondant au point double, est une arête triple du cône φ_m, la diminution sera de neuf ou de douze unités suivant que cette direction sera une arête simple ou une arête double pour le cône φ_{m-1}.

Ces derniers cas se présenteront respectivement lorsque le cylindre asymptote, correspondant au point double, se réduira à deux plans dont un à l'infini, ou à deux plans à l'infini [n°s 25 et 26, 1ère partie].

---

§. III.

Recherche des directions asymptotiques de la surface asymptote.

27. Pour les recherches qui nous restent à faire, nous nous placerons dans le cas général où la surface proposée U n'a pas de points multiples à l'infini.

Nous compléterons d'abord l'étude précédente en cherchant à déterminer l'influence des arêtes doubles du cône des directions asymptotiques sur l'ordre de la surface asymptote, en supposant toujours que ces arêtes doubles ne correspondent pas à des points doubles à l'infini sur la surface U, c. à. d. que cette génératrice du cône $u(x_1, x_2, x_3)$ n'appartient pas au cône $v(x_1, x_2, x_3)$.

I°. Influence des arêtes doubles du cône des directions asymptotiques.

28. Considérons une arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0) que nous supposerons double pour le cône $u(x_1, x_2, x_3) = 0$, c. à. d. que

$$(79.) \qquad u_1^0 = 0, \quad u_2^0 = 0, \quad u_3^0 = 0, \quad \text{d'où} \quad u^0 = 0;$$

et admettons, en outre, que cette arête n'appartient pas au cône $v(x_1, x_2, x_3) = 0$, c. à. d. que

$$v^0 \gtrless 0.$$

Nous aurons à examiner deux cas: la droite (x_1^0, x_2^0, x_3^0) est une arête double ordinaire du cône $u(x_1, x_2, x_3)$, ou elle en est une arête de rebroussement.

Premier cas.

29. *La direction asymptotique* (x_1^0, x_2^0, x_3^0) *est une arête double du cône* $u(x_1, x_2, x_3)$, c. à. d. que

$$(80.)\quad \begin{cases} u_1^0 = 0, \quad u_2^0 = 0, \quad u_3^0 = 0, \quad \text{d'où} \quad u^0 = 0, \\ \text{et} \qquad\qquad H_{rs}^0 \gtrless 0. \end{cases}$$

Les relations du n°. 15. sont applicables à ce cas. D'après (35.), les valeurs (15.) des G_r sont

$$(81.)\qquad (G_r)_0 = \lambda_r(m-1)v^0;$$

et, eu égard à ces valeurs et à la relation (34.), l'équation du cône (30.) devient

$$F(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = \begin{vmatrix} a_1 & x_1^0 & \lambda_1 \\ a_2 & x_2^0 & \lambda_2 \\ a_3 & x_3^0 & \lambda_3 \end{vmatrix}(m-1)v^0 = 0,$$

$$\text{car}\quad \lambda_r = \omega x_r^0;$$

donc le cône $F(x_1, x_2, x_3)$ passe par l'arête double (x_1^0, x_2^0, x_3^0). Nous calculerons plus loin les $\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_0$ et nous constaterons que leur valeurs sont différentes de zéro. Ainsi

Les cônes $F(x_1, x_2, x_3)$ *et* $u(x_1, x_2, x_3)$ *ont en commun* d e u x *arêtes coincidant avec l'arête* (x_1^0, x_2^0, x_3^0).

Deuxième cas.

30. *La direction asymptotique* (x_1^0, x_2^0, x_3^0) *est une arête double de rebroussement pour le cône* $u(x_1, x_2, x_3)$; c. à. d. que

$$(82.)\quad \begin{cases} u_1^0 = 0, \quad u_2^0 = 0, \quad u_3^0 = 0, \quad \text{d'où} \quad u^0 = 0, \\ \text{et } H_{rs}^0 = 0, \text{ quels que soient } r \text{ et } s; \text{ d'où } H^0 = 0. \end{cases}$$

Les relations du n°. 18 sont applicables à ce cas. D'après (45.), les valeurs des G_r sont

$$(83.)\qquad G_r = 0;$$

il en résulte immédiatement $F^0 = 0$. On a, en outre, (20.)

$$(84.)\quad \begin{cases} \left(x_2\frac{\partial G_3}{\partial x_i} - x_3\frac{\partial G_2}{\partial x_i}\right)_0 = \left[\overset{n}{\Sigma} v_n\left(x_2\frac{\partial H_{3n}}{\partial x_i} - x_3\frac{\partial H_{2n}}{\partial x_i}\right)\right]_0 \\ \text{d'après (53.)} \qquad = \left[\overset{n}{\Sigma}\frac{v_n A_{ni}}{m-2}(x_2^0 x_3^0 - x_3^0 x_2^0)\right] = 0; \end{cases}$$

la surface asymptote; car à une arête du cône $u(x_1, x_2, x_3)$ correspond une génératrice parallèle de la surface asymptote et une seule.

Mais l'étude des arêtes d'inflexion et des arêtes doubles du cône $u(x_1, x_2, x_3)$ ou φ_m va nous permettre de constater l'existence d'autres systèmes de directions asymptotiques pour la surface asymptote.

Premier cas. Arêtes d'inflexion.

33. Supposons que la droite (x_1^0, x_2^0, x_3^0) soit une arête d'inflexion du cône $u(x_1, x_2, x_3)$, de sorte que

$$(85.)\qquad u(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = 0 \quad \text{et} \quad H^0 = 0.$$

Cherchons l'intersection de la surface asymptote par une *droite quelconque parallèle à l'arête d'inflexion* (x_1^0, x_2^0, x_3^0), savoir (A_1, A_2, A_3 étant des constantes arbitraires)

$$(86.)\qquad \frac{x_1 - A_1 t}{x_1^0} = \frac{x_2 - A_2 t}{x_2^0} = \frac{x_3 - A_3 t}{x_3^0}.$$

Le nombre des génératrices (δ) rencontrées par cette droite sera égal au nombre des arêtes communes aux deux cônes

$$(87.)\quad F_1(x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} x_1^0 & x_1 & G_1 + A_1 H \\ x_2^0 & x_2 & G_2 + A_2 H \\ x_3^0 & x_3 & G_3 + A_3 H \end{vmatrix} = 0, \qquad (87^{\text{bis}}.)\quad u(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Nous allons donner de suite les développements de la fonction F et de ses dérivées, développements qui nous seront utiles pour ce cas et les suivants. On a d'abord

$$(87.)\quad F_1 = (x_2^0 x_3 - x_3^0 x_2)(G_1 + A_1 H) + (x_3^0 x_1 - x_1^0 x_3)(G_2 + A_2 H) + (x_1^0 x_2 - x_2^0 x_1)(G_3 + A_3 H).$$

Posons

$$(88.)\quad \begin{cases} x_2^0 G_3 - x_3^0 G_2 = E_1, \\ x_3^0 G_1 - x_1^0 G_3 = E_2, \\ x_1^0 G_2 - x_2^0 G_1 = E_3, \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta_1 = x_2^0 A_3 - x_3^0 A_2, \\ \beta_2 = x_3^0 A_1 - x_1^0 A_3, \\ \beta_3 = x_1^0 A_2 - x_2^0 A_1; \end{cases}$$

on aura alors

$$(89.)\qquad \frac{\partial F_1}{\partial x_i} = \mathfrak{S}(x_2^0 x_3 - x_3^0 x_2)\left(\frac{\partial G_1}{\partial x_i} + A_1 \frac{\partial H}{\partial x_i}\right) - E_i - \beta_i H,$$

puis:

$$(90.)\qquad \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_i \partial x_j} = \begin{Bmatrix} \mathfrak{S}(x_2^0 x_3 - x_3^0 x_2)\left(\frac{\partial^2 G_1}{\partial x_i \partial x_j} + A_1 \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j}\right) \\ -\frac{\partial E_j}{\partial x_i} - \frac{\partial E_i}{\partial x_j} - \beta_j \frac{\partial H}{\partial x_i} - \beta_i \frac{\partial H}{\partial x_j} \end{Bmatrix};$$

et enfin

$$(91.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^3 F_1}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = \\ \mathrm{S}\,(x_2^0 x_3 - x_3^0 x_2)\left(\dfrac{\partial^3 G_1}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} + A_1 \dfrac{\partial^3 H}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}\right) \\ -\dfrac{\partial^2 E_k}{\partial x_i \partial x_j} - \dfrac{\partial^2 E_i}{\partial x_j \partial x_k} - \dfrac{\partial^2 E_j}{\partial x_i \partial x_k} - \beta_k \dfrac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} - \beta_i \dfrac{\partial^2 H}{\partial x_j \partial x_k} - \beta_j \dfrac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_k}. \end{cases}$$

34. Revenons à la question. Il est d'abord visible que l'arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0) appartient au cône (87.) $F_1(x_1, x_2, x_3) = 0$.

Nous allons démontrer, en outre, que les deux cônes F_1 et u se touchent suivant cette génératrice commune.

En effet, faisant $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$, $x_3 = x_3^0$, et ayant égard aux relations (85.), les équations (88.) et (89.) donnent, par exemple,

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\right)_0 = x_2^0 G_3^0 - x_3^0 G_2^0.$$

Or l'identité (12.) §. I. et la 1ère des relations (85.) donnent

$$\begin{cases} u_1^0 G_1^0 + u_2^0 G_2^0 + u_3^0 G_3^0 = 0, \\ u_1^0 x_1^0 + u_2^0 x_2^0 + u_3^0 x_3^0 = 0. \end{cases}$$

Par l'élimination successive de u_1^0, u_2^0, u_3^0 ces deux égalités conduisent à

$$\frac{x_2^0 G_3^0 - x_3^0 G_2^0}{u_1^0} = \frac{x_3^0 G_1^0 - x_1^0 G_3^0}{u_2^0} = \frac{x_1^0 G_2^0 - x_2^0 G_1^0}{u_3^0}.$$

D'après ces dernières relations et les valeurs ci-dessus des $\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_i}\right)_0$, on voit que l'équation

$$x_1\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\right)_0 + x_2\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right)_0 + x_3\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3}\right)_0 = 0$$

du plan tangent au cône $F_1(x_1, x_2, x_3)$ suivant l'arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0) devient

$$x_1 u_1^0 + x_2 u_2^0 + x_3 u_3^0 = 0;$$

c'est précisément l'équation du plan tangent au cône $u(x_1, x_2, x_3)$ suivant cette même arête.

Les deux cônes (87.) ont donc en commun l'arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0) et se touchent suivant cette arête; par suite, ils n'auront plus en commun que $[m(3m-5)-2]$ autres arêtes distinctes de l'arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0); mais, à une arête d'inflexion correspond, en général, pour la surface asymptote une *droite à l'infini* dans le plan asymptote parallèle au plan d'inflexion du cône $u(x_1, x_2, x_3)$.

Par conséquent: *Une droite quelconque parallèle à une arête d'inflexion* (x_1^0, x_2^0, x_3^0) *du cône des directions asymptotiques, c. à d. passant par le point à l'infini*

$$\text{(I.)} \quad \frac{x_1}{x_1^0} = \frac{x_2}{x_2^0} = \frac{x_3}{x_3^0}, \qquad t = 0,$$

ne rencontre plus la surface asymptote qu'en $[m(3m-5)-2]$ *points distincts du point où elle rencontre la génératrice à l'infini; par suite, elle rencontre cette génératrice à l'infini en deux points coincidents; donc le point I à l'infini est un point double de la surface asymptote.*

Nous ferons plus loin quelques remarques relatives au cas où la génératrice (δ), correspondant à une arête d'inflexion, est à distance finie.

35. Imaginons maintenant une droite quelconque

$$\frac{x_1 - A_1 t}{a_1} = \frac{x_2 - A_2 t}{a_2} = \frac{x_3 - A_3 t}{a_3},$$

située dans le plan asymptote

$$x_1 u_1^0 + x_2 u_2^0 + x_3 u_3^0 + tv(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = 0,$$

qui correspond à l'arête d'inflexion (x_1^0, x_2^0, x_3^0); de sorte qu'on a les relations

$$\text{(92.)} \quad \begin{cases} u(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = 0, \quad H^0 = 0; \\ a_1 u_1^0 + a_2 u_2^0 + a_3 u_3^0 = 0; \\ A_1 u_1^0 + A_2 u_2^0 + A_3 u_3^0 + v^0 = 0. \end{cases}$$

Le nombre des génératrices de la surface asymptote rencontrées par la droite en question sera égal au nombre des arêtes communes aux deux cônes

$$F(x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} a_1 & x_1 & G_1 + A_1 H \\ a_2 & x_2 & G_2 + A_2 H \\ a_3 & x_3 & G_3 + A_3 H \end{vmatrix} = 0, \qquad u(x_1, x_2, x_3) = 0;$$

équations dont la forme est identique à celle des équations (30.).

Ces deux cônes ont en commun l'arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0); car si, après avoir remplacé x_1, x_2, x_3 par x_1^0, x_2^0, x_3^0 dans l'équation du cône F, on multiplie les colonnes du déterminant respectivement par u_1^0, u_2^0, u_3^0, et qu'on les ajoute en ayant égard aux relations (12.) §. I. et (92.), il vient

$$\begin{vmatrix} a_1 & x_1^0 & G_1^0 + A_1 H^0 \\ a_2 & x_2^0 & G_2^0 + A_2 H^0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

quantité évidemment nulle.

or, eu égard aux relations (45.), (53.) et (53[bis].), l'équation (21.) nous donne

$$x_2\frac{\partial^2 G_3}{\partial x_i\partial x_j}-x_3\frac{\partial^2 G_2}{\partial x_i\partial x_j} = \sum^n v_n\Big(x_2\frac{\partial^2 H_{3n}}{\partial x_i\partial x_j}-x_3\frac{\partial^2 H_{2n}}{\partial x_i\partial x_j}\Big);$$

par suite, d'après les notations (55.),

$$\text{(I.)}\quad \Big(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}\Big)_0 = a_1\sum^n v_n K^{ij}_{n,1}+a_2\sum^n v_n K^{ij}_{n,2}+a_3\sum^n v_n K^{ij}_{n,3}.$$

Il nous reste à déterminer les sommes qui se trouvent dans le second membre. Posons, pour un instant,

$$(1^\circ.)\quad S^{ij}_r = \sum^n v^0_n K^{ij}_{n,r} = v^0_1 K^{ij}_{1,r}+v^0_2 K^{ij}_{2,r}+v^0_3 K^{ij}_{3,r};$$

on a, en outre, d'après (57.), (48.) et (46.):

$$(2^\circ.)\quad 0 = g_1 K^{ij}_{1,r}+g_2 K^{ij}_{2,r}+g_3 K^{ij}_{3,r};$$

$$(3^\circ.)\quad 0 = g_1 x^0_1+g_2 x^0_2+g_3 x^0_3;$$

$$(4^\circ.)\quad 0 = v^0 = x^0_1 v^0_1+x^0_2 v^0_2+x^0_3 v^0_3.$$

Eliminant d'abord les x_i entre les équations (3°.) et (4°.), il vient

$$(5^\circ.)\quad \frac{g_2 v^0_3-g_3 v^0_2}{x^0_1} = \frac{g_3 v^0_1-g_1 v^0_3}{x^0_2} = \frac{g_1 v^0_2-g_2 v^0_1}{x^0_3} = \theta;$$

puis éliminant les $K_{1,r}$ entre les équations (1°.) et (2°.), et tenant compte de l'égalité des rapports précédents, on trouve

$$g_1 S^{ij}_r = \theta(x^0_3 K^{ij}_{2,r}-x^0_2 K^{ij}_{3,r}).$$

Et enfin, d'après les relations (59.) et (59[bis].), il vient définitivement

$$(64.)\quad S^{ij}_r = v^0_1 K^{ij}_{1,r}+v^0_2 K^{ij}_{2,r}+v^0_3 K^{ij}_{3,r} = -\theta(m-1)(m-2)g_r.u^0_{ij}.$$

Nous aurons, par suite, pour la valeur (I.) de $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}$:

$$(65.)\quad \Big(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}\Big)_0 = -\theta(m-1)(m-2)(a_1g_1+a_2g_2+a_3g_3).u^0_{ij},$$

θ étant une quantité dont la valeur est indépendante des indices i et j.

Or l'équation des plans tangents au cône $F(x_1, x_2, x_3)$ suivant l'arête double (x^0_1, x^0_2, x^0_3) est

$$\mathrm{S}\, x_i x_j\Big(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}\Big)_0 = 0;$$

cette équation devient, en y substituant les valeurs (65.):

$$x_1^2 u^0_{11}+x_2^2 u^0_{22}+x_3^2 u^0_{33}+2x_2x_3u^0_{23}+2x_3x_1u^0_{13}+2x_1x_2u^0_{12} = 0,$$

ou

$$(x_1g_1+x_2g_2+x_3g_3)^2 = 0;$$

ce qui est précisément l'équation des plans tangents au cône $u(x_1, x_2, x_3) = 0$ suivant l'arête de rebroussement (x_1^0, x_2^0, x_3^0).

Comme conséquence de cette analyse, il résulte que, dans ce 2ième cas, *Les deux cônes $F(x_1, x_2, x_3)$ et $u(x_1, x_2, x_3)$ ont en commun six arêtes coincidant avec la génératrice (x_1^0, x_2^0, x_3^0).*

Troisième cas.

20. *La direction asymptotique (x_1^0, x_2^0, x_3^0) est une arête triple pour le cône $u(x_1, x_2, x_3)$*; on doit donc avoir

$$(66.)_3 \qquad u_{rs}^0 = 0, \text{ quels que soient } r \text{ et } s;$$

et, *en outre, cette droite est une arête simple du cône $v(x_1, x_2, x_3) = 0$*; d'où la relation unique

$$(67.)_3 \qquad v^0 = 0.$$

21. 1°. Comme conséquence immédiate des hypothèses (66.), on a d'abord

$$(68.)_3 \qquad u_1^0 = 0, \quad u_2^0 = 0, \quad u_3^0 = 0, \quad \text{d'où } u^0 = 0;$$

$$(68^{\text{bis}}.)_3 \qquad H^0 = 0; \quad H_{rs}^0 = 0.$$

Les identités (8.) et (9.) donnent ensuite

$$(69.)_3 \qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial H}{\partial x_r}\right)_0 = 0, \\ \left(\dfrac{\partial^2 H}{\partial x_r \partial x_s}\right)_0 = 0. \end{cases}$$

Les quantités H_{rs} étant des fonctions homogènes et du second degré par rapport aux u_{rs}, on a évidemment

$$(70.)_3 \qquad \left(\frac{\partial H_{rs}}{\partial x_i}\right)_0 = 0;$$

et les identités (10.) donnent alors

$$(71.)_3 \qquad \left(\frac{\partial^3 H}{\partial x_r \partial x_s \partial x_i}\right)_0 = 0.$$

2°. Différentiant encore une fois les identités (12.), et introduisant les hypothèses actuelles, nous trouverons

$$(\text{I}) \qquad \sum^{m} \frac{\partial u_{sm}}{\partial x_i} \frac{\partial^2 H_{rm}}{\partial x_j \partial x_k} + \sum^{m} \frac{\partial u_{sm}}{\partial x_j} \frac{\partial^2 H_{rm}}{\partial x_i \partial x_k} = 0.$$

Faisons d'abord $k = j = i$, puis donnons à s les valeurs 1, 2, 3; les trois équations ainsi obtenues, comparées avec celles que fournit la relation

$$x_1 \frac{\partial u_{s1}}{\partial x_i} + x_2 \frac{\partial u_{s2}}{\partial x_i} + x_3 \frac{\partial u_{s3}}{\partial x_i} = 0$$

lorsqu'on y donne aussi à s les valeurs 1, 2, 3, nous conduiront aux relations

$$(72.)_3 \qquad \frac{\left(\frac{\partial^2 H_{r1}}{\partial x_i^2}\right)_0}{x_1^0} = \frac{\left(\frac{\partial^2 H_{r2}}{\partial x_i^2}\right)_0}{x_2^0} = \frac{\left(\frac{\partial^2 H_{r3}}{\partial x_i^2}\right)_0}{x_3^0}.$$

Eu égard à ces dernières relations, l'égalité (I) nous conduira, à l'aide d'un calcul semblable au précédent, aux équations

$$(72^{\text{bis}}.)_3 \qquad \frac{\left(\frac{\partial^2 H_{r1}}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0}{x_1^0} = \frac{\left(\frac{\partial^2 H_{r2}}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0}{x_2^0} = \frac{\left(\frac{\partial^2 H_{r3}}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0}{x_3^0}.$$

22. Nous allons constater maintenant que la droite (x_1^0, x_2^0, x_3^0) est aussi une arête triple pour le cône $F(x_1, x_2, x_3) = 0$.

D'après les relations (68.) et (70.), les formules (15.) et (16.) donnent d'abord

$$(73.) \qquad G_r^0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial G_r}{\partial x_i}\right)_0 = 0;$$

et, par suite des relations (68.), (70.), (72.) et (67.), les formules (17.) donnent

$$(74.) \qquad \left(\frac{\partial^2 G_r}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0 = 0.$$

Les équations (30.), (32.) et (33.) donnent alors immédiatement

$$(75.) \qquad F^0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0 = 0.$$

En poussant plus loin les calculs on constaterait que les $\partial^3 F$ ne sont ni nuls, ni proportionnels aux $\partial^3 u$. L'arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0) est donc triple pour les deux cônes F et u; par conséquent *les deux cônes $F(x_1, x_2, x_3)$ et $u(x_1, x_2, x_3)$ ont en commun neuf arêtes coïncidant avec la génératrice (x_1^0, x_2^0, x_3^0).*

Quatrième cas.

23. *La direction asymptotique (x_1^0, x_2^0, x_3^0) est une arête triple pour le cône $u(x_1, x_2, x_3)$*; c. à. d. que

$$(76.)_4 \qquad u_{rs}^0 = 0, \text{ quels que soient } r \text{ et } s;$$

et *est, en même temps, une arête double pour le cône $v(x_1, x_2, x_3)$*; c. à. d. que

$$(77.)_4 \qquad v_1^0 = 0, \quad v_2^0 = 0, \quad v_3^0 = 0, \quad \text{d'où} \quad v^0 = 0.$$

24. Les relations des n°s 21 et 22 sont applicables à ce cas; les formules (18.) nous donnent en outre, d'après (77.):

$$(78.)_4 \qquad \left(\frac{\partial^3 G_r}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}\right)_0 = 0;$$

et on conclut immédiatement de l'identité (33.), après l'avoir différentiée,

$$\left(\frac{\partial^3 F}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}\right)_0 = 0;$$

c. à. d. que la droite (x_1^0, x_2^0, x_3^0) est une arête quadruple pour le cône F. Donc

Les deux cônes $F(x_1, x_2, x_3)$ et $u(x_1, x_2, x_3)$ ont en commun douze arêtes coincidant avec la génératrice (x_1^0, x_2^0, x_3^0).

IV°. Conclusion générale.

25. Nous venons donc de démontrer que, lorsque la surface U possède un point double à l'infini, les deux cônes (30.) et (30bis.)

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad u(x_1, x_2, x_3) = 0$$

ont en commun, en général, *six* arêtes coincidant avec la direction asymptotique (x_1^0, x_2^0, x_3^0) correspondant au point double. Lorsque l'arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0) est triple pour le cône $u(x_1, x_2, x_3) = 0$, les deux cônes auront en commun *neuf* ou *douze* arêtes coincidant avec l'arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0), suivant que cette droite est une arête simple ou une arête double du cône $v(x_1, x_2, x_3) = 0$. On sait d'ailleurs que les solutions communes à ces deux cônes déterminent tous les points en lesquels la surface asymptote est rencontrée par une droite quelconque, et font, par suite, connaître *l'ordre* de cette développable.

Or, pour $(x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0, x_3 = x_3^0)$, les équations (10.) §. I de la génératrice (δ) correspondant à cette direction asymptotique se réduisent à des identités, puisque les quantités H et G, sont nulles; il n'y a plus, en effet, de plan asymptote, il n'y a plus de génératrice (δ) correspondant à la direction asymptotique (x_1^0, x_2^0, x_3^0).

Par conséquent, le nombre des génératrices (δ), rencontrées par la droite arbitrairement choisie, sera égal au nombre des arêtes communes aux deux cônes $F(x_1, x_2, x_3)$, $u(x_1, x_2, x_3)$ et distinctes de l'arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0); c. à. d. égal à

$$[m(3m-5)-6], \text{ ou } [m(3m-5)-9], \text{ ou } [m(3m-5)-12]$$

suivant que la direction asymptotique (x_1^0, x_2^0, x_3^0), qui détermine le point double, est une arête double du cône $u(x_1, x_2, x_3)$; ou, une arête triple pour le cône $u(x_1, x_2, x_3)$ et une arête simple pour le cône $v(x_1, x_2, x_3)$; ou, une arête triple pour le cône u et une arête double pour le cône v.

Donc

26. *Lorsque la surface U a un point double à l'infini, l'ordre*

$$N = m(3m-5)$$

de la surface asymptote est diminué, en général, de six unités. Lorsque la direction asymptotique, correspondant au point double, est une arête triple du cône φ_m, *la diminution sera de neuf ou de douze unités suivant que cette direction sera une arête simple ou une arête double pour le cône* φ_{m-1}.

Ces derniers cas se présenteront respectivement lorsque le cylindre asymptote, correspondant au point double, se réduira à deux plans dont un à l'infini, ou à deux plans à l'infini [n°s 25 et 26, 1ère partie].

---

§. III.

Recherche des directions asymptotiques de la surface asymptote.

27. Pour les recherches qui nous restent à faire, nous nous placerons dans le cas général où la surface proposée U n'a pas de points multiples à l'infini.

Nous compléterons d'abord l'étude précédente en cherchant à déterminer l'influence des arêtes doubles du cône des directions asymptotiques sur l'ordre de la surface asymptote, en supposant toujours que ces arêtes doubles ne correspondent pas à des points doubles à l'infini sur la surface U, c. à. d. que cette génératrice du cône $u(x_1, x_2, x_3)$ n'appartient pas au cône $v(x_1, x_2, x_3)$.

I°. Influence des arêtes doubles du cône des directions asymptotiques.

28. Considérons une arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0) que nous supposerons double pour le cône $u(x_1, x_2, x_3) = 0$, c. à. d. que

$$(79.)\qquad u_1^0 = 0,\quad u_2^0 = 0,\quad u_3^0 = 0,\quad \text{d'où}\quad u^0 = 0;$$

et admettons, en outre, que cette arête n'appartient pas au cône $v(x_1, x_2, x_3) = 0$, c. à. d. que

$$v^0 \gtrless 0.$$

Nous aurons à examiner deux cas: la droite (x_1^0, x_2^0, x_3^0) est une arête double ordinaire du cône $u(x_1, x_2, x_3)$, ou elle en est une arête de rebroussement.

Premier cas.

29. *La direction asymptotique* (x_1^0, x_2^0, x_3^0) *est une arête double du cône* $u(x_1, x_2, x_3)$, c. à. d. que

$$(80.)\quad \begin{cases} u_1^0 = 0, \quad u_2^0 = 0, \quad u_3^0 = 0, \quad \text{d'où} \quad u^0 = 0, \\ \text{et} \qquad\qquad H_{rs}^0 \gtrless 0. \end{cases}$$

Les relations du n°. 15. sont applicables à ce cas. D'après (35.), les valeurs (15.) des G_r sont

$$(81.)\qquad (G_r)_0 = \lambda_r (m-1) v^0;$$

et, eu égard à ces valeurs et à la relation (34.), l'équation du cône (30.) devient

$$F(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = \begin{vmatrix} a_1 & x_1^0 & \lambda_1 \\ a_2 & x_2^0 & \lambda_2 \\ a_3 & x_3^0 & \lambda_3 \end{vmatrix} (m-1) v^0 = 0,$$

$$\text{car} \quad \lambda_r = \omega x_r^0;$$

donc le cône $F(x_1, x_2, x_3)$ passe par l'arête double (x_1^0, x_2^0, x_3^0). Nous calculerons plus loin les $\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_0$ et nous constaterons que leur valeurs sont différentes de zéro. Ainsi

Les cônes $F(x_1, x_2, x_3)$ *et* $u(x_1, x_2, x_3)$ *ont en commun deux arêtes coïncidant avec l'arête* (x_1^0, x_2^0, x_3^0).

Deuxième cas.

30. *La direction asymptotique* (x_1^0, x_2^0, x_3^0) *est une arête double de rebroussement pour le cône* $u(x_1, x_2, x_3)$; c. à. d. que

$$(82.)\quad \begin{cases} u_1^0 = 0, \quad u_2^0 = 0, \quad u_3^0 = 0, \quad \text{d'où} \quad u^0 = 0, \\ \text{et } H_{rs}^0 = 0, \text{ quels que soient } r \text{ et } s; \text{ d'où } H^0 = 0. \end{cases}$$

Les relations du n°. 18 sont applicables à ce cas. D'après (45.), les valeurs des G_r sont

$$(83.)\qquad G_r = 0;$$

il en résulte immédiatement $F^0 = 0$. On a, en outre, (20.)

$$(84.)\quad \begin{cases} \left(x_2 \frac{\partial G_3}{\partial x_i} - x_3 \frac{\partial G_2}{\partial x_i}\right)_0 = \left[\sum^n v_n \left(x_2 \frac{\partial H_{3n}}{\partial x_i} - x_3 \frac{\partial H_{2n}}{\partial x_i}\right)\right]_0 \\ \text{d'après (53.)} \qquad = \left[\sum^n \frac{v_n A_{ni}}{m-2} (x_2^0 x_3^0 - x_3^0 x_2^0)\right] = 0; \end{cases}$$

alors, eu égard aux relations (49.) et (84.), la formule (32.) donne

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_0 = 0.$$

Donc, la droite (x_1^0, x_2^0, x_3^0) est une arête double pour le cône $F(x_1, x_2, x_3) = 0$. Nous calculerons plus loin les $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0$ et nous constaterons que leurs valeurs sont différentes de zéro. Ainsi *les cônes* $F(x_1, x_2, x_3)$ *et* $u(x_1, x_2, x_3)$ *ont en commun quatre arêtes coincidant avec la droite* (x_1^0, x_2^0, x_3^0).

Conclusion.

31. Dans l'hypothèse actuelle $H^0 = 0$; par suite, les équations (10.) §. 1 de la génératrice (δ) se réduisent à la seule équation

$$t = 0,$$

laquelle représente le plan à l'infini; c. à. d. que le point d'intersection (correspondant à la solution x_1^0, x_2^0, x_3^0) de la droite arbitrairement choisie avec la surface asymptote se trouve sur une droite à l'infini. Donc une droite *quelconque* rencontre la surface asymptote en *deux* points ou *quatre* points coincidants et situés sur le plan à l'infini, suivant que la direction asymptotique considérée est une arête double ou une arête de rebroussement du cône $u(x_1, x_2, x_3)$; par suite, le plan à l'infini fait partie de la surface asymptote. Il reste donc

$$[m(3m-5)-2] \quad \text{ou} \quad [m(3m-5)-4]$$

génératrices proprement dites rencontrées par une droite arbitrairement choisie.

Ainsi:

Lorsque le cône (u ou φ_m) possède une arête double ou une arête de rebroussement ne correspondant pas à un point double à l'infini de la surface U, l'ordre de la développable asymptote se trouve diminué de deux ou quatre unités, si l'on fait abstraction du plan à l'infini.

II°. Recherche des directions asymptotiques.

32. Les points à l'infini sur la surface asymptote ne peuvent provenir que des points situés à l'infini sur ses génératrices à distance finie, ou des points sur les génératrices à l'infini, lesquelles correspondent aux arêtes d'inflexion du cône $u(x_1, x_2, x_3)$ ou à ses arêtes doubles, car dans ce second cas le plan asymptote est à l'infini.

Les génératrices du cône des directions asymptotiques de la surface proposée U fournissent un *premier système* de directions asymptotiques pour

la surface asymptote; car à une arête du cône $u(x_1, x_2, x_3)$ correspond une génératrice parallèle de la surface asymptote et une seule.

Mais l'étude des arêtes d'inflexion et des arêtes doubles du cône $u(x_1, x_2, x_3)$ ou φ_m va nous permettre de constater l'existence d'autres systèmes de directions asymptotiques pour la surface asymptote.

Premier cas. Arêtes d'inflexion.

33. Supposons que la droite (x_1^0, x_2^0, x_3^0) soit une arête d'inflexion du cône $u(x_1, x_2, x_3)$, de sorte que

$$(85.)\quad u(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = 0 \quad \text{et} \quad H^0 = 0.$$

Cherchons l'intersection de la surface asymptote par une *droite quelconque parallèle à l'arête d'inflexion* (x_1^0, x_2^0, x_3^0), savoir (A_1, A_2, A_3 étant des constantes arbitraires)

$$(86.)\quad \frac{x_1 - A_1 t}{x_1^0} = \frac{x_2 - A_2 t}{x_2^0} = \frac{x_3 - A_3 t}{x_3^0}.$$

Le nombre des génératrices (δ) rencontrées par cette droite sera égal au nombre des arêtes communes aux deux cônes

$$(87.)\quad F_1(x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} x_1^0 & x_1 & G_1 + A_1 H \\ x_2^0 & x_2 & G_2 + A_2 H \\ x_3^0 & x_3 & G_3 + A_3 H \end{vmatrix} = 0, \qquad (87^{\text{bis}}.)\quad u(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Nous allons donner de suite les développements de la fonction F et de ses dérivées, développements qui nous seront utiles pour ce cas et les suivants. On a d'abord

$$(87.)\quad F_1 = (x_2^0 x_3 - x_3^0 x_2)(G_1 + A_1 H) + (x_3^0 x_1 - x_1^0 x_3)(G_2 + A_2 H) + (x_1^0 x_2 - x_2^0 x_1)(G_3 + A_3 H).$$

Posons

$$(88.)\quad \begin{cases} x_2^0 G_3 - x_3^0 G_2 = E_1, \\ x_3^0 G_1 - x_1^0 G_3 = E_2, \\ x_1^0 G_2 - x_2^0 G_1 = E_3, \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta_1 = x_2^0 A_3 - x_3^0 A_2, \\ \beta_2 = x_3^0 A_1 - x_1^0 A_3, \\ \beta_3 = x_1^0 A_2 - x_2^0 A_1; \end{cases}$$

on aura alors

$$(89.)\quad \frac{\partial F_1}{\partial x_i} = \mathsf{S}(x_2^0 x_3 - x_3^0 x_2)\left(\frac{\partial G_1}{\partial x_i} + A_1 \frac{\partial H}{\partial x_i}\right) - E_i - \beta_i H,$$

puis:

$$(90.)\quad \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_i \partial x_j} = \begin{Bmatrix} \mathsf{S}(x_2^0 x_3 - x_3^0 x_2)\left(\dfrac{\partial^2 G_1}{\partial x_i \partial x_j} + A_1 \dfrac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j}\right) \\ -\dfrac{\partial E_j}{\partial x_i} - \dfrac{\partial E_i}{\partial x_j} - \beta_j \dfrac{\partial H}{\partial x_i} - \beta_i \dfrac{\partial H}{\partial x_j} \end{Bmatrix};$$

et enfin

$$(91.)\quad \left\{\begin{array}{c} \dfrac{\partial^3 F_1}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = \\ \mathrm{S}(x_2^0 x_3 - x_3^0 x_2)\Big(\dfrac{\partial^3 G_1}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} + A_1 \dfrac{\partial^3 H}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}\Big) \\ -\dfrac{\partial^2 E_k}{\partial x_i \partial x_j} - \dfrac{\partial^2 E_i}{\partial x_j \partial x_k} - \dfrac{\partial^2 E_j}{\partial x_i \partial x_k} - \beta_k \dfrac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} - \beta_i \dfrac{\partial^2 H}{\partial x_j \partial x_k} - \beta_j \dfrac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_k}. \end{array}\right.$$

34. Revenons à la question. Il est d'abord visible que l'arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0) appartient au cône (87.) $F_1(x_1, x_2, x_3) = 0$.

Nous allons démontrer, en outre, que les deux cônes F_1 et u se touchent suivant cette génératrice commune.

En effet, faisant $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$, $x_3 = x_3^0$, et ayant égard aux relations (85.), les équations (88.) et (89.) donnent, par exemple,

$$\Big(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\Big)_0 = x_2^0 G_3^0 - x_3^0 G_2^0.$$

Or l'identité (12.) §. I. et la 1ère des relations (85.) donnent

$$\left\{\begin{array}{l} u_1^0 G_1^0 + u_2^0 G_2^0 + u_3^0 G_3^0 = 0, \\ u_1^0 x_1^0 + u_2^0 x_2^0 + u_3^0 x_3^0 = 0. \end{array}\right.$$

Par l'élimination successive de u_1^0, u_2^0, u_3^0 ces deux égalités conduisent à

$$\frac{x_2^0 G_3^0 - x_3^0 G_2^0}{u_1^0} = \frac{x_3^0 G_1^0 - x_1^0 G_3^0}{u_2^0} = \frac{x_1^0 G_2^0 - x_2^0 G_1^0}{u_3^0}.$$

D'après ces dernières relations et les valeurs ci-dessus des $\Big(\frac{\partial F_1}{\partial x_i}\Big)_0$, on voit que l'équation

$$x_1\Big(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\Big)_0 + x_2\Big(\frac{\partial F_1}{\partial x_2}\Big)_0 + x_3\Big(\frac{\partial F_1}{\partial x_3}\Big)_0 = 0$$

du plan tangent au cône $F_1(x_1, x_2, x_3)$ suivant l'arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0) devient

$$x_1 u_1^0 + x_2 u_2^0 + x_3 u_3^0 = 0;$$

c'est précisément l'équation du plan tangent au cône $u(x_1, x_2, x_3)$ suivant cette même arête.

Les deux cônes (87.) ont donc en commun l'arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0) et se touchent suivant cette arête; par suite, ils n'auront plus en commun que $[m(3m-5)-2]$ autres arêtes distinctes de l'arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0); mais, à une arête d'inflexion correspond, en général, pour la surface asymptote une *droite à l'infini* dans le plan asymptote parallèle au plan d'inflexion du cône $u(x_1, x_2, x_3)$.

Par conséquent: *Une droite quelconque parallèle à une arête d'inflexion* (x_1^0, x_2^0, x_3^0) *du cône des directions asymptotiques, c. à d. passant par le point à l'infini*

$$\text{(I.)} \qquad \frac{x_1}{x_1^0} = \frac{x_2}{x_2^0} = \frac{x_3}{x_3^0}, \qquad t = 0,$$

ne rencontre plus la surface asymptote qu'en $[m(3m-5)-2]$ *points distincts du point où elle rencontre la génératrice à l'infini; par suite, elle rencontre cette génératrice à l'infini en deux points coincidents; donc le point I à l'infini est un point double de la surface asymptote.*

Nous ferons plus loin quelques remarques relatives au cas où la génératrice (δ), correspondant à une arête d'inflexion, est à distance finie.

35. Imaginons maintenant une droite quelconque

$$\frac{x_1 - A_1 t}{a_1} = \frac{x_2 - A_2 t}{a_2} = \frac{x_3 - A_3 t}{a_3},$$

située dans le plan asymptote

$$x_1 u_1^0 + x_2 u_2^0 + x_3 u_3^0 + t v(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = 0,$$

qui correspond à l'arête d'inflexion (x_1^0, x_2^0, x_3^0); de sorte qu'on a les relations

$$\text{(92.)} \qquad \begin{cases} u(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = 0, \quad H^0 = 0; \\ a_1 u_1^0 + a_2 u_2^0 + a_3 u_3^0 = 0; \\ A_1 u_1^0 + A_2 u_2^0 + A_3 u_3^0 + v^0 = 0. \end{cases}$$

Le nombre des génératrices de la surface asymptote rencontrées par la droite en question sera égal au nombre des arêtes communes aux deux cônes

$$F(x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} a_1 & x_1 & G_1 + A_1 H \\ a_2 & x_2 & G_2 + A_2 H \\ a_3 & x_3 & G_3 + A_3 H \end{vmatrix} = 0, \qquad u(x_1, x_2, x_3) = 0;$$

équations dont la forme est identique à celle des équations (30.).

Ces deux cônes ont en commun l'arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0); car si, après avoir remplacé x_1, x_2, x_3 par x_1^0, x_2^0, x_3^0 dans l'équation du cône F, on multiplie les colonnes du déterminant respectivement par u_1^0, u_2^0, u_3^0, et qu'on les ajoute en ayant égard aux relations (12.) §. I. et (92.), il vient

$$\begin{vmatrix} a_1 & x_1^0 & G_1^0 + A_1 H^0 \\ a_2 & x_2^0 & G_2^0 + A_2 H^0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

quantité évidemment nulle.

Cherchons maintenant le plan tangent au cône $F(x_1, x_2, x_3)$ suivant l'arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0). L'équation (32.) donne, en y supposant $x_i = x_i^0$ et en tenant compte des premières relations (92.),

$$\text{(I.)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_0 = \\ \left(\frac{\partial G_1}{\partial x_1}\right)_0 (a_2 x_3^0 - a_3 x_2^0) + \left(\frac{\partial G_2}{\partial x_1}\right)_0 (a_3 x_1^0 - a_1 x_3^0) + \left(\frac{\partial G_3}{\partial x_1}\right)_0 (a_1 x_2^0 - a_2 x_1^0) + \\ (a_3 G_2^0 - a_2 G_3^0) + \left(\frac{\partial H}{\partial x_1}\right)_0 [A_1 (a_2 x_3^0 - a_3 x_2^0) + A_2 (a_3 x_1^0 - a_1 x_3^0) + A_3 (a_1 x_2^0 - a_2 x_1^0)]. \end{array} \right.$$

Or, des égalités (92.)

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 u_1^0 + a_2 u_2^0 + a_3 u_3^0 = 0, \\ x_1^0 u_1^0 + x_2^0 u_2^0 + x_3^0 u_3^0 = u^0 = 0, \end{array} \right.$$

on conclut, en éliminant alternativement u_1^0, u_2^0, u_3^0:

$$\text{(93.)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{a_2 x_3^0 - a_3 x_2^0}{u_1^0} = \frac{a_3 x_1^0 - a_1 x_3^0}{u_2^0} = \frac{a_1 x_2^0 - a_2 x_1^0}{u_3^0} = \\ \frac{A_1 (a_2 x_3^0 - a_3 x_2^0) + A_2 (a_3 x_1^0 - a_1 x_3^0) + A_3 (a_1 x_2^0 - a_2 x_1^0)}{A_1 u_1^0 + A_2 u_2^0 + A_3 u_3^0} = g. \end{array} \right.$$

D'après cela, eu égard à la 3ème des relations (92.), la valeur de $\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_0$ devient

$$\text{(94.)} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_0 = (a_3 G_2^0 - a_2 G_3^0) + g\left[u_1^0 \left(\frac{\partial G_1}{\partial x_1}\right)_0 + u_2^0 \left(\frac{\partial G_2}{\partial x_1}\right)_0 + u_3^0 \left(\frac{\partial G_3}{\partial x_1}\right)_0 - v^0 \left(\frac{\partial H}{\partial x_1}\right)_0\right].$$

Mais les 1ères des relations (92.) et l'identité (12.) §. I. donnent encore

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1^0 G_1^0 + u_2^0 G_2^0 + u_3^0 G_3^0 = 0, \\ u_1^0 a_1 + u_2^0 a_2 + u_3^0 a_3 = 0; \end{array} \right.$$

d'où l'on conclut

$$\text{(95.)} \quad \frac{a_3 G_2^0 - a_2 G_3^0}{u_1^0} = \frac{a_1 G_3^0 - a_3 G_1^0}{u_2^0} = \frac{a_2 G_1^0 - a_1 G_2^0}{u_3^0} = g'.$$

D'un autre côté, si, dans les équations (16.), on fait $r = 1, 2, 3$, puis $x_i = x_i^0$ qu'on ajoute après avoir multiplié respectivement par u_1^0, u_2^0, u_3^0, en tenant compte des identités (7.) et des 1ères relations (92.), on trouve

$$u_1^0 \left(\frac{\partial G_1}{\partial x_i}\right)_0 + u_2^0 \left(\frac{\partial G_2}{\partial x_i}\right)_0 + u_3^0 \left(\frac{\partial G_3}{\partial x_i}\right)_0 = \left[\sum^{n} v_n \left(u_1 \frac{\partial H_{n1}}{\partial x_i} + u_2 \frac{\partial H_{n2}}{\partial x_i} + u_3 \frac{\partial H_{n3}}{\partial x_i}\right)\right]_0;$$

égalité qui, d'après les identités (8.) et les 1ères des relations (92.), devient:

$$u_1^0 \left(\frac{\partial G_1}{\partial x_i}\right)_0 + u_2^0 \left(\frac{\partial G_2}{\partial x_i}\right)_0 + u_3^0 \left(\frac{\partial G_3}{\partial x_i}\right)_0 = \frac{1}{m-1} \left(\sum^{n} v_n x_n \frac{\partial H}{\partial x_i}\right)_0,$$

ou enfin

$$(96.)\qquad u_1^0\Big(\frac{\partial G_1}{\partial x_i}\Big)_0+u_2^0\Big(\frac{\partial G_2}{\partial x_i}\Big)_0+u_3^0\Big(\frac{\partial G_3}{\partial x_i}\Big)_0 = v^0\Big(\frac{\partial H}{\partial x_i}\Big)_0.$$

En vertu des relations (96.) et (95.), la valeur (94.) de $\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)$ sera en définitive

$$\Big(\frac{\partial F}{\partial x_1}\Big)_0 = g'.u_1^0.$$

D'après cela, le plan tangent au cône $F(x_1, x_2, x_3)=0$ suivant l'arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0) sera

$$x_1u_1^0+x_2u_2^0+x_3u_3^0 = 0;$$

les deux cônes $F(x_1, x_2, x_3)$ et $u(x_1, x_2, x_3)$ se touchent donc suivant cette arête; par conséquent, ils n'auront plus en commun que $[m(3m-5)-2]$ autres arêtes.

De là nous concluons que

Une droite, dirigée d'une manière quelconque dans le plan asymptote

$$(P)\qquad x_1u_1^0+x_2u_2^0+x_3u_3^0+tv^0 = 0$$

correspondant à une arête d'inflexion du cône des directions asymptotiques, rencontre la surface asymptote en deux points coincidents sur la droite à l'infini située dans le plan (P); le plan (P) touche donc la développable asymptote tout le long de la droite à l'infini

$$x_1u_1^0+x_2u_2^0+x_3u_3^0+tv^0 = 0,\quad t=0.$$

J'ajoute que *cette droite à l'infini n'est pas, en général, une droite double de la surface asymptote.*

Car, pour qu'il en fût ainsi, il faudrait qu'une droite quelconque *parallèle* au plan (*P*) (et non pas seulement située dans le plan *P*) rencontrât la surface en deux points coincidents. Or, dans cette hypothèse, la 3ème des relations (92.) n'aurait plus lieu; et, eu égard aux relations (93.) et (95.), la valeur (I.) de $\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_0$ prendrait la forme

$$\Big(\frac{\partial F}{\partial x_1}\Big)_0 = g'u_1^0+g\Big[v^0\Big(\frac{\partial H}{\partial x_1}\Big)_0+\Big(\frac{\partial H}{\partial x_1}\Big)_0(u_1^0A_1+u_2^0A_2+u_3^0A_3)\Big].$$

Les constantes A_1, A_2, A_3 étant complètement arbitraires, le second membre ne peut pas se réduire à son premier terme, puisque les u_i ne sont pas nuls.

36. Remarque. Dans une analyse précédente nos 29., 30. et 31. nous avons admis, pour tirer nos conclusions, que la génératrice (δ) de la surface asymptote, correspondant à une arête d'inflexion, se *trouvait à l'infini;* c'est, en effet, le cas général. Mais il peut arriver, dans des circonstances

tout-à-fait particulières, que la génératrice (δ), tout en restant parallèle à la direction asymptotique considerée (x_1^0, x_2^0, x_3^0) et dans le plan asymptote (P) correspondant à cette direction, se *trouve à distance finie.*

Dans le cas général, nous avons pu conclure que le plan (P) était tangent à la surface asymptote tout le long d'une droite à l'infini située dans ce plan; et, par suite, *une droite quelconque parallèle à ce plan sera une direction asymptotique de la surface asymptote,* puisque cette droite passe par un point à l'infini situé sur la surface asymptote.

Mais, dans le cas exceptionnel où la génératrice (δ) est à distance finie, le plan (P) ne touche plus la surface asymptote qu'au point à l'infini situé sur la génératrice (δ): et, par suite, il n'y a pas d'autre direction asymptotique que l'arête d'inflexion correspondante (x_1^0, x_2^0, x_3^0).

Si nous considérons les équations (10.) §. I. d'une génératrice (δ) de la surface asymptote,

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{H_0 x_1 + G_1^0 t}{x_1^0} = \dfrac{H_0 x_2 + G_2^0 t}{x_2^0} = \dfrac{H_0 x_3 + G_3^0 t}{x_3^0}, \qquad u^0 = 0, \\ x_1 u_1^0 + x_2 u_2^0 + x_3 u_3^0 + t v^0 = 0; \end{array}\right.$$

on voit que, pour une solution (x_1^0, x_2^0, x_3^0) du système

$$H(x_1, x_2, x_3) = 0, \qquad u(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

les équations précédentes donneront une droite à l'infini, tant qu'une des quantités x_1^0, x_2^0, x_3^0 ne sera pas nulle.

Si l'on suppose, par exemple, $x_3^0 = 0$, les équations précédentes donneraient une droite à distance finie, si les fonctions H, G_1, G_2, G_3 étaient de la forme

$$H = H' x_3, \quad G_1 = G_1' x_3, \quad G_2 = G_2' x_3, \quad G_3 = G_3' x_3;$$

et alors, aux arêtes d'inflexion fournies par les équations

$$x_3 = 0, \qquad u(x_1, x_2, 0) = 0,$$

correspondraient, sur la surface asymptote, les m génératrices à distance finie

$$\left\{\begin{array}{l} H_0' x_3 + G_3'^0 t = 0, \\ x_1 u_1^0 + x_2 u_2^0 + x_3 u_3^0 + t v^0 = 0; \end{array}\right.$$

équations dans lesquelles l'indice 0 indique la substitution des valeurs $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$, $x_3 = 0$.

Deuxième cas. Arêtes doubles.

37. Nous allons étudier, au même point de vue, les arêtes doubles du cône $u(x_1, x_2, x_3)$. Remarquons néanmoins que la présence des arêtes doubles est un fait particulier, elle n'a pas lieu dans le cas général.

Supposons que (x_1^0, x_2^0, x_3^0) soit une arête double ordinaire du cône $u(x_1, x_2, x_3)$; les relations du n°. 15 seront applicables à ce cas.

Cherchons l'intersection de la surface asymptote par une droite *quelconque* parallèle à l'arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0); le nombre des points d'intersection sera égal au nombre des arêtes communes aux deux cônes (87.) c. à. d. F_1 et u.

L'équation (87.) est évidemment vérifiée lorsqu'on y suppose $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$, $x_3 = x_3^0$; les deux cônes ont donc en commun l'arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0).

Eu égard aux relations (35.), les valeurs (15.) des G_r prennent la forme

$$(97.)\qquad G_r = \lambda_r(m-1)v^0, \quad \text{et} \quad \lambda_r = \omega x_r^0.$$

Par suite, les E_i (88.) sont nuls; et alors d'après (34.), les formules (89.) donnent

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_i}\right) = 0;$$

donc l'arête considérée est aussi double pour le cône $F_1(x_1, x_2, x_3) = 0$.

En vertu des relations (36.), les valeurs (90.) des $\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ (pour $x_i = x_i^0$) se reduisent à

$$\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0 = -\left(\frac{\partial E_i}{\partial x_j} + \frac{\partial E_j}{\partial x_i}\right)_0.$$

Or, d'après (35.), les valeurs (16.) deviennent

$$(97^{\text{bis}}.)\qquad \left(\frac{\partial G_r}{\partial x_i}\right)_0 = (m-2)\lambda_r v_i^0 + \left(\sum^n v_n \frac{\partial H_{rn}}{\partial x_i}\right)_0.$$

On aura donc, par exemple, en se rappelant que $\lambda_r = \omega x_r^0$,

$$\left(\frac{\partial E_1}{\partial x_i}\right)_0 = x_2^0\left(\frac{\partial G_3}{\partial x_i}\right)_0 - x_3^0\left(\frac{\partial G_2}{\partial x_i}\right)_0 = \sum^n v_n^0\left[x_2^0\left(\frac{\partial H_{3n}}{\partial x_i}\right)_0 - x_3^0\left(\frac{\partial H_{2n}}{\partial x_i}\right)_0\right].$$

Si maintenant, on tient compte des relations (39.), on conclura de la:

$$(98.)\qquad \begin{cases} \left(\frac{\partial E_i}{\partial x_i}\right)_0 = 0, \\ \left(\frac{\partial E_i}{\partial x_j} + \frac{\partial E_j}{\partial x_i}\right)_0 = 0; \end{cases}$$

ainsi

$$\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0 = 0.$$

L'arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0) est donc une arête triple pour le cône $F(x_1, x_2, x_3) = 0$; elle est, en même temps, une arête double pour le cône $u(x_1, x_2, x_3) = 0$. Par conséquent

Les deux cônes (87.) F_1 *et* u *ont en commun six arêtes coincidant avec l'arête* (x_1^0, x_2^0, x_3^0).

38. D'après les calculs faits dans le n°. 29, on a conclu qu'une *droite tout-à-fait arbitraire* rencontrait la surface asymptote en deux points à l'infini, et, par suite, le plan à l'infini fait partie de la surface; c. à. d. que l'ordre de la surface asymptote se trouve diminué de deux unités, si l'on fait abstraction du plan à l'infini.

Or, il résulte du calcul précédent qu'une *droite quelconque parallèle à l'arête double* (x_1^0, x_2^0, x_3^0) rencontre la surface asymptote en *six* points à l'infini; et, si l'on fait abstraction du plan à l'infini qui donne *deux* points pour une droite quelconque, on en conclut que

Une droite quelconque parallèle à l'arête double (x_1^0, x_2^0, x_3^0) *du cône* $u(x_1, x_2, x_3)$ *rencontre la surface asymptote en quatre points coincidents à l'infini; le point à l'infini correspondant est donc un point quadruple pour la surface asymptote.*

39. Lorsque l'arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0) est une arête double du cône $u(x_1, x_2, x_3)$, nous avons vu n°. 29 que, si l'on cherche les intersections de la surface asymptote avec *une droite tout-à-fait arbitraire*, les deux cônes $F(x_1, x_2, x_3)$ et $u(x_1, x_2, x_3)$ (30.) ont en commun deux arêtes coincidant avec la génératrice (x_1^0, x_2^0, x_3^0); car cette droite est une arête double pour le cône $u(x_1, x_2, x_3)$ et simple pour le cône $F(x_1, x_2, x_3)$. Nous allons maintenant étudier le cas où *la droite est parallèle à l'un des plans tangents* au cône $u(x_1, x_2, x_3)$.

Nous complèterons d'abord l'analyse du n°. 29, en calculant, pour ce cas, les valeurs des $\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)$ (32.).

D'après les valeurs (96.) et (97.), et la relation $\lambda_r = \omega x_r^0$, on a, par exemple,

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_0 = \mathfrak{S}\, a_1 \left[\sum^{n} v_n \left(x_2 \frac{\partial H_{3n}}{\partial x_1} - x_3 \frac{\partial H_{2n}}{\partial x_1}\right)\right]_0 - (m-1)\,\omega v^0 (a_2 x_3^0 - a_3 x_2^0);$$

et, si l'on a égard aux relations (39.), on trouvera, après quelques réductions faciles:

$$(99.)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_0 = (m-1)^2 \omega v^0 (a_3 x_2^0 - a_2 x_3^0), \\ \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)_0 = (m-1)^2 \omega v^0 (a_1 x_3^0 - a_3 x_1^0), \\ \left(\frac{\partial F}{\partial x_3}\right)_0 = (m-1)^2 \omega v^0 (a_2 x_1^0 - a_1 x_2^0). \end{cases}$$

Considérons maintenant l'équation des plans tangents au cône $u(x_1, x_2, x_3)$ suivant l'arête double (x_1^0, x_2^0, x_3^0), cette équation est

$$(Q) \qquad x_1^2 u_{11}^0 + x_2^2 u_{22}^0 + x_3^2 u_{33}^0 + 2x_2 x_3 u_{23}^0 + 2x_3 x_1 u_{31}^0 + 2x_1 x_2 u_{12}^0 = 0.$$

L'équation du plan tangent au cône F ou (30.) suivant cette même arête est

$$x_1\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_0 + x_2\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)_0 + x_3\left(\frac{\partial F}{\partial x_3}\right)_0 = 0$$

ou, d'après les valeurs (99.):

$$(T) \qquad x_1(a_3 x_2^0 - a_2 x_3^0) + x_2(a_1 x_3^0 - a_3 x_1^0) + x_3(a_2 x_1^0 - a_1 x_2^0) = 0.$$

Or, si l'on suppose la droite (29.) parallèle à un des plans Q, le plan tangent au cône $F(x_1, x_2, x_3)$ suivant l'arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0) se confondra avec ce plan Q.

En effet, eu égard aux relations (35.), l'équation des plans Q peut s'écrire

$$(u_{11}^0 x_1 + u_{12}^0 x_2 + u_{13}^0 x_3)^2 + \omega(x_3^0 x_2 - x_2^0 x_3)^2 = 0.$$

Considérons, par exemple, le plan

$$(Q'.) \qquad u_{11}^0 x_1 + (u_{12}^0 + x_3^0\sqrt{-\omega})x_2 + (u_{13}^0 - x_2^0\sqrt{-\omega})x_3 = 0;$$

et supposons que la droite de direction (a_1, a_2, a_3) soit parallèle à ce plan; on aura

$$a_1 u_{11}^0 + a_2(u_{12}^0 + x_3^0\sqrt{-\omega}) + a_3(u_{13}^0 - x_2^0\sqrt{-\omega}) = 0;$$

on a, en outre,

$$x_1^0 u_{11}^0 + x_2^0 u_{12}^0 + x_3^0 u_{13}^0 = u_1^0 = 0,$$

puisque l'arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0) est une arête double.

Ces deux dernières égalités pourront s'écrire:

$$\begin{cases} a_1 u_{11}^0 + a_2 u_{12}^0 + a_3 u_{13}^0 = \sqrt{-\omega}(a_3 x_2^0 - a_2 x_3^0), \\ x_1^0 u_{11}^0 + x_2^0 u_{12}^0 + x_3^0 u_{13}^0 = 0. \end{cases}$$

Eliminant successivement u_{12}^0, u_{13}^0, on en conclut

$$\begin{cases} \dfrac{u_{12}^0 - x_3^0\sqrt{-\omega}}{u_{11}^0} = \dfrac{a_3 x_1^0 - a_1 x_3^0}{a_2 x_3^0 - a_3 x_2^0}, \\[2ex] \dfrac{u_{13}^0 + x_2^0\sqrt{-\omega}}{u_{11}^0} = \dfrac{a_1 x_2^0 - a_2 x_1^0}{a_2 x_3^0 - a_3 x_2^0}. \end{cases}$$

La substitution de ces valeurs dans l'équation du plan (Q') conduit précisément à l'équation du plan (T).

Donc le plan tangent au cône $F(x_1, x_2, x_3)$ se confond avec un des plans tangents au cône $u(x_1, x_2, x_3)$ suivant l'arête double (x_1^0, x_2^0, x_3^0). Par

conséquent, pour une droite quelconque (a_1, a_2, a_3) parallèle à l'un des plans Q, ces deux cônes ont au moins en commun trois arêtes coïncidant avec l'arête double (x_1^0, x_2^0, x_3^0). Delà nous concluons que:

Une droite quelconque, parallèle à l'un des plans tangents suivant l'arête double (x_1^0, x_2^0, x_3^0), rencontre la surface asymptote au moins en un point à l'infini, si l'on fait abstraction des deux points situés sur le plan à l'infini qui appartient à la surface.

Donc, *lorsque le cône $u(x_1, x_2, x_3)$ ou φ_m possède une arête double, les droites parallèles aux plans tangents à ce cône suivant l'arête double sont des directions asymptotiques de la surface asymptote; cette surface doit, par suite, contenir à l'infini deux droites respectivement situées dans des plans parallèles aux plans tangents suivant l'arête double.*

Troisième cas. Arêtes de rebroussement.

40. Supposons maintenant que (x_1^0, x_2^0, x_3^0) soit une arête double de rebroussement du cône $u(x_1, x_2, x_3)$; les relations du n°. 18 sont applicables à ce cas.

Cherchons l'intersection de la surface asymptote par une droite *quelconque* parallèle à l'arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0); le nombre des points d'intersection sera égal au nombre des arêtes communes aux deux cônes (87.) c. à. d. F_1 et u.

L'équation (87.) est évidemment vérifiée lorsqu'on y suppose $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$, $x_3 = x_3^0$; les deux cônes ont donc en commun l'arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0).

En tenant compte des relations (45.), (53.), (53bis.) les formules (15.) et (16.) donnent

$$(100.)\quad \begin{cases} G_r^0 = 0, \\ \left(\frac{\partial G_r}{\partial x_i}\right)_0 = \frac{m-1}{m-2} A_{ri} v^0. \end{cases}$$

On conclut alors des équations (87.), (88.), (89.), en y introduisant les hypothèses $x_i = x_i^0$,

$$F_1^0 = 0;$$

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_i}\right)_0 = 0;$$

donc l'arête considérée est aussi double pour le cône $F_1(x_1, x_2, x_3) = 0$.

Eu égard aux relations (100.), (49.) et (53bis.) les équations (90.) donnent

$$\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x_i \partial x_j}\right)_0 = 0.$$

La génératrice (x_1^0, x_2^0, x_3^0) est donc une arête triple pour le cône $F_1(x_1, x_2, x_3) = 0$.

Enfin, dans l'hypothèse actuelle, la valeur (91.) de $\partial^3 F_1$ se réduit à

$$\left(\frac{\partial^3 F_1}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}\right)_0 = -\left(\frac{\partial^2 E_k}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial^2 E_j}{\partial x_i \partial x_k}\right)_0;$$

et, en faisant usage des notations (55.), on trouve facilement:

$$(101.)\quad \left(\frac{\partial^3 F}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}\right)_0 = -[\overset{n}{\Sigma} v_n (K^{jk}_{n,i} + K^{ik}_{n,j} + K^{ij}_{n,k})]_0.$$

D'après cette valeur, l'équation des trois plans tangents au cône $F_1(x_1, x_2, x_3)$ suivant l'arête triple (x_1^0, x_2^0, x_3^0) sera

$$(102.)\quad \mathfrak{S}\, x_i x_j x_k \left[\overset{n}{\Sigma} v_n \left(K^{jk}_{n,i} + K^{ik}_{n,j} + K^{ij}_{n,k}\right)\right]_0 = 0.$$

A l'aide des relations établies dans le n°. 18, on peut arriver à transformer le premier membre de cette équation et à mettre en évidence le facteur

$$(x_1 g_1 + x_2 g_2 + x_3 g_3)^2,$$

lequel, égalé à zéro, donne précisément les deux plans tangents confondus au cône $u(x_1, x_2, x_3)$ suivant l'arête de rebroussement (x_1^0, x_2^0, x_3^0). On peut aussi vérifier le fait, et cela très-rapidement, en prenant l'arête de rebroussement pour un des axes de coordonnées et le plan tangent de rebroussement pour un des plans coordonnés; je supprimerai les détails de cette vérification.

Donc l'arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0) est triple pour le cône F_1 et double pour le cône u; en outre, deux des plans tangents au cône F_1 coincident avec les deux plans tangents au cône u; nous conclurons de là que: *Les deux cônes* (87.) *F_1 et u ont en commun huit arêtes coincidant avec la génératrice* (x_1^0, x_2^0, x_3^0).

41. D'après les calculs faits dans le n°. 30, on a conclu qu'une *droite tout-à-fait arbitraire* rencontrait la surface asymptote en quatre points à l'infini; et, par suite, le plan à l'infini fait partie de la surface; c. à. d. que l'ordre de la surface asymptote se trouve diminué de quatre unités, si l'on fait abstraction du plan à l'infini.

Or, il résulte du calcul précédent qu'une *droite quelconque parallèle à l'arête de rebroussement* (x_1^0, x_2^0, x_3^0) rencontre la surface asymptote en *huit* points à l'infini; et, si l'on fait abstraction du plan à l'infini qui donne *quatre* points pour une droite quelconque, on en conclut que

Une droite quelconque parallèle à l'arête de rebroussement (x_1^0, x_2^0, x_3^0) *du cône* $u(x_1, x_2, x_3)$ *rencontre la surface asymptote en quatre points coincidents à l'infini; le point à l'infini correspondant est donc un point quadruple pour la surface asymptote.*

42. Lorsque l'arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0) est une arête de rebroussement du cône $u(x_1, x_2, x_3)$, nous avons vu [n°. 30] que, si l'on cherche les intersections de la surface par *une droite tout-à-fait arbitraire,* les deux cônes (30.) $F(x_1, x_2, x_3)$ et $u(x_1, x_2, x_3)$ ont en commun quatre arêtes coincidant avec la génératrice (x_1^0, x_2^0, x_3^0), car cette droite est une arête double pour les deux cônes $F(x_1, x_2, x_3)$ et $u(x_1, x_2, x_3)$. Nous allons maintenant étudier le cas où *la droite est parallèle au plan de rebroussement* du cône $u(x_1, x_2, x_3) = 0$.

Nous compléterons d'abord l'analyse du n°. 30 en calculant, pour ce cas, les valeurs des $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}$ (33.).

D'aprés les relations (49.), (50.), (21.), (45.), (53.), (53bis.) et (55.), les équations (33.) donnent

$$(103.)\qquad \Big(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\Big)_0 = a_1\big(\overset{n}{\Sigma} v_n K_{n,1}^{ij}\big)_0 + a_2\big(\overset{n}{\Sigma} v_n K_{n,2}^{ij}\big)_0 + a_3\big(\overset{n}{\Sigma} v_n K_{n,3}^{ij}\big)_0 - \Big(\frac{\partial E_i}{\partial x_j} + \frac{\partial E_j}{\partial x_i}\Big)_0.$$

Représentons réspectivement par M_r^{11}, M_r^{22}, M_r^{33}, M_r^{23}, M_r^{31}, M_r^{12}, les valeurs des rapports égaux dans les relations (56.) et (56bis.); puis remplaçons les K_r par leurs valeurs exprimées à l'aide des M_r. Pour calculer $\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}$, par exemple, remarquons qu'on a d'aprés cette nouvelle notation

$$\begin{cases} K_{n,1}^{11} = M_n^{11} g_1, \\ K_{n,2}^{11} = M_n^{11} g_2 - 2x_3^0 A_{n1}, \\ K_{n,3}^{11} = M_n^{11} g_3 + 2x_2^0 A_{n1}; \end{cases}$$

on a en outre, d'aprés (31.), (16.), (53.) et (53bis.)

$$\Big(\frac{\partial E_1}{\partial x_1}\Big)_0 = a_2\Big(\frac{\partial G_3}{\partial x_1}\Big)_0 - a_3\Big(\frac{\partial G_2}{\partial x_1}\Big)_0 = \frac{m-1}{m-2} v^0 \frac{A_{11}}{x_1^0}(a_2 x_3^0 - a_3 x_2^0).$$

La substitution de ces valeurs dans l'égalité (103.), ou l'on fera $i=j$, conduit à

$$(104.)\qquad \begin{cases} \Big(\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}\Big)_0 = (a_1 g_1 + a_2 g_2 + a_3 g_3) \overset{n}{\Sigma} v_n^0 M_n^{11} - 2\frac{(m-1)^2}{m-2} v^0 \cdot \frac{A_{11}}{x_1^0}(a_2 x_3^0 - a_3 x_2^0); \\ \Big(\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}\Big)_0 = (a_1 g_1 + a_2 g_2 + a_3 g_3) \overset{n}{\Sigma} v_n^0 M_n^{22} - 2\frac{(m-1)^2}{m-2} v^0 \cdot \frac{A_{22}}{x_2^0}(a_3 x_1^0 - a_1 x_3^0); \\ \Big(\frac{\partial^2 F}{\partial x_3^2}\Big)_0 = (a_1 g_1 + a_2 g_2 + a_3 g_3) \overset{n}{\Sigma} v_n^0 M_n^{33} - 2\frac{(m-1)^2}{m-2} v^0 \cdot \frac{A_{33}}{x_3^0}(a_1 x_2^0 - a_2 x_1^0); \end{cases}$$

les deux autres valeurs s'obtenant par un calcul semblable.

En se servant des mêmes relations et des mêmes formules on trouvera encore:

$$(104^{\text{bis}}.)\begin{cases}\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2\,\partial x_3}\right)_0 = \\ (a_1g_1+a_2g_2+a_3g_3)\overset{n}{\Sigma}v_n^0M_n^{23}-\dfrac{(m-1)^2}{(m-2)}v^0\left[\dfrac{A_{22}}{x_2^0}(a_1x_2^0-a_2x_1^0)+\dfrac{A_{33}}{x_3^0}(a_3x_1^0-a_1x_3^0)\right]; \\ \left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_3\,\partial x_1}\right)_0 = \\ (a_1g_1+a_2g_2+a_3g_3)\overset{n}{\Sigma}v_n^0M_n^{31}-\dfrac{(m-1)^2}{(m-2)}v^0\left[\dfrac{A_{33}}{x_3^0}(a_2x_3^0-a_3x_2^0)+\dfrac{A_{11}}{x_1^0}(a_1x_2^0-a_2x_1^0)\right]; \\ \left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)_0 = \\ (a_1g_1+a_2g_2+a_3g_3)\overset{n}{\Sigma}v_n^0M_n^{12}-\dfrac{(m-1)^2}{(m-2)}v^0\left[\dfrac{A_{11}}{x_1^0}(a_3x_1^0-a_1x_3^0)+\dfrac{A_{22}}{x_2^0}(a_2x_3^0-a_3x_2^0)\right].\end{cases}$$

Considérons maintenant l'équation du plan tangent au cône $u(x_1, x_2, x_3)$ suivant l'arête de rebroussement (x_1^0, x_2^0, x_3^0); cette équation est

$$(R)\qquad g_1x_1+g_2x_2+g_3x_3 = 0.$$

L'équation des plans tangents au cône F ou (30.) suivant cette même arête est

$$x_1^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}\right)_0+\cdots+2x_2x_3\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_2\,\partial x_3}\right)_0+\cdots = 0,$$

ou d'après les valeurs (104.) et $(104^{\text{bis}}.)$

$$(T)\quad\begin{cases}\dfrac{A_{11}}{x_1^0}\gamma_1x_1^2+\dfrac{A_{22}}{x_2^0}\gamma_2x_2^2+\dfrac{A_{33}}{x_3^0}\gamma_3x_3^2+\left(\dfrac{A_{22}}{x_2^0}\gamma_3+\dfrac{A_{33}}{x_3^0}\gamma_2\right)x_2x_3 \\ \quad+\left(\dfrac{A_{33}}{x_3^0}\gamma_1+\dfrac{A_{11}}{x_1^0}\gamma_3\right)x_1x_3+\left(\dfrac{A_{11}}{x_1^0}\gamma_2+\dfrac{A_{22}}{x_2^0}\gamma_1\right)x_1x_2 \\ \quad-\dfrac{(m-2)}{2v^0(m-1)^2}(a_1g_1+a_2g_2+a_3g_3)\,\mathbf{S}\,x_ix_j(\overset{n}{\Sigma}v_n^0M_n^{ij}) = 0,\end{cases}$$

en posant

$$(105.)\quad\begin{cases}\gamma_1 = a_2x_3^0-a_3x_2^0, \\ \gamma_2 = a_3x_1^0-a_1x_3^0, \\ \gamma_3 = a_1x_2^0-a_2x_1^0.\end{cases}$$

Or si l'on suppose la droite (29.) parallèle au plan (R), un des plans tangents (T) au cône $F(x_1, x_2, x_3)$ suivant l'arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0) se confondra avec le plan (R).

En effet. la droite de direction (a_1, a_2, a_3) devant être parallèle au plan (R), on aura

$$(106.)\qquad a_1g_1+a_2g_2+a_3g_3 = 0;$$

on a en outre, d'après (48.),

$$x_1^0 g_1 + x_2^0 g_2 + x_3^0 g_3 = 0.$$

D'où l'on conclut, en éliminant alternativement les g_i:

$$(107.) \quad \frac{\gamma_1}{g_1} = \frac{\gamma_2}{g_2} = \frac{\gamma_3}{g_3}.$$

Eu égard aux relations (106.) et (107.), l'équation des plans T devient:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{A_{11}}{x_1^0} g_1 x_1^2 + \frac{A_{22}}{x_2^0} g_2 x_2^2 + \frac{A_{33}}{x_3^0} g_3 x_3^2 + \left(\frac{A_{22}}{x_2^0} g_3 + \frac{A_{33}}{x_3^0} g_2\right) x_2 x_3 \\ +\left(\frac{A_{33}}{x_3^0} g_1 + \frac{A_{11}}{x_1^0} g_3\right) x_1 x_3 + \left(\frac{A_{11}}{x_1^0} g_2 + \frac{A_{22}}{x_2^0} g_1\right) x_1 x_2 \end{array}\right\} = 0;$$

équation qui peut s'écrire

$$(g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3)\left(\frac{A_{11}}{x_1^0} x_1 + \frac{A_{22}}{x_2^0} x_2 + \frac{A_{33}}{x_3^0} x_3\right) = 0.$$

Donc un des plans tangents au cône $F(x_1, x_2, x_3)$ se confond avec le plan tangent de rebroussement au cône $u(x_1, x_2, x_3)$ suivant l'arête (x_1^0, x_2^0, x_3^0). Par conséquent, pour une droite quelconque parallèle au plan de rebroussement (R), ces deux cônes ont en commun au moins *cinq* arêtes coincidant avec l'arête double (x_1^0, x_2^0, x_3^0). De là nous concluons que:

Une droite quelconque parallèle au plan tangent de rebroussement rencontre la surface asymptote au moins en un point à l'infini, si l'on fait abstraction des quatre points situés sur le plan à l'infini qui appartient à la surface.

Donc, lorsque le cône $u(x_1, x_2, x_3)$ ou φ_m possède une arête double, les droites parallèles au plan tangent de rebroussement sont des directions asymptotiques de la surface asymptote; cette surface doit, par suite, contenir à l'infini une double droite dans un plan parallèle au plan tangent de rebroussement.

Résumé.

43. Donc, en définitive, les directions asymptotiques de la surface asymptote sont

1°. Les génératrices du cône $u(x_1, x_2, x_3)$ ou $\varphi_m(x, y, z)$;
2°. Des droites quelconques parallèles aux plans tangents d'inflexion du cône φ_m;
3°. Des droites quelconques parallèles aux plans tangents suivant les arêtes doubles, lorsque le cône φ_m possède de telles arêtes.

---

§. IV.

Détermination des termes de degré N et $(N-1)$ dans l'équation de la surface asymptote.

Nous reprendrons, dans ce dernier paragraphe, les notations que nous avions adoptées dans la première partie.

I°. Recherche des termes de degré N et $(N-1)$.

44. Pour déterminer la forme des termes du degré le plus élevé dans l'équation de la surface asymptote, nous nous placerons dans le cas le plus général; c. à. d. que nous supposerons que la surface U n'a pas de points doubles à l'infini; de plus, nous admettrons que le cône $\varphi_m(x, y, z)$ n'a pas d'arêtes doubles, et que les génératrices (δ) correspondant à ses arêtes d'inflexion sont toutes à l'infini.

Nous savons que le degré de la développable asymptote est, dans le cas général,

$$(1.)\qquad N = m(3m-5).$$

Or nous connaissons les directions asymptotiques, qui sont d'abord les génératrices du cône φ_m des directions asymptotiques; par conséquent, les termes du degré le plus élevé en x, y, z, dans l'équation de la surface asymptote doivent contenir comme facteur la fonction $\varphi_m(x, y, z)$.

Nous savons, en second lieu, qu'il y a sur la surface asymptote $3m(m-2)$ droites à l'infini, lesquelles sont les intersections du plan à l'infini avec les $3m(m-2)$ plans asymptotes respectivement parallèles aux plans d'inflexion du cône des directions asymptotiques [n°s. 34 et 35]. Ainsi, la droite

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

étant une arête d'inflexion du cône $\varphi_m(x, y, z)$, la surface asymptote contiendra la droite à l'infini

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial a} + y\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial b} + z\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial c} + t\varphi_{m-1}(a, b, c) = 0, \\ t = 0. \end{cases}$$

Par conséquent, les termes du degré le plus élevé dans l'équation de la surface asymptote contiendront [n°. 10, 1ère partie] en facteur la fonction linéaire

$$x\frac{\partial\varphi_m}{\partial a} + y\frac{\partial\varphi_m}{\partial b} + z\frac{\partial\varphi_m}{\partial c} = 0$$

et ainsi des autres.

Donc, en désignant par $\theta(x, y, z)$ le produit des premiers membres des équations des $3m(m-2)$ plans d'inflexion du cône $\varphi_m(x, y, z)$, les termes du degré le plus élevé, dans l'équation de la surface asymptote, devront contenir en facteur l'expression

$$\varphi_m(x, y, z).\theta(x, y, z);$$

mais cette expression est du degré $[m+3m(m-2)]$ ou N, elle constitue donc l'ensemble des termes du degré le plus élevé dans l'équation de la surface asymptote.

Ainsi, en désignant par (a_i, b_i, c_i) les solutions des deux équations

$$(2.)\quad \begin{cases} \varphi_m(a, b, c) = 0, \\ H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial a^2} & \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial a\partial b} & \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial a\partial c} \\ \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial b\partial a} & \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial b^2} & \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial b\partial c} \\ \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial c\partial a} & \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial c\partial b} & \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial c^2} \end{vmatrix} = 0; \end{cases}$$

puis, posant

$$(3.)\quad A_i = \frac{\partial\varphi_m}{\partial a_i},\qquad B_i = \frac{\partial\varphi_m}{\partial b_i},\qquad C_i = \frac{\partial\varphi_m}{\partial c_i},$$

l'expression $\theta(x, y, z)$ sera définie par l'égalité

$$(4.)\quad \begin{cases} \theta(x, y, z) = (A_1x+B_1y+C_1z)(A_2x+B_2y+C_2z)\dots(A_px+B_py+C_pz), \\ \text{où}\qquad p = 3m(m-2). \end{cases}$$

La fonction $\theta(x, y, z)$ pourra s'obtenir en éliminant a, b, c entre les deux équations (2.) et la suivante

$$(5.)\quad x\frac{\partial\varphi_m}{\partial a}+y\frac{\partial\varphi_m}{\partial b}+z\frac{\partial\varphi_m}{\partial c} = 0.$$

L'équation de la surface asymptote Δ sera donc de la forme

$$(6.)\ (\Delta)\qquad \varphi(x, y, z)+t\psi(x, y, z)+t^2\chi(x, y, z)+\dots = 0,$$

en posant

$$(7.)\quad \varphi(x, y, z) = \varphi_m(x, y, z).\theta(x, y, z);$$

la fonction $\varphi(x, y, z)$ est homogène et du degré N.

45. Les directions asymptotiques de la surface Δ sont, outre les génératrices du cône $\varphi_m(x, y, z)$, des droites quelconques parallèles aux différents plans tangents d'inflexion du cône φ_m; et, en outre, il résulte de la conclusion du n°. 35 que, si l'on considère une droite quelconque parallèle

au plan tangent d'inflexion

$$x\frac{\partial\varphi_m}{\partial a_i}+y\frac{\partial\varphi_m}{\partial b_i}+z\frac{\partial\varphi_m}{\partial c_i} = 0,$$

le plan asymptote de la surface $\varDelta$ sera, quelle que soit la direction de la droite, le plan asymptote de la surface U correspondant à la direction asymptotique (a_i, b_i, c_i), savoir

$$x\frac{\partial\varphi_m}{\partial a_i}+y\frac{\partial\varphi_m}{\partial b_i}+z\frac{\partial\varphi_m}{\partial c_i}+t\varphi_{m-1}(a_i, b_i, c_i) = 0.$$

Cette remarque va nous servir pour déterminer la forme de la fonction $\psi(x,y,z)$.

46. Soit d'abord (α,β,γ) une direction asymptotique du cône $\varphi_m(x,y,z)$, c. à. d. que

$$(8.)\qquad \varphi_m(\alpha,\beta,\gamma) = 0.$$

Cette droite est aussi une direction asymptotique de la surface $\varDelta$, et le plan touchant la surface $\varDelta$ au point à l'infini sur (α,β,γ), ou le plan asymptote de $\varDelta$, n'est autre que le plan asymptote de la surface U correspondant à la direction (α,β,γ), c. à. d.

$$(9.)\qquad x\frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha}+y\frac{\partial\varphi_m}{\partial\beta}+z\frac{\partial\varphi_m}{\partial\gamma}+t\varphi_{m-1}(\alpha,\beta,\gamma) = 0.$$

Exprimons que le plan asymptote de la surface $\varDelta$ (6.) et correspondant à (α,β,γ), savoir

$$x\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}+y\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}+z\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma}+t\psi(\alpha,\beta,\gamma) = 0,$$

coïncide avec le plan (9.), quelles que soient les valeurs de α, β, γ, satisfaisant à la relation (8.).

Or, d'après la définition (7.) de φ

$$(10.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = \theta(x,y,z)\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial x}+\varphi_m(x,y,z)\dfrac{\partial\theta}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = \theta(x,y,z)\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial y}+\varphi_m(x,y,z)\dfrac{\partial\theta}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = \theta(x,y,z)\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial z}+\varphi_m(x,y,z)\dfrac{\partial\theta}{\partial z}; \end{cases}$$

d'où l'on conclut, eu égard à la relation (8.):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = \theta(\alpha,\beta,\gamma)\frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} = \theta(\alpha,\beta,\gamma)\frac{\partial\varphi_m}{\partial\beta},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma} = \theta(\alpha,\beta,\gamma)\frac{\partial\varphi_m}{\partial\gamma}.$$

Le plan asymptote de la surface $\varDelta$, correspondant à (α,β,γ), a donc pour équation:

$$x\frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha}+y\frac{\partial\varphi_m}{\partial\beta}+z\frac{\partial\varphi_m}{\partial\gamma}+t\frac{\psi(\alpha,\beta,\gamma)}{\theta(\alpha,\beta,\gamma)} = 0.$$

Ce plan doit coincider avec le plan (9.), c. à. d. que, pour toutes les valeurs de α, β, γ qui vérifient la relation (8.), on doit avoir

$$\psi(\alpha,\beta,\gamma)=\theta(\alpha,\beta,\gamma).\varphi_{m-1}(\alpha,\beta,\gamma).$$

En d'autres termes, si nous considérons les deux cônes

$$\begin{cases} \varphi_m(x,y,z) = 0, \\ \psi(x,y,z)-\theta(x,y,z).\varphi_{m-1}(x,y,z) = 0, \end{cases}$$

toutes les arêtes du 1er cône doivent être situées sur le second; ce qui exige qu'on ait l'identité

$$(11.)\qquad \psi(x,y,z) = \theta(x,y,z)\varphi_{m-1}(x,y,z)+\varphi_m(x,y,z)V(x,y,z),$$

$V(x,y,z)$ étant une fonction indéterminée homogène et du degré $[3m(m-2)-1]$.

47. Pour déterminer la fonction $V(x,y,z)$, nous nous appuierons sur la remarque du n°. 45, c. à. d. que nous exprimerons que, pour une direction asymptotique quelconque parallèle au plan d'inflexion

$$x\frac{\partial\varphi_m}{\partial a_i}+y\frac{\partial\varphi_m}{\partial b_i}+z\frac{\partial\varphi_m}{\partial c_i}=0,\quad \text{ou}\quad A_ix+B_iy+C_iz=0,$$

le plan asymptote correspondant de la surface Δ se confond, quelle que soit l'orientation de la droite considérée, avec le plan

$$(P_i)\qquad \begin{cases} x\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial a_i}+y\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial b_i}+z\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial c_i}+t\varphi_{m-1}(a_i,b_i,c_i) = 0, \\ \text{ou}\quad A_ix+B_iy+C_iz+t\varphi_{m-1}(a_i,b_i,c_i) = 0; \end{cases}$$

et cela pour les $3m(m-2)$ solutions (a_i, b_i, c_i) des équations (12.). Comme nous l'avons dit, cette propriété résulte des calculs du n°. 35 où l'on a démontré que le plan (P_i) est tangent à la surface asymptote tout le long de la droite à l'infini

$$A_ix+B_iy+C_iz=0,\quad t=0.$$

Soit alors une direction asymptotique (α,β,γ) parallèle au plan

$$A_ix+B_iy+C_iz = 0,$$

de sorte qu'on a la relation

$$(12.)\qquad A_i\alpha+B_i\beta+C_i\gamma = 0.$$

Nous représenterons par $\theta_i(x,y,z)$ le produit de tous les facteurs $(A_1x+B_1y+C_1z)$, $(A_2x+B_2y+C_2z)$, ... à l'exception du facteur $(A_ix+B_iy+C_iz)$, c. à. d. que nous poserons

$$(13.)\qquad \begin{cases} \theta_i(x,y,z) = \dfrac{\theta(x,y,z)}{A_ix+B_iy+C_iz}, \\ \text{ou}\quad \theta(x,y,z) = (A_ix+B_iy+C_iz)\theta_i(x,y,z). \end{cases}$$

D'après cette notation, nous aurons

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = A_i\theta_i(x,y,z)\varphi_m(x,y,z)+(A_ix+B_iy+C_iz)\Big[\varphi_m\frac{\partial\theta_i}{\partial x}+\theta_i\frac{\partial\varphi_m}{\partial x}\Big];$$

etc. etc.

d'où nous conclurons, en ayant égard à la relation (12.):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = A_i.\theta_i(\alpha,\beta,\gamma).\varphi_m(\alpha,\beta,\gamma); \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\beta} = B_i.\theta_i(\alpha,\beta,\gamma).\varphi_m(\alpha,\beta,\gamma); \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\gamma} = C_i.\theta_i(\alpha,\beta,\gamma).\varphi_m(\alpha,\beta,\gamma); \end{cases}$$

et, d'après l'identité (11.):

$$\psi(\alpha,\beta,\gamma) = \varphi_m(\alpha,\beta,\gamma).V(\alpha,\beta,\gamma).$$

Le plan asymptote de la surface $\varDelta$ a donc pour équation

$$A_ix+B_iy+C_iz+t\frac{V(\alpha,\beta,\gamma)}{\theta_i(\alpha,\beta,\gamma)} = 0.$$

Pour que ce plan coincide avec le plan (P_i), il faut qu'on ait

$$(14.)\qquad V(\alpha,\beta,\gamma) = \theta_i(\alpha,\beta,\gamma).\varphi_{m-1}(a_i,b_i,c_i);$$

cette égalité doit avoir lieu pour toutes les valeurs de α, β, γ qui satisfont à la relation unique

$$(12.)\qquad \alpha A_i+\beta B_i+\gamma C_i = 0;$$

et elle doit avoir lieu aussi pour toutes les $3m(m-2)$ solutions (a_i, b_i, c_i).

Or, nous écrivons la fonction $V(x,y,z)$ sous la forme suivante

$$(15.)\quad \begin{cases} V(x,y,z) = \\ K_1.\theta_1(x,y,z)\varphi_{m-1}(a_1,b_1,c_1)+K_2.\theta_2(x,y,z)\varphi_{m-1}(a_2,b_2,c_2)+\cdots \\ \cdots+K_i.\theta_i(x,y,z)\varphi_{m-1}(a_i,b_i,c_i)+\cdots+K_p.\theta_p(x,y,z)\varphi_{m-1}(a_p,b_p,c_p) \\ +T(x,y,z), \end{cases}$$

les K_i étant des constantes arbitraires; les θ_i étant définies par les égalités (13.); les (a_i, b_i, c_i) ayant la signification déjà plusieurs fois indiquée; $T(x,y,z)$ étant une fonction du même degré que V c. à. d. du degré $(p-1)$ (p étant égal à $3m(m-2)$) et jouissant de la propriété de s'annuler pour toutes les valeurs possibles de α, β, γ, qui satisfont à une quelconque des relations (12.).

Pour une solution quelconque de la relation (12.), les fonctions θ_1, θ_2, ... θ_{i-1}, θ_{i+1}, ... θ_p, qui contiennent $(A_ix+B_iy+C_iz)$ en facteur,

s'annulent lorsqu'on y fait $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma$; et, comme, par hypothèse, $T(\alpha, \beta, \gamma)$ est aussi nulle, la fonction V ou (15.) se réduit à

$$V(\alpha, \beta, \gamma) = K_i . \theta_i(\alpha, \beta, \gamma) . \varphi_{m-1}(a_i, b_i, c_i);$$

la relation (14.) et toutes les conditions imposées seront alors vérifiées en supposant les constantes K_i égales à l'unité. Quant à la fonction $T(x, y, z)$, elle est identiquement nulle; car les conditions imposées à cette fonction reviennent à dire que le cône $T(x, y, z) = 0$ doit passer par toutes les droites situées dans un quelconque des plans

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z = 0,\ A_2 x + B_2 y + C_2 z = 0,\ \dots\ A_p x + B_p y + C_p z = 0;$$

ce qui exige que la fonction $T(x, y, z)$ contienne comme facteurs toutes les fonctions linéaires $(A_i x + B_i y + C_i z)$ dont le nombre est $3m(m-2)$; or la fonction $T(x, y, z)$ est du degré $[3m(m-2)-1]$; donc elle est identiquement nulle.

On pourrait aussi déterminer la fonction V en cherchant à vérifier successivement les relations fournies par les égalités (14.) et (12.) dans lesquelles on ferait $i = 1, 2, 3, \dots p$; on retrouverait ainsi la forme (15.); c'est donc la forme la plus générale satisfaisant aux conditions imposées.

48. *L'équation de la développable asymptote* étant mise sous la forme

$$(16.)\qquad \varphi(x, y, z) + t\psi(x, y, z) + t^2\chi(x, y, z) + \cdots = 0,$$

les fonctions φ et ψ sont donc connues; et l'on a

$$(17.)\quad \begin{cases} \varphi(x, y, z) = \varphi_m(x, y, z) . \theta(x, y, z), \\ \psi(x,y,z) = \varphi_{m-1}(x,y,z) . \theta(x,y,z) + \varphi_m(x,y,z)\left[\sum_{i=1}^{i=p} \theta_i(x,y,z) . \varphi_{m-1}(a_i,b_i,c_i)\right]; \end{cases}$$

dans ces expressions, (a_i, b_i, c_i) désigne une solution quelconque des équations (2.); le nombre p est égal à $3m(m-2)$; et enfin, on a posé

$$(18.)\quad \begin{cases} \theta(x, y, z) = \left(x\frac{\partial\varphi_m}{\partial a_1} + y\frac{\partial\varphi_m}{\partial b_1} + z\frac{\partial\varphi_m}{\partial c_1}\right)\left(x\frac{\partial\varphi_m}{\partial a_2} + y\frac{\partial\varphi_m}{\partial b_2} + z\frac{\partial\varphi_m}{\partial c_2}\right)\cdots; \\ \theta_i(x, y, z) = \dfrac{\theta(x, y, z)}{x\frac{\partial\varphi_m}{\partial a_i} + y\frac{\partial\varphi_m}{\partial b_i} + z\frac{\partial\varphi_m}{\partial c_i}}. \end{cases}$$

49. Nous allons reprendre sur cette équation définitive l'étude des points à l'infini de la surface asymptote; nous rappellerons ainsi, en les confirmant, les propriétés déjà établies directement.

Ecrivons d'abord les dérivées partielles des fonctions φ et ψ:

$$(19.)\quad \begin{cases} \varphi(x,y,z) = \varphi_m(x,y,z).\theta(x,y,z) = \\ \varphi_m(x,y,z).\theta_i(x,y,z)\left(x\frac{\partial\varphi_m}{\partial a_i}+y\frac{\partial\varphi_m}{\partial b_i}+z\frac{\partial\varphi_m}{\partial c_i}\right); \end{cases}$$

$$(20.)\quad \begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi_m}{\partial x}\theta+\varphi_m\left[\left(x\frac{\partial\varphi_m}{\partial a_i}+y\frac{\partial\varphi_m}{\partial b_i}+z\frac{\partial\varphi_m}{\partial c_i}\right)\frac{\partial\theta_i}{\partial x}+\theta_i\frac{\partial\varphi_m}{\partial a_i}\right], \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi_m}{\partial y}\theta+\varphi_m\left[\left(x\frac{\partial\varphi_m}{\partial a_i}+y\frac{\partial\varphi_m}{\partial b_i}+z\frac{\partial\varphi_m}{\partial c_i}\right)\frac{\partial\theta_i}{\partial y}+\theta_i\frac{\partial\varphi_m}{\partial b_i}\right], \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\varphi_m}{\partial z}\theta+\varphi_m\left[\left(x\frac{\partial\varphi_m}{\partial a_i}+y\frac{\partial\varphi_m}{\partial b_i}+z\frac{\partial\varphi_m}{\partial c_i}\right)\frac{\partial\theta_i}{\partial z}+\theta_i\frac{\partial\varphi_m}{\partial c_i}\right], \end{cases}$$

$$(21.)\quad \begin{cases} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \begin{cases} \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial x^2}\theta+2\frac{\partial\varphi_m}{\partial x}\left[\left(x\frac{\partial\varphi_m}{\partial a_i}+y\frac{\partial\varphi_m}{\partial b_i}+z\frac{\partial\varphi_m}{\partial c_i}\right)\frac{\partial\theta_i}{\partial x}+\theta_i\frac{\partial\varphi_m}{\partial a_i}\right] \\ +\varphi_m\left[2\frac{\partial\varphi_m}{\partial a_i}\frac{\partial\theta_i}{\partial x}+\left(x\frac{\partial\varphi_m}{\partial a_i}+y\frac{\partial\varphi_m}{\partial b_i}+z\frac{\partial\varphi_m}{\partial c_i}\right)\frac{\partial^2\theta_i}{\partial x^2}\right] \end{cases} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} = \begin{cases} \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial x\partial y}\theta+\frac{\partial\varphi_m}{\partial x}\left[\left(x\frac{\partial\varphi_m}{\partial a_i}+y\frac{\partial\varphi_m}{\partial b_i}+z\frac{\partial\varphi_m}{\partial c_i}\right)\frac{\partial\theta_i}{\partial y}+\theta_i\frac{\partial\varphi_m}{\partial b_i}\right] \\ \quad +\frac{\partial\varphi_m}{\partial y}\left[\left(x\frac{\partial\varphi_m}{\partial a_i}+y\frac{\partial\varphi_m}{\partial b_i}+z\frac{\partial\varphi_m}{\partial c_i}\right)\frac{\partial\theta_i}{\partial x}+\theta_i\frac{\partial\varphi_m}{\partial a_i}\right] \\ +\varphi_m\left[\frac{\partial\varphi_m}{\partial a_i}\frac{\partial\theta_i}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_m}{\partial b_i}\frac{\partial\theta_i}{\partial x}+\left(x\frac{\partial\varphi_m}{\partial a_i}+y\frac{\partial\varphi_m}{\partial b_i}+z\frac{\partial\varphi_m}{\partial c_i}\right)\frac{\partial^2\theta_i}{\partial x\partial y}\right] \end{cases} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

$$(22.)\quad \psi(x,y,z) = \varphi_{m-1}(x,y,z)\theta(x,y,z)+\varphi_m(x,y,z)\left[\sum_{i=1}^{i=p}\theta_i(x,y,z)\varphi_{m-1}(a_i,b_i,c_i)\right]$$

$$(23.)\quad \frac{\partial\psi}{\partial x} = \begin{cases} \theta\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial x}+\varphi_{m-1}\left[\left(x\frac{\partial\varphi_m}{\partial a_i}+y\frac{\partial\varphi_m}{\partial b_i}+z\frac{\partial\varphi_m}{\partial c_i}\right)\frac{\partial\theta_i}{\partial x}+\theta_i\frac{\partial\varphi_m}{\partial a_i}\right] \\ +\frac{\partial\varphi_m}{\partial x}\left[\sum_{i=1}^{i=p}\theta_i(x,y,z)\varphi_{m-1}(a_i,b_i,c_i)\right] \\ +\varphi_m\left[\sum_{i=1}^{i=p}\varphi_{m-1}(a_i,b_i,c_i)\frac{\partial\theta_i}{\partial x}\right] \end{cases}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

I°. Soit une direction asymptotique appartenant au cône $\varphi_m(x,y,z)$.

Si (α,β,γ) est la direction considérée, on devra avoir

$$\varphi_m(\alpha,\beta,\gamma) = 0;$$

d'après cette relation et les formules (19.), (20.) et (22.) nous trouverons

pour l'équation du plan asymptote correspondant de la développable $\varDelta$

$$x\frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha}+y\frac{\partial\varphi_m}{\partial\beta}+z\frac{\partial\varphi_m}{\partial\gamma}+t\varphi_{m-1}(\alpha,\beta,\gamma) = 0;$$

ce plan coincide avec le plan asymptote de la surface U relatif à la même direction asymptotique.

II°. Soit une direction asymptotique (a_i, b_i, c_i) parallèle à une arête d'inflexion du cône $\varphi_m(x, y, z)$.

Dans cette hypothèse, on a

$$(24.)\quad \begin{cases} \varphi_m(a_i, b_i, c_i) = 0, \quad \text{ou} \quad a_i\frac{\partial\varphi_m}{\partial a_i}+b_i\frac{\partial\varphi_m}{\partial b_i}+c_i\frac{\partial\varphi_m}{\partial c_i} = 0; \\ \theta(a_i, b_i, c_i) = 0, \quad \theta_i(a_i, b_i, c_i) \gtrless 0. \end{cases}$$

Les équations (20.) donnent alors

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a_i} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial b_i} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial c_i} = 0; \quad \psi(a_i, b_i, c_i) = 0;$$

c. à. d. que le point à l'infini $\left(\frac{x}{a_i} = \frac{y}{b_i} = \frac{z}{c_i}, t = 0\right)$ est un point double pour la surface asymptote.

L'équation du *cylindre asymptote* correspondant est (§. II, 1ère partie)

$$(25.)\quad \left.\begin{cases} x^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}+y^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta^2}+z^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\gamma^2}+2xy\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha\partial\beta}+2xz\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha\partial\gamma}+2yz\frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta\partial\gamma} \\ +2t\left(x\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}+y\frac{\partial\psi}{\partial\beta}+z\frac{\partial\psi}{\partial\gamma}\right)+2t^2\chi(\alpha,\beta,\gamma) \end{cases}\right\} = 0.$$

Si, dans cette équation, on remplace α, β, γ par a_i, b_i, c_i, et qu'on calcule les coefficients à l'aide des formules (21.) et (23.) en tenant compte des relations (24.), on trouve

$$(26.)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left[x\frac{\partial\varphi_m}{\partial a_i}+y\frac{\partial\varphi_m}{\partial b_i}+z\frac{\partial\varphi_m}{\partial c_i}+t\varphi_{m-1}(a_i,b_i,c_i)\right]^2+t^2\left[\frac{\chi(a_i,b_i,c_i)}{\theta_i(a_i,b_i,c_i)}-(\varphi_{m-1}(a_i,b_i,c_i))^2\right] \\ &= 0; \end{aligned}\right.$$

le cylindre asymptote se compose de deux plans parallèles. Le point double est donc un point de rebroussement conique dont l'axe de rebroussement est la droite à l'infini

$$x\frac{\partial\varphi_m}{\partial a_i}+y\frac{\partial\varphi_m}{\partial b_i}+z\frac{\partial\varphi_m}{\partial c_i}+t\varphi_{m-1}(a_i, b_i, c_i) = 0, \quad t = 0.$$

Ainsi *la surface asymptote $\varDelta$ possède déjà* $3m(m-2)$ *points doubles à l'infini, lesquels sont des points de rebroussement conique dont l'axe est à l'infini parallèle à la génératrice d'inflexion correspondante.*

III°. Soit une direction asymptotique (α, β, γ) parallèle à l'un des plans d'inflexion.

Supposons la droite (α, β, γ) parallèle au plan

$$x\frac{\partial\varphi_m}{\partial a_i}+y\frac{\partial\varphi_m}{\partial b_i}+z\frac{\partial\varphi_m}{\partial c_i} = 0;$$

on aura donc les relations

$$(27.)\quad \begin{cases} \alpha\frac{\partial\varphi_m}{\partial a_i}+\beta\frac{\partial\varphi_m}{\partial b_i}+\gamma\frac{\partial\varphi_m}{\partial c_i} = 0; \\ \text{d'où} \\ \theta(\alpha,\beta,\gamma)=0 \quad \text{et} \quad \theta_i(\alpha,\beta,\gamma)\gtrless 0. \end{cases}$$

On trouve pour le plan asymptote de la surface $\varDelta$

$$x\frac{\partial\varphi_m}{\partial a_i}+y\frac{\partial\varphi_m}{\partial b_i}+z\frac{\partial\varphi_m}{\partial c_i}+t\varphi_{m-1}(a_i, b_i, c_i) = 0,$$

et cela, quelle que soit la direction (α,β,γ) parallèle au plan considéré. Ainsi

La surface asymptote possède à l'infini $3m(m-2)$ *droites; pour chacune d'elles, le plan tangent en un point quelconque reste fixe et coincide avec le plan asymptote de la surface U correspondant à l'arête d'inflexion à laquelle est parallèle la droite à l'infini considérée.*

IV°. Soit une direction asymptotique (α,β,γ) parallèle à une des intersections du cône $\varphi_m(x, y, z)$ avec ses plans d'inflexion.

Chaque plan d'inflexion

$$x\frac{\partial\varphi_m}{\partial a_i}+y\frac{\partial\varphi_m}{\partial b_i}+z\frac{\partial\varphi_m}{\partial c_i} = 0,$$

par exemple, coupe le cône $\varphi_m(x, y, z)$ suivant m droites, dont trois coincident avec l'arête d'inflexion (a_i, b_i, c_i); il en reste $(m-3)$ autres qui donnent autant de points à l'infini dont nous allons étudier les propriétés.

Soit (α, β, γ) une de ces intersections; on aura alors

$$(28.)\quad \begin{cases} \alpha\frac{\partial\varphi_m}{\partial a_i}+\beta\frac{\partial\varphi_m}{\partial b_i}+\gamma\frac{\partial\varphi_m}{\partial c_i}=0, \quad \varphi_m(\alpha,\beta,\gamma)=0, \\ \text{d'où} \\ \theta(\alpha,\beta,\gamma)=0; \quad \theta_i(\alpha,\beta,\gamma)\gtrless 0. \end{cases}$$

Les équations (20.) et (22.) donnent d'abord

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}=0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}=0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma}=0; \quad \psi(\alpha,\beta,\gamma)=0;$$

donc ces points à l'infini sont des *points doubles*.

En tenant compte des relations (28.), on trouvera pour l'équation du cylindre asymptote

$$(29.)\quad \begin{cases} \left[x\frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha}+y\frac{\partial\varphi_m}{\partial\beta}+z\frac{\partial\varphi_m}{\partial\gamma}+t\varphi_{m-1}(\alpha,\beta,\gamma)\right]\left[x\frac{\partial\varphi_m}{\partial a_i}+y\frac{\partial\varphi_m}{\partial b_i}+z\frac{\partial\varphi_m}{\partial c_i}+t\varphi_{m-1}(a_i,b_i,c_i)\right] \\ \qquad +t^2\left[\frac{\chi(\alpha,\beta,\gamma)}{\theta_i(\alpha,\beta,\gamma)}-\varphi_{m-1}(\alpha,\beta,\gamma)\varphi_{m-1}(a_i,b_i,c_i)\right] = 0; \end{cases}$$

c'est un cylindre proprement dit dont les plans asymptotes sont, l'un le plan asymptote de la surface U correspondant à la génératrice d'inflexion (a_i, b_i, c_i), et l'autre le plan asymptote de la surface U correspondant à l'arête (α, β, γ) située dans le plan d'inflexion.

Ainsi, sur chacune des $3m(m-2)$ *droites que la surface asymptote possède à l'infini, il y a* $(m-2)$ *points doubles, dont un est un point de rebroussement conique pour lequel l'axe est à l'infini. Par conséquent, la surface asymptote possède déjà*

$$3m(m-2)^2$$

points doubles à l'infini, parmi lesquels il y a $3m(m-2)$ *points de rebroussement.*

V°. Soit une direction asymptotique (α, β, γ) parallèle à l'une des intersections des plans tangents d'inflexion entre eux.

Soit (α, β, γ) une de ces intersections; on aura, par exemple:

$$(30.)\quad \begin{cases} \alpha\frac{\partial\varphi_m}{\partial a_i}+\beta\frac{\partial\varphi_m}{\partial b_i}+\gamma\frac{\partial\varphi_m}{\partial c_i} = 0, \\ \alpha\frac{\partial\varphi_m}{\partial a_j}+\beta\frac{\partial\varphi_m}{\partial b_j}+\gamma\frac{\partial\varphi_m}{\partial c_j} = 0. \end{cases}$$

Les équations (20.) et (22.) donnent

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma}=0;\quad \psi(\alpha,\beta,\gamma)=0;$$

donc les points à l'infini correspondants sont des *points doubles*.

En tenant compte des relations (30.), on trouvera pour l'équation du cylindre asymptote

$$(31.)\quad \begin{cases} \left[x\frac{\partial\varphi_m}{\partial a_i}+y\frac{\partial\varphi_m}{\partial b_i}+z\frac{\partial\varphi_m}{\partial c_i}+t\varphi_{m-1}(a_i,b_i,c_i)\right]\left[x\frac{\partial\varphi_m}{\partial a_j}+y\frac{\partial\varphi_m}{\partial b_j}+z\frac{\partial\varphi_m}{\partial c_j}+t\varphi_{m-1}(a_j,b_j,c_j)\right] \\ \qquad +t^2\left[\frac{\chi(\alpha,\beta,\gamma}{\varphi_m(\alpha,\beta,\gamma)}-\varphi_{m-1}(a_i,b_i,c_i)\varphi_{m-1}(a_j,b_j,c_j)\right] = 0; \end{cases}$$

c'est un cylindre proprement dit dont les plans asymptotes sont les plans asymptotes de la surface U correspondant aux arêtes d'inflexion (a_i, b_i, c_i), (a_j, b_j, c_j).

Or, le nombre des plans d'inflexion étant $3m(m-2)$, le nombre de leurs intersections c. à. d. le nombre des droites actuelles (α, β, γ) sera

$$\frac{3m(m-2)}{2}[3m(m-2)-1];$$

ce qui donne autant de nouveaux points doubles.

Theorème. *Donc, en définitive, la surface asymptote possède, en tout,*

$$\frac{3m(m-2)[3m(m-2)-1]}{2}+3m(m-2)^2 = \frac{3m(m-2)}{2}[3m^2-4m-5]$$

points doubles, parmi lesquels il y a $3m(m-2)$ points de rebroussement. Sur chacune des $3m(m-2)$ droites que la surface asymptote possède à l'infini, il y a

$$\left(\frac{3m^2-4m-5}{2}\right)$$

points doubles, dont un est un point de rebroussement.

50. Nous signalerons encore la propriété suivante:

La surface proposée U étant de degré m, la surface asymptote est, en général, du degré $m(3m-5)$; ces deux surfaces se coupent donc suivant une courbe gauche de l'ordre $m^2(3m-5)$.

Or

(1°.) $U = \varphi_m + t\varphi_{m-1} + t^2\varphi_{m-2} + \cdots = 0,$

(2°.) $\Delta = \varphi_m\theta + t[\varphi_{m-1}\theta + \varphi_m \sum_{i=1}^{i=p}\theta_i(x, y, z)\varphi_{m-1}(a_i, b_i, c_i)] + t^2\chi + \cdots = 0.$

Retranchons de la seconde équation la 1ère multipliée par θ, et divisons par t, il vient

(3°.) $\Delta' = \varphi_m[\sum_{i=1}^{i=p}\theta_i(x, y, z)\varphi_{m-1}(a_i, b_i, c_i)] + t[\chi - \varphi_{m-2}.\theta] + t^2\ldots = 0.$

Retranchons encore de cette dernière équation la 1ère multipliée par $\sum_1^p\theta_i\varphi_{m-1}(a_i, b_i, c_i)$, on trouve, après avoir divisé par t,

(4°.) $\Delta'' = \chi - \theta\varphi_{m-2} - \varphi_{m-1}.\sum_1^p\theta_i(x, y, z)\varphi_{m-1}(a_i, b_i, c_i) + t(\cdots) + t^2(\cdots) + \cdots = 0.$

Or la surface Δ'' est du degré $[m(3m-5)-2]$ ou $(m-2)(3m+1)$; donc

La courbe d'intersection de la surface U et de la développable asymptote, laquelle courbe est de l'ordre $m^2(3m-5)$, se trouve sur une surface de l'ordre $(m-2)(3m+1)$.

51. **Remarque.**

Tous les calculs et conséquences développés depuis le n°. 44 jusqu'au n°. 51 ont été établis dans l'hypothèse où le cône $\varphi_m(x, y, z)$ n'a pas d'arêtes doubles.

Supposons que le cône $\varphi_m(x, y, z)$ ait une arête double ordinaire.

Nous savons que, dans ce cas, l'ordre de la surface asymptote se trouve diminué de deux unités [n°. 29], il est, par suite, égal à

$$[m(3m-5)-2].$$

Les directions asymptotiques sont alors: 1°. les génératrices du cône φ_m; 2°. les droites parallèles aux plans d'inflexion restants; 3°. les droites parallèles aux plans touchant le cône φ_m suivant l'arête double en question [n°. 39].

Mais la présence d'une arête double diminue de *six* unités le nombre des arêtes d'inflexion; par conséquent, la fonction $\theta'(x, y, z)$ correspondant aux plans d'inflexion restants sera ici du degré $[3m(m-2)-6]$, la fonction

$$\varphi_m(x, y, z).\theta'(x, y, z)$$

est donc du degré $[m+3m(m-2)-6]$ ou $[m(3m-5)-6]$; par suite, les premiers membres des équations des plans tangents P et Q suivant l'arête double devront entrer respectivement au second degré. De sorte que l'ensemble des termes du degré le plus élevé pour la surface asymptote sera, dans le cas actuel,

$$\varphi_m(x, y, z).\theta'(x, y, z).P^2.Q^2.$$

Supposons que le cône $\varphi_m(x, y, z)$ ait une arête de rebroussement.

Nous savons que, dans ce cas, l'ordre de la surface asymptote se trouve diminué de *quatre* unités [n°. 30], il est, par suite, égal à

$$[m(3m-5)-4].$$

Les directions asymptotiques sont alors: 1°. les génératrices du cône $\varphi_m(x, y, z)$; 2°. les droites parallèles aux plans d'inflexion restants; 3°. les droites parallèles au plan touchant le cône φ_m suivant l'arête de rebroussement [n°. 42].

Mais la présence d'une arête de rebroussement diminue de *huit* unités le nombre des arêtes d'inflexion, par conséquent la fonction $\theta''(x, y, z)$ correspondant aux plans d'inflexion restants sera ici du degré $[3m(m-2)-8]$; la fonction

$$\varphi_m(x, y, z).\theta''(x, y, z)$$

est donc du degré $[m+3m(m-2)-8]$ ou $[m(3m-5)-8]$; par suite, le premier membre R de l'équation du plan de rebroussement doit entrer au 4ème degré. De sorte que l'ensemble des termes du degré le plus élevé pour la surface asymptote sera, dans le cas actuel,

$$\varphi_m(x, y, z).\theta''(x, y, z).R^4.$$

II°. Cas où le cône des directions asymptotiques est décomposable.

52. Lorsque le cône des directions asymptotiques de la surface U se décompose en plusieurs cônes de degrés moindres que m, on peut déterminer isolément la surface développable asymptote correspondant à chacun de ces cônes; l'ensemble de ces surfaces partielles constituera la ***surface asymptote complète*** pour la surface proposée.

Evaluons le degré de ces surfaces asymptotes partielles.

Reprenons la notation x_1, x_2, x_3, pour les variables, et représentons respectivement par $u(x_1, x_2, x_3)$ et $v(x_1, x_2, x_3)$ les fonctions homogènes $\varphi_m(x, y, z)$ et $\varphi_{m-1}(x, y, z)$.

Supposons, par exemple, qu'on ait

$$(32.)\qquad \varphi_m \text{ ou } u(x_1, x_2, x_3) = P(x_1, x_2, x_3).Q(x_1, x_2, x_3),$$

les fonctions P et Q étant respectivement des degrés p et q, de sorte que

$$(33.)\qquad p+q = m.$$

L'équation du plan asymptote correspondant à une génératrice (x_1^0, x_2^0, x_3^0) du cône $P(x_1, x_2, x_3)$ sera

$$(34.)\qquad x_1 P_1^0 + x_2 P_2^0 + x_3 P_3^0 + t f^0 = 0,$$

avec la condition

$$(34^{\text{bis}}.)\qquad P(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = P^0 = 0;$$

nous avons, en outre, posé

$$(35.)\qquad f(x_1, x_2, x_3) = \frac{v(x_1, x_2, x_3)}{Q(x_1, x_2, x_3)}.$$

Les raisonnements et les calculs du n°. 8 sont applicables ici. De sorte que si l'on pose

$$(36.)\qquad \begin{cases} \mathfrak{H} = \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{vmatrix}, \qquad \mathfrak{H}_{rs} = \dfrac{\partial \mathfrak{H}}{\partial P_{rs}}; \\ G_r = f_1 \mathfrak{H}_{r1} + f_2 \mathfrak{H}_{r2} + f_3 \mathfrak{H}_{r3}, \end{cases}$$

on trouve que le nombre des génératrices de la surface asymptote (correspondant au cône $P(x_1, x_2, x_3)$) rencontrées par une droite arbitraire est égal au nombre des solutions communes ou des génératrices communes aux deux cônes

$$(37.)\qquad \begin{vmatrix} a_1 & x_1 & G_1 + A_1 \mathfrak{H} \\ a_2 & x_2 & G_2 + A_2 \mathfrak{H} \\ a_3 & x_3 & G_3 + A_3 \mathfrak{H} \end{vmatrix} = 0, \quad P(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Or, si l'on remarque que

$$f_i = \frac{Qv_i - vQ_i}{Q^2},$$

a première des équations (37.) pourra s'écrire

$$(38.) \qquad \mathfrak{H}.Q^2 \begin{vmatrix} a_1 & x_1 & A_1 \\ a_2 & x_2 & A_2 \\ a_3 & x_3 & A_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & x_1 & L_1 \\ a_2 & x_2 & L_2 \\ a_3 & x_3 & L_3 \end{vmatrix} = 0,$$

où

$$(39.) \qquad \begin{cases} L_r = \mathcal{A}_1\mathfrak{H}_{r1} + \mathcal{A}_2\mathfrak{H}_{r2} + \mathcal{A}_3\mathfrak{H}_{r3}, \\ \mathcal{A}_r = Qv_r - vQ_r. \end{cases}$$

Mais les fonctions P, Q, $\mathfrak{H}$, sont des degrés respectifs

$$p, \quad (m-p), \quad 3(p-2);$$

on voit d'après cela, et en ayant égard à (33.), que l'équation (38.) est du degré

$$(p+2m-5).$$

Donc le degré de la surface asymptote partielle correspondant au cône $P(x_1, x_2, x_3)$ des directions asymptotiques est égal à

$$N_1 = p(p+2m-5),$$

p étant le degré du cône $P(x_1, x_2, x_3)$.

Le degré de la surface asymptote partielle correspondant aux directions asymptotiques du cône $Q(x_1, x_2, x_3)$ sera

$$N_2 = q(q+2m-5),$$

q étant le degré du cône $Q(x_1, x_2, x_3)$.

L'ensemble de ces deux surfaces constitue la développable asymptote complète de la surface proposée; or cet ensemble de surfaces sera, eu égard à la relation (33.), du degré

$$N = N_1 + N_2 = m(3m-5) - 2pq.$$

53. Il est facile de généraliser ces considérations, et de voir que, si

$$\varphi_m(x, y, z) = P(x, y, z).Q(x, y, z).R(x, y, z).S(x, y, z)\ldots = 0$$

est l'équation du cône des directions asymptotiques, si p, q, r, s ... sont les degrés respectifs des fonctions P, Q, R, S, ... l'ensemble des surfaces asymptotes partielles formera un système du degré

$$N = m(3m-5) - 2(pq + pr + ps + \cdots + qr + \cdots).$$

Donc, *lorsque le cône des directions asymptotiques se décompose en plusieurs cônes, les surfaces asymptotes partielles correspondant aux différents cônes forment un système de surfaces dont le degré est moindre que le degré de la surface asymptote correspondant au cas général où le cône $\varphi_m(x, y, z)$ est indécomposable; la diminution du degré est égale au double du nombre des intersections des cônes partiels pris deux à deux.*

Ce résultat est parfaitement d'accord avec la conclusion énoncée au n°. 31.

Je ne m'arrêterai pas à l'examen des cas particuliers qui se présentent dans la question actuelle; et je terminerai en résumant les différentes propriétés de la surface asymptote qui nous ont été fournies par l'analyse développée dans cette 2ème partie.

III°. Résumé général.

54. La surface développable asymptote est l'enveloppe des plans asymptotes de la surface proposée U; elle est, en général, de *l'ordre*

$$N = m(3m-5),$$

si m est l'ordre de la surface U; et de la *classe* $m(m-1)$.

Lorsque le cône $\varphi_m(x, y, z)$ des directions asymptotiques possède une arête double ordinaire ou une arête de rebroussement (ne correspondant pas à un point double de la surface U) l'ordre de la surface asymptote est diminué de *deux* ou de *quatre* unités.

Lorsque la surface U a un point double à l'infini, l'ordre de la surface asymptote est, en général, diminué de *six* unités; mais, si la direction asymptotique correspondant au point double est une arête triple du cône $\varphi_m(x, y, z)$, la diminution sera de *neuf* ou de *douze* unités, suivant que cette droite est une arête simple ou une arête double du cône $\varphi_{m-1}(x, y, z)$.

Les directions asymptotiques de la surface asymptote sont: d'abord, les génératrices du cône $\varphi_m(x, y, z)$; en second lieu, des droites quelconques parallèles aux plans d'inflexion du cône $\varphi_m(x, y, z)$, et aux plans touchant le cône suivant des arêtes doubles, lorsqu'il y a de telles arêtes.

On peut conclure de là l'expression des termes de degré N et $(N-1)$ de l'équation de la surface asymptote.

La surface asymptote possède, en général, à l'infini $3m(m-2)$ droites; le plan tangent reste invariable quel que soit le point considéré sur une de ces droites. Sur chacune de ces droites, il y a

$$\frac{3m^2-4m-5}{2}$$

points doubles pour la surface asymptote, dont un est un point de rebroussement de conique pour lequel l'axe est à l'infini. La surface asymptote possède, en tout,

$$\frac{3m(m-2)}{2}[3m^2-4m-5]$$

points doubles, dont $3m(m-2)$ sont des points de rebroussement correspondant aux arêtes d'inflexion du cône $\varphi_m(x, y, z)$.

La courbe d'intersection de la surface proposée avec la surface asymptote, courbe dont l'ordre est $m^2(3m-5)$, se trouve sur une surface d'ordre $(m-2)(3m+1)$.

Lorsque le cône des directions asymptotiques se décompose en plusieurs cônes, les surfaces asymptotes partielles correspondant aux différents cônes forment un système de surfaces dont le degré est moindre que le degré de la surface asymptote correspondant au cas général où le cône est indécomposable; la diminution du degré est égale au double du nombre des intersections des cônes partiels pris deux à deux.

Lorsque l'équation de la surface proposée peut être amenée à ne plus renfermer de termes du degré $(m-1)$, la surface asymptote est le cône $\varphi_m(x, y, z)$ des directions asymptotiques; et réciproquement, lorsque tous les plans asymptotes enveloppent un cône, l'équation de la surface peut être amenée à ne plus renfermer de termes du degré $(m-1)$.

Ueber die simultane Integration linearer partieller Differentialgleichungen.

(Von Herrn *A. Clebsch* zu Giessen.)

Die Aufgabe, die gemeinsamen Lösungen mehrerer linearen partiellen Differentialgleichungen zu finden, ist von *Jacobi* im 60sten Bande dieses Journals p. 23 ff. und ausführlicher in seinen demnächst zu publicirenden Vorlesungen über Dynamik, für einen besondern Fall behandelt worden. Dieser Fall besteht darin, dass, wenn eine Reihe von Gleichungen

$$(1.)\quad A_1(f)=0,\quad A_2(f)=0,\quad \dots\quad A_\nu(f)=0$$

vorliegt, wo

$$(2.)\quad A_i(f) = X_{i1}\frac{\partial f}{\partial x_1}+X_{i2}\frac{\partial f}{\partial x_2}+\cdots+X_{in}\frac{\partial f}{\partial x_n},$$

zwischen den Operationen A die für jeden Werth von i und $\varkappa$ gültige Identität stattfindet

$$(3.)\quad A_i(A_\varkappa(f))-A_\varkappa(A_i(f)) = 0.$$

Jacobi hat gezeigt, dass in diesem Falle die Gleichungen (1.) $n-\nu$ gemeinsame Lösungen besitzen, und hat den Weg, sie zu finden, angegeben. Eine Modification seiner Methode habe ich im 61sten Bande dieses Journals p. 168 dargestellt.

Im Folgenden werde ich die Aufgabe ohne Voraussetzung der identischen Relation (3.) aufnehmen und zeigen, wie unter allen Umständen das Problem sich auf den von *Jacobi* behandelten Fall zurückführen lässt, wodurch dann die Frage nach der simultanen Integration linearer partieller Differentialgleichungen in allgemeinster Weise gelöst ist.

§. 1.

Begriff eines vollständigen Systems.

Ein System von Gleichungen

$$(4.)\quad A_1(f)=0,\quad A_2(f)=0,\quad \dots\quad A_\mu(f)=0$$

sei vorgelegt; es kommt zunächst darauf an, zu entscheiden, ob dieselben gemeinsame Lösungen zulassen, und wie gross die Anzahl der von einander

unabhängigen ist. Ich bilde zu diesem Zweck aus den Gleichungen (4.) die Combinationen

$$(5.)\qquad A_\iota(A_\varkappa(f))-A_\varkappa(A_\iota(f)) = 0,$$

welche wieder lineare partielle Differentialgleichungen ergeben. Entweder sind nun die Gleichungen (5.) lineare Combinationen der Gleichungen (4.), oder sie sind von diesen verschieden. Die unter den Gleichungen (5.), welche etwas neues ergeben, füge ich den Gleichungen (4.) hinzu, und bilde nun wieder sämmtliche Combinationen (5.). Indem man auf diese Weise fortfährt, gelangt man schliesslich zu einem Systeme, welches sich von (4.) durch eine Reihe hinzugefügter Gleichungen unterscheidet, und bei welchem endlich die Combinationen (5.) keine neuen Gleichungen mehr liefern. Das so entstandene System

$$(6.)\qquad A_1(f)=0,\quad A_2(f)=0,\quad \dots\quad A_\nu(f)=0$$

nenne ich das aus (4.) abgeleitete *vollständige System.*

Ein vollständiges System wird also durch die Eigenschaft definirt, dass sämmtliche Ausdrücke (5.) *lineare Combinationen des Systems selbst sind.*

Die grösste Anzahl von Gleichungen, welche ein vollständiges System enthalten kann, ist gleich n. Denn in diesem ungünstigsten Falle kann man die $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ linear durch die $A_i(f)$ ausdrücken, und also auch jeden linearen Differentialausdruck überhaupt als lineare Function der $A_i(f)$ darstellen.

Wenn das vollständige System aus n Gleichungen besteht, so haben die Gleichungen keine simultane Lösung. Denn das System der Gleichungen (6.) führt dann auf die Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial x_2}=0,\quad \dots\quad \frac{\partial f}{\partial x_n}=0,$$

d. h. auf die evidente Lösung $f=\text{Const.}$

Es wird sich zeigen, dass wenn $\nu<n$, immer $n-\nu$ simultane Lösungen existiren.

Ueber die Gleichungen des vollständigen Systemes kann man nun folgenden Satz aufstellen:

Sind

$$M(f) = M_1 A_1(f) [illegible] A_2(f)+ [illegible] A_\nu(f),$$
$$N(f) = N_1 [illegible] N_2 A_2(f) [illegible] A_\nu(f)$$

irgend zwei lineare Com[illegible] *der Aus*[illegible]*), so ist auch immer*

[illegible] $(N(f))-$ [illegible]

eine solche.

In der That ist

$$M(N(f)) = \sum_{\varkappa} M(N_\varkappa).A_\varkappa(f)+\sum_{i}\sum_{\varkappa} N_\varkappa M_i A_i(A_\varkappa(f)),$$
$$N(M(f)) = \sum_{i} N(M_i).A_i(f)+\sum_{i}\sum_{\varkappa} N_\varkappa M_i A_\varkappa(A_i(f)).$$

Die ersten Theile der rechten Seite haben hier schon die verlangte Form; die Differenz der zweiten Theile

$$\sum_{i}\sum_{\varkappa} N_\varkappa M_i\{A_i(A_\varkappa(f))-A_\varkappa(A_i(f))\}$$

nimmt dieselbe Form an, weil der eingeklammerte Ausdruck der Voraussetzung nach sich in jene Gestalt bringen lässt, wenn die A ein vollständiges System bilden.

Hieraus geht sogleich hervor, *dass die Gleichungen eines vollständigen Systems, wenn man sie durch irgend welche lineare Combinationen ersetzt, immer auf ein vollständiges System führen.*

§. 2.

Reduction des vollständigen Systems auf ein *Jacobi*sches.

Unter einem *Jacobi*schen Systeme verstehe ich ein solches, bei welchem die Ausdrücke (5.) nicht lineare Combinationen der Gleichungen (6.) sondern identisch Null liefern. Dieses System hat *Jacobi* a. a. O. integriren gelehrt.

Ich werde jetzt zeigen, dass es immer unendlich viele Arten giebt, ein vollständiges System in ein *Jacobi*sches zu verwandeln. *Nehmen wir ν willkürlich gewählte Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_\nu$, und bestimmen die ν Gleichungen*

$$(7.)\qquad B_1(f)=0,\quad B_2(f)=0,\quad \dots\quad B_\nu(f)=0,$$

aus den identischen Relationen *):

$$(8.)\qquad \begin{cases} A_1(f) = A_1(\varphi_1)B_1(f)+A_1(\varphi_2)B_2(f)+\cdots+A_1(\varphi_\nu)B_\nu(f),\\ A_2(f) = A_2(\varphi_1)B_1(f)+A_2(\varphi_2)B_2(f)+\cdots+A_2(\varphi_\nu)B_\nu(f),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ A_\nu(f) = A_\nu(\varphi_1)B_1(f)+A_\nu(\varphi_2)B_2(f)+\cdots+A_\nu(\varphi_\nu)B_\nu(f), \end{cases}$$

so bilden die Gleichungen (7.) *ein Jacobisches System, d. h. es ist identisch*

$$(9.)\qquad B_i(B_\varkappa(f))-B_\varkappa(B_i(f)) = 0.$$

Der Beweis für die Richtigkeit dieses Satzes ist sehr leicht zu führen. Setzt man in den Gleichungen (8.) für f der Reihe nach $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_\nu$, so

---

*) Dieses System findet sich schon in meiner Abhandlung über das *Pfaff*sche Problem im 61[sten] Bande dieses Journals.

ergiebt sich durch Auflösung des Systems linearer Gleichungen

$$(10.)\qquad B_i(\varphi_x) = 0,$$

so oft i von x verschieden ist, und

$$(11.)\qquad B_i(\varphi_i) = 1.$$

Nun ist der Ausdruck auf der linken Seite der Gleichung (9.) nach dem am Ende von §. 1 bewiesenen Satze eine lineare Combination der Ausdrücke A, also auch, wenn man für die $A(f)$ aus (8.) ihre Ausdrücke in den $B(f)$ setzt, von der Form:

$$B_i(B_x(f))-B_x(B_i(f)) = C_1B_1(f)+C_2B_2(f)+\cdots+C_\nu B_\nu(f).$$

Setzt man in dieser Gleichung für f der Reihe nach $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_\nu$ und berücksichtigt die Gleichungen (10.), (11.), so erhält man hieraus der Reihe nach die Gleichungen

$$C_1 = 0,\quad C_2 = 0,\quad \dots\quad C_\nu = 0,$$

d. h. der fragliche Ausdruck muss identisch verschwinden, was zu beweisen war.

Die transformirten Gleichungen (7.) haben aber nicht allein die Eigenschaft, ein *Jacobi*sches System zu sein. Ebenso wichtig ist die zweite Eigenschaft, welche aus (10.) folgt. *Jede der transformirten Gleichungen besitzt nämlich $\nu-1$ bereits bekannte Lösungen*, denn jede wird durch diejenigen Functionen φ befriedigt, deren Index von dem der betreffenden Gleichung verschieden ist. So wird durch die Transformation (8.) ein doppelter Zweck gleichzeitig erreicht.

§. 3.

Integration des *Jacobi*schen Systems.

Ich muss des Folgenden wegen hier die Methode kurz wiederholen, welche zur Bestimmung einer gemeinsamen Lösung der Gleichungen (7.) führt. Sie besteht darin, dass man successive Lösungen sucht, welche die erste, die ersten beiden, die ersten drei etc. der Gleichungen (7.) befriedigen. Es handelt sich also nur um eine Darstellung des Weges, welcher von einer simultanen Lösung ψ_{i-1} der ersten $i-1$ Gleichungen (7.) zu einer simultanen Lösung ψ_i gelangen lässt, welche auch noch der i^{ten} Gleichung genügt. Man hat dann der Voraussetzung nach ψ_{i-1} so bestimmt, dass

$$B_1(\psi_{i-1}) = 0,\quad B_2(\psi_{i-1}) = 0,\quad \dots\quad B_{i-1}(\psi_{i-1}) = 0.$$

Daraus folgt wegen der identischen Relationen

$$B_i(B_x(\psi_{i-1})) = B_x(B_i(\psi_{i-1})),$$

dass auch

$$\psi'_{i-1} = B_i(\psi_{i-1}), \quad \psi''_{i-1} = B_i(\psi'_{i-1}) \quad \text{etc.}$$

den ersten $i-1$ Gleichungen (7.) genügen. Ist nun $\psi_{i-1}^{(\mu)}$ die erste Function dieser Reihe, welche sich als Function von $\psi_{i-1}, \psi'_{i-1}, \dots \psi_{i-1}^{(\mu-1)}, \psi_i, \psi_{i+1}, \dots \varphi_\nu$ darstellen lässt, und betrachtet man ψ_i als Function eben dieser Ausdrücke, so hat man

$$0 = B_i(\psi_i) = B_i(\varphi_i)\frac{\partial\psi_i}{\partial\varphi_i} + B_i(\varphi_{i-1})\frac{\partial\psi_i}{\partial\varphi_{i-1}} + \dots + B_i(\varphi_\nu)\frac{\partial\psi_i}{\partial\varphi_\nu}$$
$$+ B_i(\psi_{i-1})\frac{\partial\psi_i}{\partial\psi_{i-1}} + B_i(\psi'_{i-1})\frac{\partial\psi_i}{\partial\psi'_{i-1}} + \dots + B_i(\psi_{i-1}^{(\mu-1)})\frac{\partial\psi_i}{\partial\psi_{i-1}^{(\mu-1)}}$$

oder

$$(12.)\qquad 0 = \frac{\partial\psi_i}{\partial\varphi_i} + \psi'_{i-1}\frac{\partial\psi_i}{\partial\psi_{i-1}} + \psi''_{i-2}\frac{\partial\psi_i}{\partial\psi'_{i-1}} + \dots + \psi_i^{(\mu)}\frac{\partial\psi_i}{\partial\psi_{i-1}^{(\mu-1)}}.$$

Jede Lösung ψ_i dieser partiellen Differentialgleichung mit $\mu+1$ unabhängigen Variabeln ist zugleich eine simultane Lösung der ersten i Gleichungen (7.).

Die Anzahl von Lösungen, welche $i-1$ Gleichungen mit n Variabeln gemein haben, kann nie grösser als $n-(i-1)$ sein; daher kann auch die Anzahl der Functionen

$$\psi_{i-1}, \quad \psi'_{i-1}, \quad \dots \quad \psi_{i-1}^{(\mu-1)}, \quad \varphi_i, \quad \varphi_{i+1}, \quad \dots \quad \varphi_\nu$$

diese Zahl nicht übersteigen, oder es kann μ höchstens gleich $n-\nu$ werden. Die Gleichung (12.) ist also eine lineare partielle Differentialgleichung mit höchstens $n-\nu+1$ Variabeln; und die Bestimmung einer gemeinsamen Lösung aller ν Gleichungen erfordert also die Kenntniss je einer Lösung von ν Gleichungen mit $n-\nu+1$ unabhängigen Variabeln, oder was dasselbe ist, die Kenntniss je eines Integrals von ν Systemen von je $n-\nu$ simultanen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Um *alle* verschiedenen simultanen Lösungen des Systems aufzufinden, muss man zunächst die letzte der ν verschiedenen Gleichungen (12.) *vollständig* integriren. Ist in derselben $\mu = n-\nu$, so hat man sofort alle gemeinsamen Lösungen gefunden. Ist aber μ kleiner, so findet man hierdurch nur einen gewissen Cyclus dieser gemeinsamen Lösungen, und man muss weitere Lösungen der vorhergehenden Gleichungen (12.) aufsuchen.

Wenn der erste Fall eintritt, so findet man $n-\nu$ gemeinsame Lösungen, und es existiren also wirklich so viele Lösungen. Im anderen Falle kann man einen Beweis dafür fordern, dass wirklich so viel Lösungen vorhanden

sind. Diesen Beweis kann man leicht in folgender Art führen. Seien x gemeinsame Lösungen der Gleichungen (7.) bekannt. Führen wir diese in das System (7.) als Variable ein, neben $n-x$ anderen Variabeln, so verschwinden in allen Gleichungen die Glieder, in welchen nach der ersten Art von Variabeln differentiirt wird. Man hat also dann ein System von ν Gleichungen mit nur $n-x$ Variabeln vor sich, in welchem die gefundenen x Lösungen die Rolle von Constanten spielen. Dieses neue System ist noch ein *Jacobi*sches, und hat demnach wenigstens *eine* von den früheren verschiedene Lösung, sobald nur $n-x>\nu$. Es giebt also immer noch weitere Lösungen bis zu $x=n-\nu$, d. h. das System hat $n-\nu$ gemeinsame Lösungen.

§. 4.

Die Integration der partiellen Differentialgleichungen.

Die Integration der partiellen Differentialgleichungen mit n unabhängigen Variabeln führt bekanntlich nach *Jacobi* auf die Aufgabe, successive eine simultane Lösung für je ein System von 1, 2, 3, ... $n-1$ linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zu suchen.

Bedienen wir uns des von *Jacobi* eingeführten Symbols

$$(\varphi,\psi) = \sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial p_i}-\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\right),$$

wo die p die Differentialquotienten der unbekannten Function nach den x bedeuten; ist $f=c$ die gegebene Gleichung, und sind

$$f_1=c_1,\quad f_2=c_2,\quad \dots\quad f_{n-1}=c_{n-1}$$

die Gleichungen, welche mit $f=c$ zusammen diese als Functionen der x und und der willkürlichen Constanten c bestimmen, so erhält man

f_1 als Lösung von $(f_1,\ f)=0$,

f_2 als Lösung von $(f_2,\ f)=0$, $(f_2,\ f_1)=0$,

. . . .

f_{n-1} als Lösung von $(f_{n-1},f)=0$, $(f_{n-1},f_1)=0$, ... $(f_{n-1},f_{n-2})=0$.

Jedes dieser Systeme ist bereits ein *Jacobi*sches; aber diese Eigenschaft kommt bei der Anwendung des in §. 3 entwickelten Verfahrens nur in sofern in Betracht, als dasselbe ein *vollständiges* ist.

Man hat aber bei diesem System noch den weitern Vortheil, dass man für das erste System schon die Lösung f, für das zweite die Lösungen f und f_1, etc., für das letzte f, f_1, ... f_{n-2} kennt. Die Ordnungen der Integrationen

welche man bei den verschiedenen Systemen auszuführen hat, erniedrigen sich dadurch um weitere 1, 2, ... $n-1$ Einheiten, und man bedarf also zur Aufstellung sämmtlicher Functionen f je eines Integrals von

1 System	von	$2n-2$	Differentialgleichungen	erster	Ordnung
2 Systemen	-	$2n-4$	-	-	-
3 -	-	$2n-6$	-	-	-
$n-1$ -	-	2	-	-	-

§. 5.

Darstellung der von Herrn *Weiler* gegebenen Vereinfachung von *Jacobis* Methode der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.

In *Schlömilchs* Zeitschrift für Mathematik, Jahrgang 1863 p. 264, hat Herr *Weiler* eine Untersuchung über das in Rede stehende Problem veröffentlicht, in welcher eine Vereinfachung der im vorigen §. auseinandergesetzten Integrationsmethode enthalten ist.

Diese Vereinfachung, welche die Anzahl der erforderlichen Integrationen verringert, und sich bei genauerer Prüfung als eine natürliche Fortentwickelung der *Jacobi*schen Methode erweist, besteht in folgendem.

Die Systeme, deren successive simultane Integration die Aufgabe erfordert:

1. $(f_1,\ f)=0,$

2. $(f_2,\ f)=0,\quad (f_2,\ f_1)=0,$

. . . .

$n-1$. $(f_{n-1},f)=0,\quad (f_{n-1},f_1)=0,\quad \dots\quad (f_{n-1},f_{n-2})=0$

sind nicht völlig unabhängig von einander; vielmehr unterscheidet sich jedes folgende System nur durch den Hinzutritt einer einzigen weitern Gleichung.

Um auf die vorliegenden Systeme die oben (§. 3) auseinandergesetzte Methode anwenden zu können, muss jedes System in ein System von der Form (7.) transformirt werden. Dabei kann jedesmal ein neues System von Functionen φ angewandt werden. Wir wollen aber hierüber nun folgendes festsetzen:

1. Bei jedem folgenden System sollen immer wieder dieselben Functionen φ benutzt werden, und nur eine einzige neue Function φ soll hinzutreten.

2. Die Function φ_i, welche bei dem i^{ten} System hinzugefügt werden muss, soll eine aus der Reihe der simultanen Lösungen sein, welche man

für die $i-2$ ersten transformirten Gleichungen des vorhergehenden Systems gefunden hat.

3. Statt der Gleichungen des i^{ten} Systems soll man, um dieselben auf die Form des Systems (7.) zu transformiren, die schon transformirten Gleichungen des $(i-1)^{\text{ten}}$ System benutzen, und nur die letzte Gleichung unverändert hinzufügen.

Die transformirten Gleichungen, welche aus dem obigen Systeme hervorgehen, bezeichne ich durch

$$\begin{array}{ll} 1. & B_1^{(1)}(f_1)=0, \\ 2. & B_1^{(2)}(f_2)=0, \quad B_2^{(2)}(f_2)=0, \\ \ldots & \ldots \\ n-1. & B_1^{(n-1)}(f_{n-1})=0, \quad B_2^{(n-1)}(f_{n-1})=0, \quad \ldots \quad B_{n-1}^{(n-1)}(f_{n-1})=0. \end{array}$$

Nach der Bestimmung No. 3 sollen nun

$$B_1^{(i)}(F), \quad B_2^{(i)}(F), \quad \ldots \quad B_i^{(i)}(F)$$

sich aus folgenden Gleichungen bestimmen:

$$(13.)\quad \left\{\begin{array}{l} B_1^{(i-1)}(F) = B_1^{(i-1)}(\varphi_1)B_1^{(i)}(F)+B_1^{(i-1)}(\varphi_2)B_2^{(i)}(F)+\cdots+B_1^{(i-1)}(\varphi_i)B_i^{(i)}(F), \\ B_2^{(i-1)}(F) = B_2^{(i-1)}(\varphi_1)B_1^{(i)}(F)+B_2^{(i-1)}(\varphi_2)B_2^{(i)}(F)+\cdots+B_2^{(i-1)}(\varphi_i)B_i^{(i)}(F), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_{i-1}^{(i-1)}(F) = B_{i-1}^{(i-1)}(\varphi_1)B_1^{(i)}(F)+B_{i-1}^{(i-1)}(\varphi_2)B_2^{(i)}(F)+\cdots+B_{i-1}^{(i-1)}(\varphi_i)B_i^{(i)}(F), \\ (f_{i-1},F) = (f_{i-1},\varphi_1)B_1^{(i)}(F)+(f_{i-1},\varphi_2)B_2^{(i)}(F)+\cdots+(f_{i-1},\varphi_i)B_i^{(i)}(F). \end{array}\right.$$

Nun ist, weil bei der Bestimmung der $B^{(i-1)}$ die ersten $i-1$ Functionen φ bereits benutzt sein sollten:

$$B_h^{(i-1)}(\varphi_k)=0, \quad B_k^{(i-1)}(\varphi_k)=1,$$

wenn h und k kleiner als i. Ferner sollte φ_i eine simultane Lösung der Gleichungen

$$B_1^{(i-1)}(\varphi_i)=0, \quad B_2^{(i-1)}(\varphi_i)=0, \quad \ldots \quad B_{i-2}^{(i-1)}(\varphi_i)=0$$

sein, welche natürlich von f_{i-1} verschieden sein muss. Hierdurch reduciren sich die Gleichungen (13.) auf folgende:

$$(14.)\quad \left\{\begin{array}{l} B_1^{(i-1)}(F) = B_1^{(i)}(F), \\ B_2^{(i-1)}(F) = B_2^{(i)}(F), \\ \ldots\ldots \\ B_{i-2}^{(i-1)}(F) = B_{i-2}^{(i)}(F), \\ B_{i-1}^{(i-1)}(F) = B_{i-1}^{(i)}(F)+B_{i-1}^{(i-1)}(\varphi_i)B_i^{(i)}(F), \\ (f_{i-1},F) = (f_{i-1},\varphi_1)B_1^{(i)}(F)+(f_{i-1},\varphi_2)B_2^{(i)}(F)+\cdots+(f_{i-1},\varphi_i)B_i^{(i)}(F). \end{array}\right.$$

Man sieht also, *dass bei dieser Art der Bestimmung jedes folgende System eine Reihe von transformirten Gleichungen mit dem vorhergehenden gemein hat; nur die letzte Gleichung des vorhergehenden Systems kommt in dem folgenden nicht vor, und dafür treten in dem letztern zwei neue Gleichungen hinzu.*

Man kann sonach das ganze System der transformirten Gleichungen in folgendem Schema darstellen:

$$(15.)\begin{cases} 1.\ C_1(f_1)=0, \\ 2.\ D_1(f_2)=0,\ C_2(f_2)=0, \\ 3.\ D_1(f_3)=0,\ D_2(f_3)=0,\ C_3(f_3)=0, \\ \quad\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ n-2.\ D_1(f_{n-2})=0,\ D_2(f_{n-2})=0,\ D_3(f_{n-2})=0, \dots C_{n-2}(f_{n-2})=0, \\ n-1.\ D_1(f_{n-1})=0,\ D_2(f_{n-1})=0,\ D_3(f_{n-1})=0, \dots D_{n-2}(f_{n-1})=0,\ C_{n-1}(f_{n-1})=0, \end{cases}$$

wobei nach (14.) die hier durch C, D bestimmten Ausdrücke sich aus den identischen Relationen bestimmen:

$$(16.)\begin{cases} C_{i-1}(F)=D_{i-1}(F)+C_{i-1}(\varphi_i)C_i(F) \\ (f_{i-1},F)=(f_{i-1},\varphi_1)D_1(F)+(f_{i-1},\varphi_2)D_2(F)+\cdots+(f_{i-1},\varphi_{i-1})D_{i-1}(F) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +(f_{i-1},\varphi_i)C_i(F). \end{cases}$$

Diese beiden Gleichungen dienen dazu um $D_{i-1}(F)$ und $C_i(F)$ durch die vorhergehenden Ausdrücke darzustellen.

Die simultane Integration der Systeme (15.) wird nun dadurch wesentlich erleichtert, dass man für das i^{te} System nicht mehr eine simultane Lösung seiner ersten $i-2$ Gleichungen successive aufzusuchen braucht, sondern dass diese schon bei der Behandlung des $i-1^{\text{ten}}$ Systemes gefunden ist. Man hat also in jedem System nur noch *zwei* Integrationen vorzunehmen; *und die Bestimmung sämmtlicher Functionen f bedarf also nur der Kenntniss je eines Integrals für ein System von $2n-2$ gewöhnlichen Differentialgleichungen, und für je zwei Systeme von $2n-4$, $2n-6$, ... 2 gewöhnlichen Differentialgleichungen.*

Aber nur dann sind die Integrationen immer von so geringer Zahl, wenn die Zahlen μ überall ihre höchsten Werthe erreichen. Wenn bei irgend einer Integration der Cyclus der daraus abgeleiteten simultanen Integrale sich früher schliesst, so kann man endlich zu einer Stelle gelangen, wo entweder keine Function φ_i mehr gegeben ist, welche von f_{i-1} verschieden, oder es wird doch nur eine Function dieser Art bekannt sein, so dass man keine ge-

meinsame Lösung der ersten $i-2$ Gleichungen des folgenden Systems zur Verfügung hat.

§. 6.

Das *Pfaff*sche Problem.

Die Aufgabe, den Differentialausdruck

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_{2n} dx_{2n}$$

in die Form

$$F_1 df_1 + F_2 df_2 + \cdots + F_n df_n$$

überzuführen, habe ich im 60sten und 61sten Bande dieses Journals auf ein System von $\frac{n.n+1}{2}$ simultanen partiellen Differentialgleichungen zurückgeführt, welche die Functionen f definiren. Diese Differentialgleichungen habe ich durch

$$(f_i) = 0, \quad [f_i, f_k] = 0$$

bezeichnet; und zwar bestimmen sich die Functionen f als simultane Lösung folgender Systeme:

$$\begin{array}{ll} f_1 : (f_1) = 0, & \\ f_2 : (f_2) = 0, & [f_2, f_1] = 0, \\ f_3 : (f_3) = 0, & [f_3, f_1] = 0, \quad [f_3, f_2] = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f_n : (f_n) = 0, & [f_n, f_1] = 0, \quad [f_n, f_2] = 0, \quad \ldots \quad [f_n, f_{n-1}] = 0. \end{array}$$

Jedes dieser Systeme bildet nach den a. a. O. bewiesenen Relationen ein vollständiges System in dem oben festgestellten Sinne, aber nicht ein *Jacobi*sches System. Denn wenn $f_1, f_2, \ldots f_{i-1}$ den ersten $i-1$ Systemen genügen, so bestehen für das i^{te} System die Relationen ($k, h = 1, 2, \ldots i-1$):

$$[(f_i), f_k] - ([f_i, f_k]) = [f_i, f_k], \quad [[f_i, f_h], f_k] - [[f_i, f_k], f_h] = 0.$$

Auf die obigen Systeme sind daher die Betrachtungen der §§. 2, 3 sofort anwendbar, und die Aufsuchung der Functionen f bedarf daher der Kenntniss von je einem Integral für

1 System	von	$2n-1$	gewöhnlichen	Differentialgleichungen
2 Systeme	-	$2n-3$	-	-
3 -	-	$2n-5$	-	-
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
n -	-	1	-	-

Aber auch hier tritt der Umstand ein, dass jedes folgende System sich nur um *eine* hinzutretende Gleichung von dem vorhergehenden unterscheidet. Man kann daher auch die Methode des Herrn *Weiler* auf dieses Problem anwenden, *und es gelingt nach dieser im Allgemeinen die Auffindung der Functionen f durch Kenntniss je eines Integrals von einem System von $2n-1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen, und von je zwei Systemen von $2n-3$, $2n-5$, ... 1 gewöhnlichen Differentialgleichungen.*

§. 7.

Die partiellen Differentialgleichungen der Invariantentheorie.

Jede absolute Invariante einer Function von n Variabeln genügt bekanntlich einem System von n^2 linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, und es muss eine besondere Eigenschaft dieser partiellen Differentialgleichungen sein, dass sie eine gewisse Anzahl simultaner Lösungen zulassen. Ist p die Ordnung der Function, und

$$(n,p) = \frac{n.n+1\dots n+p-1}{1.2\dots p},$$

so ist (n,p) die Anzahl der Coefficienten der Function, also (n,p) die Anzahl der Variabeln, nach denen in jenen Gleichungen differentiirt wird. Die höchste Anzahl gemeinsamer Lösungen, welche jene Gleichungen besitzen können, ist also $(n,p)-n^2$; und wenn jene Gleichungen bereits ein vollständiges System bilden, so besitzen sie in der That so viele gemeinsame Lösungen, d. h. es giebt $(n,p)-n^2$ von einander unabhängige simultane Invarianten. Dies ist der einfachste, und zugleich der strengste Weg, die Existenz von so viel Invarianten wirklich nachzuweisen, und der Nachweis, dass die betreffenden Gleichungen ein vollständiges System bilden, ergänzt also eine wesentliche Lücke der Invariantentheorie.

In der That ist jener Beweis durch wirkliche Bildungen sehr leicht auszuführen. Bezeichne man mit Herrn *Aronhold* (Bd. 62, p. 291 dieses Journals) die n^2 partiellen Differentialgleichungen durch

$$(1.)\quad D_{\varrho\sigma}(\Pi) = 0,$$

wo ϱ, σ die Werthe 1, 2, ... n zu erhalten haben. Man findet dann wirklich, dass die Operationen

$$D_{\varrho\sigma}(D_{\varkappa\lambda}(\Pi))-D_{\varkappa\lambda}(D_{\varrho\sigma}(\Pi))$$

nur auf lineare Combinationen der Gleichungen (1.) führen, womit jenes

System als ein vollständiges charakterisirt ist. Man erhält nämlich, wie eine sehr einfache Rechnung lehrt, folgende identische Relationen:

$$(2.)\quad \left\{\begin{aligned}
&D_{\varrho\varrho}(D_{\varrho\sigma}(\Pi))-D_{\varrho\sigma}(D_{\varrho\varrho}(\Pi)) = -D_{\varrho\sigma}(\Pi),\\
&D_{\varrho\varrho}(D_{\sigma\varrho}(\Pi))-D_{\sigma\varrho}(D_{\varrho\varrho}(\Pi)) = D_{\sigma\varrho}(\Pi),\\
&D_{\varrho\varrho}(D_{\sigma\sigma}(\Pi))-D_{\sigma\sigma}(D_{\varrho\varrho}(\Pi)) = 0,\\
&D_{\varrho\sigma}(D_{\sigma\varrho}(\Pi))-D_{\sigma\varrho}(D_{\varrho\sigma}(\Pi)) = D_{\sigma\sigma}(\Pi)-D_{\varrho\varrho}(\Pi),\\
&D_{\varrho\varrho}(D_{\sigma\tau}(\Pi))-D_{\sigma\tau}(D_{\varrho\varrho}(\Pi)) = 0,\\
&D_{\varrho\sigma}(D_{\varrho\tau}(\Pi))-D_{\varrho\tau}(D_{\varrho\sigma}(\Pi)) = 0,\\
&D_{\varrho\sigma}(D_{\tau\varrho}(\Pi))-D_{\tau\varrho}(D_{\varrho\sigma}(\Pi)) = D_{\tau\sigma}(\Pi),\\
&D_{\sigma\varrho}(D_{\tau\varrho}(\Pi))-D_{\tau\varrho}(D_{\sigma\varrho}(\Pi)) = 0,\\
&D_{\varrho\sigma}(D_{\tau\lambda}(\Pi))-D_{\tau\lambda}(D_{\varrho\sigma}(\Pi)) = 0.
\end{aligned}\right.$$

In diesen Gleichungen bedeuten die in derselben Gleichung verschieden bezeichneten Indices auch wirklich von einander verschiedene Zahlen; die Gleichungen (2.) umfassen dann alle möglichen aus (1.) zu bildenden Combinationen.

Die Gleichungen (2.) gelten übrigens auch noch, wenn das System (1.) sich auf *simultane* Invarianten bezieht.

Giessen, den 5. Februar 1865.



Ueber diejenigen Curven, deren Coordinaten sich als hyperelliptische Functionen eines Parameters darstellen lassen.

(Von Herrn *Brill.*)

Vorliegende Abhandlung reiht sich an die Untersuchungen über die Anwendung der *Abel*schen Functionen auf die Geometrie, welche Herr *Clebsch* in einer Reihe von Aufsätzen kürzlich veröffentlicht hat*), an. Die geometrische Behandlung. also die Aufstellung der Probleme und die Deutung der Lösungen, lässt sich für den vorliegenden Fall ($p = 2$) an vielen Stellen der für $p = 1$ ganz analog durchführen, so dass ich dieselbe, sowie die ähnlich lautenden geometrischen Resultate, grösstentheils glaube unterdrücken zu können. Von einigem Interesse dürften dagegen die zur Lösung der geometrischen Probleme nöthigen vorangeschickten analytischen Betrachtungen über hyperelliptische Thetaquotienten sein, deren Ausgangspunkt ein *Riemann*scher Satz aus der Theorie der *Abel*schen Functionen bildet.

Indem wir die allgemein bekannte Darstellung der hyperelliptischen Functionen von *Rosenhain* zu Grunde legen, führen wir die Bezeichnungen ein:

$$du = \frac{B + Cx}{\sqrt{X}}dx; \quad du' = \frac{B' + C'x}{\sqrt{X}}dx;$$

$$v = \int_{c_1}^{x_1} du + \int_{c_2}^{x_2} du; \quad v' = \int_{c_1}^{x_1} du' + \int_{c_2}^{x_2} du';$$

wo $X = x.1-x.1-\varkappa^2 x.1-\lambda^2 x.1-\mu^2 x$; B, C, B', C' so bestimmte Constanten sind, dass:

$$\int_0^1 du = \frac{i\pi}{2}, \quad \int_{\frac{1}{\varkappa^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} du = 0, \quad \int_{-\infty}^0 du = \tfrac{1}{2}.\log p, \quad \int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}} du = \tfrac{1}{2}.2A,$$

$$\int_0^1 du' = 0, \quad \int_{\frac{1}{\varkappa^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} du' = \frac{i\pi}{2}, \quad \int_{-\infty}^0 du' = \tfrac{1}{2}.2A, \quad \int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}} du' = \tfrac{1}{2}.\log q.$$

---

*) Dieses Journal, Bd. 63, S. 189; Bd. 64, S. 43, S. 210.

Ist ferner:

$$\varphi_{33}(v, v') = \sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{m^2 \log p + n^2 \log q + 4mn.A + 2m.v + 2n.v'};$$

so drücken sich die sechs Functionen φ, deren Quotienten in den von *Rosenhain* aufgestellten Formeln ((97.) seiner Preisschrift*)) von $\sqrt{X}$ unabhängig sind, die also einen gemeinsamen Nullpunkt haben — bei *Rosenhain* $x_1, \sqrt{X_1} = x_2, \sqrt{X_2}$ — durch φ_{33} folgendermassen aus (wenn man unter p einen, übrigens für alle verschiedenen Factor versteht, der für keinen Werth der x verschwindet):

$$\varphi_{00}(v, v') = p.\varphi_{33}\Big(v + \int_{\frac{1}{\mu^2}}^{\infty} du,\ v' + \int_{\frac{1}{\mu^2}}^{\infty} du'\Big); \quad \varphi_{10}(v, v') = p.\varphi_{33}\Big(v + \int_{\frac{1}{\mu^2}}^{0} du,\ v' + \int_{\frac{1}{\mu^2}}^{0} du'\Big);$$

$$\varphi_{20}(v, v') = p.\varphi_{33}\Big(v + \int_{\frac{1}{\mu^2}}^{1} du,\ v' + \int_{\frac{1}{\mu^2}}^{1} du'\Big); \quad \varphi_{31}(v, v') = p.\varphi_{33}\Big(v + \int_{\frac{1}{\mu^2}}^{\frac{1}{\varkappa^2}} du,\ v' + \int_{\frac{1}{\mu^2}}^{\frac{1}{\varkappa^2}} du'\Big);$$

$$\varphi_{32}(v, v') = p.\varphi_{33}\Big(v + \int_{\frac{1}{\mu^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} du,\ v' + \int_{\frac{1}{\mu^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} du'\Big).$$

Wir bestimmen zunächst die unteren Grenzen c_1 und c_2. Würde für $x_1, \sqrt{X_1} = x_2, \sqrt{X_2}$: $v = v' = 0$, d. h. verschwänden für diesen Werth die sechs unpaaren φ, wie es für diesen Werth von x_1 mit den sechs obigen φ der Fall ist, so wären die unteren Grenzen einander gleich. Dies wird daher erreicht, wenn man statt v, v' das Argumentenpaar:

$$w = v + \int_0^{\frac{1}{\varkappa^2}} du = \int_\gamma^{x_1} du + \int_\gamma^{x_2} du, \quad w' = v' + \int_0^{\frac{1}{\varkappa^2}} du' = \int_{\gamma'}^{x_1} du' + \int_{\gamma'}^{x_2} du',$$

einführt, wodurch die obigen: φ_{33} φ_{00} φ_{10} φ_{20} φ_{31} φ_{32} der Reihe nach in die unpaaren: φ_{12} φ_{21} φ_{31} φ_{01} φ_{10} φ_{13} übergehen. Hierin ist γ und γ' verschieden, indem im Allgemeinen die oberen Grenzen γ und γ' verschieden sind in:

$$\int_{c_1}^{\gamma} du + \int_{c_2}^{\gamma} du = \int_0^{\frac{1}{\varkappa^2}} du, \quad \int_{c_1}^{\gamma'} du' + \int_{c_2}^{\gamma'} du' = \int_0^{\frac{1}{\varkappa^2}} du'.$$

Riemann verfügt nun (Bd. 54, §. 22 und 24 dieses Journals) über die unteren

*) Mém. présentés à l'Institut, tome XI.

Grenzen so, dass das von ihm betrachtete Theta, unser φ_{33}, identisch verschwindet, wenn man als Argumente $\int\limits_{\gamma}^{\infty_1} du, \int\limits_{\gamma'}^{\infty_1} du'$ wählt, dass also:

$$\varphi_{33}\Big(\int\limits_{\gamma}^{\infty_1} du, \int\limits_{\gamma'}^{\infty_1} du'\Big) = 0.$$

Seinen Betrachtungen lässt sich aber auch jede andere der 16 Functionen φ zu Grunde legen, und wir ziehen vor, eine der sechs unpaaren, z. B. φ_{31}, zur Bedingungsgleichung für die unteren Grenzen zu wählen und bestimmen γ, γ' so, dass:

$$\varphi_{31}\Big(\int\limits_{\gamma}^{\infty_1} du, \int\limits_{\gamma'}^{\infty_1} du'\Big) = 0.$$

Nun verschwindet aber (*Rosenhain*, F. (97.)) der Zähler in dem Quotienten:

$$\frac{\varphi_{10}(v, v')}{\varphi_{00}(v, v')} = \frac{\varphi_{31}(w, w')}{\varphi_{21}(w, w')} = \text{const.} \sqrt{x_1 x_2}$$

für $x_2 = 0$; man hat mithin

$$0 = \varphi_{31}\Big(\int\limits_{\gamma}^{\infty_1} du \pm \int\limits_{\gamma}^{0} du, \int\limits_{\gamma'}^{\infty_1} du' \pm \int\limits_{\gamma'}^{0} du'\Big) = \varphi_{31}\Big(\int\limits_{0}^{\infty_1} du, \int\limits_{0}^{\infty_1} du'\Big)$$

also:

$$\gamma = \gamma' = 0.$$

Den Vortheil der Gleichheit von γ und γ', sowie manche später ersichtliche andere hätte uns die frühere Grenzbestimmung nicht geboten. — Uebrigens wird der Uebergang zu den Argumenten mit anderen unteren Grenzen durch blosse Vertauschung der φ bewerkstelligt.

Wir notiren hier noch die unteren Grenzen, für welche die sechs unpaaren φ, die uns gemäss unserer Entscheidung über die unteren Grenzen von jetzt ab ausschliesslich beschäftigen werden, identisch verschwinden. Man hat aus Obigem:

$$(1.)\quad \begin{cases} 0 = \varphi_{31}\Big(\int\limits_{0}^{\infty_1} du, \int\limits_{0}^{\infty_1} du'\Big) = \varphi_{01}\Big(\int\limits_{1}^{\infty_1} du, \int\limits_{1}^{\infty_1} du'\Big) = \varphi_{10}\Big(\int\limits_{\frac{1}{\varkappa^2}}^{\infty_1} du, \int\limits_{\frac{1}{\varkappa^2}}^{\infty_1} du'\Big) \\ 0 = \varphi_{13}\Big(\int\limits_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\infty_1} du, \int\limits_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\infty_1} du'\Big) = \varphi_{12}\Big(\int\limits_{\frac{1}{\mu^2}}^{\infty_1} du, \int\limits_{\frac{1}{\mu^2}}^{\infty_1} du'\Big) = \varphi_{21}\Big(\int\limits_{\infty}^{\infty_1} du, \int\limits_{\infty}^{\infty_1} du'\Big); \end{cases}$$

die unteren Grenzen in diesen Argumenten sind jedesmal die zweiten Null-

punkte (*Riemann*, §. 22) der sechs unpaaren Functionen $\varphi_{ik}\left(\int\limits_0^{x_1} du, \int\limits_0^{x_1} du'\right)$, die ausserdem den Nullpunkt $x_1 = 0$ gemeinsam haben. — Indem wir in der Folge die unteren Grenzen gleich Null annehmen, wenn wir Nichts darüber zufügen, und das zweite Argument in den Klammern weglassen, setzen wir:

$$u_i = \int\limits_0^{x_i} \frac{B+Cx}{\sqrt{X}}\,dx; \quad u_i' = \int\limits_0^{x_i} \frac{B'+C'x}{\sqrt{X}}\,dx; \quad \varphi_{ik}(u_i) = \varphi_{ik}(u_i, u_i').$$

Die Functionen φ haben die Eigenschaft, dass sie, geschrieben mit den Argumenten $u_i - u_k$, $u_i' - u_k'$ verschwinden für zwei Werthe von x_i, sowie für zwei Werthe von x_k. Betrachten wir also ein Product aus Functionen φ gebildet mit solchen Argumenten, und alternirend für $u, u_1, \ldots u_\mu$, am besten aus lauter φ_{31} bestehend, weil wir auch sonst diese Function schon auszeichneten, also:

$$\varphi_{31}(u-u_1)\,\varphi_{31}(u-u_2)\ldots\varphi_{31}(u-u_\mu)\,\varphi_{31}(u_1-u_2)\ldots\varphi_{31}(u_{\mu-1}-u_\mu) = \varDelta(u, u_1, u_2, \ldots u_\mu),$$

so sind die Nullpunkte des Products, insofern man es als eine Function von u oder von einem der u_i allein betrachtet, leicht aufstellbar: dasselbe verschwindet, als Function von u z. B., für $x = 0$, und zwar von der μ^{ten} Ordnung *); für $x = x_1$, $x = x_2$, ... $x = x_\mu$ (wo das Vorzeichen der Wurzeln für alle dasselbe) je von der ersten Ordnung. Es ist ferner periodisch und erhält, bei Vermehrung von u, u' um eine der Perioden: $\log p$, $2A$ oder $2A$, $\log q$, einen von der Summe:

$$\mu . u - u_1 - u_2 - \cdots - u_\mu \quad \text{oder von} \quad \mu . u' - u_1' - u_2' - \cdots - u_\mu'$$

abhängigen Factor. Derselbe wird aber blos von u, respective u' abhängen, wenn man zu dem obigen Product $\varDelta$ den Factor:

$$\varphi_{31}(u + u_1 + u_2 + \cdots + u_\mu)$$

zufügt. Dividirt man noch durch das Product:

$$\varphi_{21}^{\mu+1}(u) . \varphi_{21}^{\mu+1}(u_1) . \varphi_{21}^{\mu+1}(u_2) \ldots \varphi_{21}^{\mu+1}(u_\mu),$$

so wird der Factor, den der Quotient bei Vermehrung der Argumente um eine Periode erhält, auch von u, u' unabhängig, und ist, durch Multiplication mit einem geeigneten Factor, der für keinen Werth von u, u' verschwindet, gleich

*) Ein Ausdruck werde $= 0^1$, wenn er Null wird wie $\sqrt{z-a}$ für $z = a$; er wird dann Null wie die φ in jedem ihrer Nullpunkte (*Riemann* §. 2).

± 1 zu machen (*Riemann*, §. 26). Dies gilt der Symmetrie wegen ebenso für die u_i, u_i'. — Der Quotient:

$$\frac{\varphi_{31}(u+u_1+u_2+\cdots+u_\mu).\Delta(u,u_1,u_2,\dots u_\mu)}{\varphi_{21}^{\mu+1}(u).\varphi_{21}^{\mu+1}(u_1).\varphi_{21}^{\mu+1}(u_2)\dots\varphi_{21}^{\mu+1}(u_\mu)}$$

ist also nach *Riemann* gleich einer rationalen, symmetrischen Function von x_1, $\sqrt{X_1}$; x_2, $\sqrt{X_2}$; ... x_μ, $\sqrt{X_\mu}$; x, $\sqrt{X}$, welche in Bezug auf x, $\sqrt{X}$ folgende Null- und Unendlichkeitspunkte hat:

$$\left.\begin{matrix} 0^\mu & \text{für } x=0 \\ 0^{\mu+1} & \text{für } x=0 \end{matrix}\right\}\ \text{also } \infty^1 \text{ für } x=0;$$

0^1 für x, $\sqrt{X}=x_1$, $\sqrt{X_1}$; desgl. für x, $\sqrt{X}=x_2$, $\sqrt{X_2}$; ... x, $\sqrt{X}=x_\mu$, $\sqrt{X_\mu}$; 0^1 für zwei weitere Punkte, die von $u_1+u_2+\cdots+u_\mu$ abhängen, nämlich die zwei Nullpunkte von $\varphi_{31}(u+u_1+u_2+\cdots+u_\mu)$ — nicht etwa von einer anderen der 16 Functionen φ, wie der einfachste Fall $\mu=1$ in Verbindung mit dem Untenstehenden lehrt, — endlich noch:

$$\infty^{\mu+1} \text{ für } x=\infty.$$

Diesen Bedingungen genügt für gerade μ eine Function von der Form:

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\{f(x)+\varphi(x).\sqrt{X}\},$$

wo f und φ rationale Functionen von x resp. von der Ordnung $\frac{1}{2}\mu+1$ und $\frac{1}{2}\mu-2$ sind. Denn die Zahl der zur Herstellung von μ Nullpunkten im Zähler verwendbaren willkürlichen Coefficienten beträgt μ. Der Klammerausdruck, gleich Null gesetzt, giebt eine Gleichung vom $\mu+2^{\text{ten}}$ Grad, woraus sich die zwei noch übrigen abhängigen Nullpunkte berechnen lassen; für $x=0$ wird der Ausdruck ∞^1, für $\infty:\infty^{\mu-1}$ wie verlangt. Obiger Ausdruck lässt sich also in Form einer Determinante schreiben, deren $\mu+1$ Reihen in den x, x_1, x_2, ... x_μ gebildet sind: nämlich für gerade μ ist:

$$(2.)\quad\left\{\begin{aligned} &\frac{\varphi_{31}(u+u_1+\cdots+u_\mu).\Delta(u,u_1,\dots u_\mu)}{\varphi_{21}^{\mu+1}(u).\varphi_{21}^{\mu+1}(u_1)\dots\varphi_{21}^{\mu+1}(u_\mu)} \\ &=\frac{p}{\sqrt{xx_1x_2\dots x_\mu}}.\begin{vmatrix} \sqrt{X}.x^{\frac{1}{2}\mu-2} & \sqrt{X}.x^{\frac{1}{2}\mu-3} & \dots & \sqrt{X} & x^{\frac{1}{2}\mu+1} & x^{\frac{1}{2}\mu} & \dots & x & 1 \\ \sqrt{X_1}.x_1^{\frac{1}{2}\mu-2} & \sqrt{X_1}.x_1^{\frac{1}{2}\mu-3} & \dots & \sqrt{X_1} & x_1^{\frac{1}{2}\mu+1} & x_1^{\frac{1}{2}\mu} & \dots & x_1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sqrt{X_\mu}.x_\mu^{\frac{1}{2}\mu-2} & \sqrt{X_\mu}.x_\mu^{\frac{1}{2}\mu-3} & \dots & \sqrt{X_\mu} & x_\mu^{\frac{1}{2}\mu+1} & x_\mu^{\frac{1}{2}\mu} & \dots & x_\mu & 1 \end{vmatrix}\end{aligned}\right.;$$

wo p hier wie in der Folge einen Factor bedeutet, der für keinen Werth von x, x_1, ... x_μ Null wird. Hieraus lässt sich leicht durch Nullsetzen von x_μ,

die Gleichung für $\mu-1$, also eine ungerade Zahl, herleiten; setzt man dann wieder μ für $\mu-1$, so kommt für ein ungerades μ statt des Ausdrucks rechts in (2.) der folgende (den wir in der Folge mit dem in (2.) zusammen mit $\Phi_\mu(x, \sqrt{X})$ bezeichnen wollen):

$$(2^a.)\qquad p.\begin{vmatrix} \sqrt{X}.x^{\frac{1}{2}(\mu-3)} & \sqrt{X}.x^{\frac{1}{2}(\mu-5)} & \dots & \sqrt{X} & \frac{\sqrt{X}}{x} & x^{\frac{1}{2}(\mu+3)} & x^{\frac{1}{2}(\mu+1)} & \dots & x & 1 \\ \sqrt{X_1}.x_1^{\frac{1}{2}(\mu-3)} & \sqrt{X_1}.x_1^{\frac{1}{2}(\mu-5)} & \dots & \sqrt{X_1} & \frac{\sqrt{X_1}}{x_1} & x_1^{\frac{1}{2}(\mu+3)} & x_1^{\frac{1}{2}(\mu+1)} & \dots & x_1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sqrt{X_\mu}.x_\mu^{\frac{1}{2}(\mu-3)} & \sqrt{X_\mu}.x_\mu^{\frac{1}{2}(\mu-5)} & \dots & \sqrt{X_\mu} & \frac{\sqrt{X_\mu}}{x_\mu} & x_\mu^{\frac{1}{2}(\mu+3)} & x_\mu^{\frac{1}{2}(\mu+1)} & \dots & x_\mu & 1 \end{vmatrix}.$$

Dieser Satz (2.) und (2ᵃ.) ist ein Analogon zum dem von *Hermite* *) für elliptische Theta's aufgestellten. — Er lässt sich in mancher Weise auswerthen; so liefert er sofort den *Abel*schen Satz, also das Additionstheorem für hyperelliptische Functionen, in der von *Hermite* aufgestellten Form; ferner lassen sich, je nach den halben Periodenwerthen, die man den u (bis auf zwei willkürliche) beilegt, die Ausdrücke für sämmtliche Quotienten der 16 Functionen φ in den oberen Grenzen x_1 und x_2 bilden. — Von speciellen Fällen interessirt uns aber hier zunächst nur einer, den wir gleich unten anzuwenden haben: setzt man nämlich $x_3 = x_4 = \dots = x_\mu = 0$, so wird der Quotient links von dem Vorzeichen von $\sqrt{X}$, $\sqrt{X_1}$, $\sqrt{X_2}$ unabhängig, der Ausdruck rechts also rational und zwar:

$$(3.)\qquad \begin{cases} \Phi_3(x, \sqrt{X}) = \dfrac{\varphi_{31}(u+u_1+u_2).\varphi_{31}(u-u_1).\varphi_{31}(u-u_2).\varphi_{31}(u_1-u_2)}{\varphi_{21}^2(u).\varphi_{21}^2(u_1).\varphi_{21}^2(u_2)} \\ \qquad\qquad\qquad = p.\dfrac{x-x_1.x-x_2.x_1-x_2}{\sqrt{x x_1 x_2}}. \end{cases}$$

Auf ähnliche Betrachtungen gestützt, lässt sich eine Relation herleiten zwischen obigen algebraischen Ausdrücken und solchen Thetaquotienten, deren Argumente wesentlich aus drei Integralen erster Gattung bestehen. Wir führen hiervon einen speciellen Fall an, der uns direct auf die:

1. *Bildung der Integrale dritter Gattung* führt, nämlich:

$$(4.)\qquad \frac{\varphi_{11}(a_1-u_1-u_2).\varphi_{31}(a_1+u_1+u_2)}{\varphi_{31}^2(u_1+u_2).\varphi_{21}^2(a_1)} = p.\frac{a_1-x_1.a_1-x_2}{a_1},$$

welche Gleichung sich durch Vergleichung der Nullpunkte etc. etc. wie oben,

---

*) Brief an *Jacobi*, Bd. 32 dieses Journals.

ergiebt *). — Nun lehrt *Riemann* (§. 25), dass sich $\log\frac{\varphi_{11}(a_1+u_1+u_2)}{\varphi_{21}(a_1-u_1-u_2)}$ durch die Summe zweier Integrale dritter Gattung ausdrücken lässt. Bildet man also in der bekannten *Jacobi*schen Weise $d\log\frac{\varphi_{31}(a+u)}{\varphi_{31}(a-u)}$, indem man rechts die partiellen Differentialquotienten transformirt, so erhält man, wenn:

$$a = a_1+a_2,\quad u = u_1+u_2,$$

$$d\log\frac{\varphi(a_1+u_1+u_2)}{\varphi(a_1-u_1-u_2)}$$

$$= \left[\frac{1}{\varphi(a+u).\varphi(a-u)}\left\{\frac{\partial\varphi(a+u)\varphi(a-u)}{\partial a}du+\frac{\partial\varphi(a+u)\varphi(a-u)}{\partial a'}du'\right\}\right]_{a_2=0}$$

$$= \left[\frac{\partial\log\varphi_{31}^2(a)}{\partial a}du+\frac{\partial\log\varphi_{31}^2(a)}{\partial a'}du'\right]_{a_2=0}+\frac{1}{p.a_1-x_1.a_1-x_2}\left\{\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}}K_1+\frac{dx_2}{\sqrt{X_2}}K_2\right\},$$

wo:

$$K_1 = \left[(x_1-a_2).\sqrt{A_1}\frac{\partial\psi}{\partial a_1}-(x_1-a_1).\sqrt{A_2}\frac{\partial\psi}{\partial a_2}\right]_{a_2=0},$$

$$K_2 = \left[(x_2-a_2).\sqrt{A_1}\frac{\partial\psi}{\partial a_1}-(x_2-a_1).\sqrt{A_2}\frac{\partial\psi}{\partial a_2}\right]_{a_2=0},$$

wo wieder

$$\psi = \frac{\varphi(a+u).\varphi(a-u)}{\varphi_{31}^2(a).\varphi_{31}^2(u)}$$

für $a_2 = 0$ in den obigen rationalen Ausdruck übergeht, und wo p dasselbe wie in (4.) ist. $\left[\frac{\partial\psi}{\partial a_i}\right]_{a_2=0}$ kann nicht von $\sqrt{X_1}$, $\sqrt{X_2}$ abhängen, weil der Ausdruck rechts eine Summe von zwei Integralen dritter Gattung sein muss, daher muss auch x_2-a_1 ein Factor von K_1, x_1-a_1 ein solcher von K_2 sein

---

*) Diese Gleichung lässt sich durch einige Rechnung auch aus dem *Rosenhain*schen Formelsystem (Anhang) herleiten. Der Absatz 6*d* daselbst liefert nach einiger Reduction mittelst Formel (100.) die folgende Beziehung, welche für $a_2 = 0$ in die obige Gleichung übergeht:

$$\varphi_{11}(0)\,\varphi_{31}(v+w)\,\varphi_{31}(v-w) = \varphi_{10}^2(v)\,\varphi_{30}^2(w)-\varphi_{30}^2(v)\,\varphi_{10}^2(w)+\varphi_{00}^2(v)\,\varphi_{20}^2(w)-\varphi_{20}^2(v)\,\varphi_{00}^2(w).$$

Auch die Gleichung (3.) lässt sich als rationale Thetarelation darstellen und lehrt, auch ohne *Riemann*sche Theorie (*Hermite*, compt. rend. Bd. 40), die höchst einfache Reduction solcher Theta, deren Quotienten Herr *Prym* (Neue Theorie der ultraellipt. Funct. Wien 1865, S. 70) mit Unrecht als die allgemeinsten eines algebraischen Ausdrucks fähigen ultraellipt. Thetaquotienten bezeichnet, solcher nämlich, deren Argumente aus der Summe von *drei* Integralen bestehen, auf solche mit nur zweien. Aus den obigen Formeln und einigen analog gebildeten lassen sich leicht algebraische Ausdrücke für die Quotienten zweier solcher *Rosenhain*scher Theta's ableiten, deren Argumente eine Summe beliebig vieler Integrale sind.

und diese übrigens noch Functionen von resp. x_1 und x_2 allein sein, so dass man hat:

$$\text{const.}\left[\log\frac{\varphi_{31}(\alpha-u)}{\varphi_{31}(\alpha+u)}-\frac{\partial\log\varphi_{21}^2(\alpha)}{\partial\alpha}.u-\frac{\partial\log\varphi_{21}^2(\alpha)}{\partial\alpha'}.u'\right]_{\alpha_2=0}$$
$$=\int\limits_0^{x_1}\frac{dx}{x-a_1}.\frac{f(x)}{\sqrt{X}}+\int\limits_0^{x_2}\frac{dx}{x-a_1}.\frac{f(x)}{\sqrt{X}}.$$

Setzt man jetzt $x_2=0$, also $u_2=0$, so lässt sich K_1 und K_2 aus (4.) bilden, man erhält: $f(x)=x$. Aehnlich bildet man die Gleichung (4.) für die übrigen fünf unpaaren φ und erhält Relationen, die sich in die folgende zusammenfassen lassen *), für $u=u_1+u_2$, $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$, und $\nu=0,\ 1,\ \frac{1}{k^2},\ \dots\ \infty$:

$$(5.)\quad\begin{cases}\dfrac{a_1-\nu}{\sqrt{A_1}}\left[-\log\dfrac{\varphi_{31}(\alpha-u)}{\varphi_{31}(\alpha+u)}+\dfrac{\partial\log\varphi_{21}^2(\alpha)}{\partial\alpha}u+\dfrac{\partial\log\varphi_{21}^2(\alpha)}{\partial\alpha'}u'\right]_{u_2=\nu}\\[2ex]\qquad=\displaystyle\int\limits_0^{x_1}\frac{dx}{x-a_1}\frac{x-\nu}{\sqrt{X}}+\int\limits_0^{x_2}\frac{dx}{x-a_1}\frac{x-\nu}{\sqrt{X}}.\end{cases}$$

II. Um demgemäss die Gleichung zu transformiren:

$$(6.)\quad\begin{cases}\displaystyle\sum_1^{m.n}\int\limits_0^{x_i}\left\{\frac{\sqrt{X}-\sqrt{A}}{(a-x)\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{X}-\sqrt{B}}{(b-x)\sqrt{X}}\right\}dx\ =\ \text{const.},\\ \text{wo noch}\\ \displaystyle\sum_1^{m.n}u_i=\text{const.},\quad\sum_1^{m.n}u_i'=\text{const.},\end{cases}$$

so kommt unter Berücksichtigung von

$$\frac{1}{a}\frac{x_i\partial x_i}{a-x_i}-\frac{1}{b}\frac{x_i\partial x_i}{b-x_i}+dx_i\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=d\log\frac{a-x_i}{b-x_i}=d\log\frac{\varphi_{31}(u_i-\alpha)\varphi_{31}(u_i+\alpha)}{\varphi_{31}(u_i-\beta)\varphi_{31}(u_i+\beta)};$$

nach Transformation mittelst der Gleichungen (5.), für $u_2=0$:

$$(6^a.)\quad\frac{\varphi_{31}(u_1-\alpha)\varphi_{31}(u_2-\alpha)\dots\varphi_{31}(u_{mn}-\alpha)}{\varphi_{31}(u_1-\beta)\varphi_{31}(u_2-\beta)\dots\varphi_{31}(u_{mn}-\beta)}\ =\ \text{const.}$$

wo die Constanten rechts in (6.) und (6^a.) jedesmal andere sind.

---

*) Aus der angeführten Thetarelation (s. umstehende Note) lässt sich K_1, K_2 direct bilden, indem man die $\frac{\partial\psi}{\partial a_i}$ berechnet, ehe noch $a_2=0$ gesetzt worden. Hieraus lässt sich, mit allerdings einiger Rechnung, die Relation für Integrale dritter Gattung direct und ohne *Riemann*sche Sätze herstellen. —

Uebrigens sind diese Relationen schon lange auf anderem Wege von Herrn *Weierstrass* aufgestellt (Bd. 47, §. 4 dieses Journals).

III. Um ferner den Ausdruck:

$$\frac{\varphi_{31}^2(\alpha-v_1)\varphi_{31}^2(\alpha-v_2)}{\varphi_{31}^2(\beta-v_1)\varphi_{31}^2(\beta-v_2)},\quad \text{wo}\quad v_1+v_2=\frac{\alpha+\beta}{2},\quad v_1'+v_2'=\frac{\alpha'+\beta'}{2},$$

in einen bloss mit den Argumenten α und β geschriebenen zu verwandeln, hat man (4.), (3.):

$$(7.)\quad \begin{cases} \dfrac{\varphi_{21}^2(\beta)\varphi_{31}(\alpha-v_1)\varphi_{31}(\alpha-v_2)\varphi_{31}(\alpha+v_1+v_2)}{\varphi_{21}^2(\alpha)\varphi_{31}(\beta-v_1)\varphi_{31}(\beta-v_2)\varphi_{31}(\beta+v_1+v_2)} = \text{const.}\dfrac{a-y_1.a-y_2}{b-y_1.b-y_2}\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}, \\ \dfrac{\varphi_{21}^2(\beta)\varphi_{31}(\alpha+v_1+v_2)\varphi_{31}(\alpha-v_1-v_2)}{\varphi_{21}^2(\alpha)\varphi_{31}(\beta+v_1+v_2)\varphi_{31}(\beta-v_1-v_2)} = \text{const.}\dfrac{a-y_1.a-y_2}{b-y_1.b-y_2}\dfrac{b}{a}, \\ \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \text{const.}\dfrac{\varphi_{10}(\alpha)\varphi_{00}(\beta)}{\varphi_{10}(\beta)\varphi_{00}(\alpha)}, \end{cases}$$

wo const. von a und b unabhängige Constante sind. Durch Multiplication der zwei letzten Gleichungen und Division des Products in die erste und nachmalige Quadrirung kommt:

$$(7^a.)\quad \frac{\varphi_{31}^2(\alpha-v_1)\varphi_{31}^2(\alpha-v_2)}{\varphi_{31}^2(\beta-v_1)\varphi_{31}^2(\beta-v_2)} = \frac{\varphi_{10}^2(\alpha)\varphi_{21}^2(\alpha)\varphi_{00}^2(\beta)}{\varphi_{10}^2(\beta)\varphi_{21}^2(\beta)\varphi_{00}^2(\alpha)}.$$

IV. Die früheren Bemerkungen ergeben uns *die Lösung des folgenden Umkehrungsproblems*, welches Herr *Clebsch* a. a. O. für elliptische Integrale aufgestellt und gelöst hat: man soll aus den $\mu+2$ Gleichungen:

$$(8.)\quad \sum_1^{\mu+2} u_i = v,\quad \sum_1^{\mu+2} u_i' = v',\quad \frac{\Delta\varphi_{31}(\alpha_h, u_1, \dots u_{\mu+2})}{\Delta\varphi_{31}(\beta_h, u_1, \dots u_{\mu+2})} = e^{v_h},$$

(wo $h=1, 2, \dots \mu$ und Δ, $u_i \dots$ die frühere Bedeutung haben) die oberen Grenzen $z_1, z_2, \dots z_{\mu+2}$ bestimmen. (Ueber eine andere Form der μ letzten Gleichungen siehe II.) — Nach (2.) und (2^a.) enthält der algebraische Ausdruck:

$$\Phi_{\mu+2}(x, \sqrt{X}) = \frac{\varphi_{31}(u+v)\Delta\varphi_{31}(u, u_1, u_2, \dots u_{\mu+2})}{\varphi_{21}^{\mu+3}(u)\varphi_{21}^{\mu+3}(u_1)\dots\varphi_{21}^{\mu+3}(u_{\mu+2})}$$

$\mu+2$ willkürliche Coefficienten; lassen sich diese bestimmen, so ist:

$$\Phi_{\mu+2}(x, \sqrt{X}).\Phi_{\mu+2}(x, -\sqrt{X}) = 0$$

eine Gleichung vom $\mu+4^{\text{ten}}$ Grad zur Bestimmung der $\mu+2$ Wurzeln $x_1, x_2, \dots x_{\mu+2}$, wenn wir die zwei anderen, symmetrische Functionen jener $\mu+2$, kennen. Nun kann man aber den μ letzten Gleichungen des Problems die Form geben:

$$\frac{\varphi_{21}^{\mu+3}(\beta_h)\varphi_{31}(\alpha_h+v)\Delta\varphi_{31}(\alpha_h, u_1, \dots u_{\mu+2})}{\varphi_{21}^{\mu+3}(\alpha_h)\varphi_{31}(\beta_h+v)\Delta\varphi_{31}(\beta_h, u_1, \dots u_{\mu+2})} = e^{v_h}.\frac{\varphi_{31}(\alpha_h+v)\varphi_{21}^{\mu+3}(\beta_h)}{\varphi_{31}(\beta_h+v)\varphi_{21}^{\mu+3}(\alpha_h)} = \frac{\Phi_{\mu+2}(a_h, \sqrt{A_h})}{\Phi_{\mu+2}(b_h, \sqrt{B_h})}.$$

Dies sind μ Gleichungen zur Bestimmung der Coefficienten in $\Phi(x, \sqrt{X})$; zwei

andere liefert die Bemerkung, dass, wenn man durch das einfache (*Jacobi*sche) Umkehrungsproblem c_1 und c_2 berechnet aus:

$$v = \int_0^{c_1} d\gamma + \int_0^{c_2} d\gamma, \qquad v' = \int_0^{c_1} d\gamma' + \int_0^{c_2} d\gamma',$$

dass dann auch $\varphi_{31}(u+v) = 0$ wird für $u, u' = -\gamma_1, -\gamma_1'$ und für $u, u' = -\gamma_2, -\gamma_2'$; dass also auch:

$$\Phi_{\mu+2}(c_1, -\sqrt{C_1}) = 0, \qquad \Phi_{\mu+2}(c_2, -\sqrt{C_2}) = 0.$$

c_1 und c_2 sind also die zwei anderen Wurzeln von Φ und man hat zur Bestimmung der Coefficienten die Gleichungen:

$$(8''.) \begin{cases} \Phi_{\mu+2}(a_h, \sqrt{A_h}) - q_h . \Phi_{\mu+2}(b_h, \sqrt{B_h}) = 0, \; \Phi_{\mu+2}(c_1, -\sqrt{C_1}) = 0, \; \Phi_{\mu+2}(c_2, -\sqrt{C_2}) = 0, \\ \text{wo} \quad q_h = e^{v_h} . \dfrac{\varphi_{31}(\alpha_h + v)\, \varphi_{21}^{\mu+3}(\beta_h)}{\varphi_{31}(\beta_h + v)\, \varphi_{21}^{\mu+3}(\alpha_h)}; \quad h = 1, 2, \dots \mu; \end{cases}$$

die x_i bestimmen sich also hieraus als eindeutige Function von $v, v', v_1, v_2, \dots v_\mu$.

V. *Die Bedingung zu finden, unter der die folgenden Gleichungen neben einander bestehen* *):

$$\sum_1^{\mu+1} u_i = \tfrac{1}{2} \sum_1^{\mu} (\alpha_i + \beta_i) + \tfrac{1}{2} P, \quad \sum_1^{\mu+1} u_i' = \tfrac{1}{2} \sum_1^{\mu} (\alpha_i' + \beta_i') + \tfrac{1}{2} P',$$

$$(9.) \begin{cases} \displaystyle \prod_{i=1}^{i=\mu+1} \frac{\varphi(\alpha_x - u_i)}{\varphi(\beta_x - u_i)} = e^{v_x} = \\ \displaystyle (-1)^{h_x} . e^{q(\alpha_x - \beta_x) + q'(\alpha_x' - \beta_x')} . \frac{\varphi_{10}(\alpha_x)\, \varphi_{21}(\alpha_x)\, \varphi_{00}(\beta_x)}{\varphi_{10}(\beta_x)\, \varphi_{21}(\beta_x)\, \varphi_{00}(\alpha_x)} \\ \displaystyle \times \dot{\prod_{i=1}^{i=\mu}} \sqrt{\frac{\varphi_{31}(\alpha_x - \alpha_i)\, \varphi_{01}(\alpha_x - \beta_i)}{\varphi_{31}(\beta_x - \alpha_i)\, \varphi_{01}(\beta_x - \beta_i)}}; \quad x = 1, 2, \dots \mu, \end{cases}$$

wo in $P = p . i\pi + p' . o + q . \log p + q' . 2A$, $P' = p . o + p' . i\pi + q . 2A + q' . \log q$, die $p, q \dots$ ganze Zahlen sind (nicht zu verwechseln mit p, q in $\log p$ und $\log q$), desgl. die h_x; wo ferner unter dem $\dot{\Pi}$-Zeichen das betreffende Product mit Ausnahme des Factors, für den $i = x$ ist, verstanden ist, und wo in den μ letzten Gleichungen die Wurzelvorzeichen so zu nehmen sind, dass, wenn

$$e^{v_1 + \dots + v_\mu} = (-1)^{h_1 + \dots + h_\mu} . M^{q \Sigma(\alpha_x - \beta_x) + q' . \Sigma(\alpha_x' - \beta_x')}; \quad M = \frac{\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_\mu)}{\Delta(\beta_1, \beta_2, \dots \beta_\mu)}$$

ist. Wir bilden wieder Gleichungen von der Form (8''.) und an Zahl ebenso viel, nur ist $\Phi_{\mu+2}$ durch $\Phi_{\mu+1}$ zu ersetzen; dadurch entsteht eine Bedingungs-

---

*) Ueber den geometrischen Sinn des Problems vergl. die Abhandlung von Herrn *Clebsch* „über diejenigen Curven etc." Bd. 64, S. 240 dieses Journals.

gleichung, die Eliminationsgleichung aus:

$$\Phi_{\mu+1}(a_h, A_h) - q_h . \Phi_{\mu+1}(b_h, B_h) = 0, \quad \Phi_{\mu+1}(c_1, -\sqrt{C_1}) = 0, \quad \Phi_{\mu+1}(c_2, -\sqrt{C_2}) = 0,$$

$$q_h = e^{v_h} . \frac{\varphi_{31}(\alpha_h + \gamma_1 + \gamma_2)\varphi_{21}^{\mu+2}(\beta_h)}{\varphi_{31}(\beta_h + \gamma_1 + \gamma_2)\varphi_{21}^{\mu+2}(\alpha_h)}; \quad h = 1, \dots \mu.$$

Nun zerfällt die so entstehende Determinante in solche, die nach den Factoren $q_1, q_2 \dots$ unterschieden worden können. Diese sind aber alle aus einer unter ihnen ableitbar, indem man die $\alpha(\beta)$ mit den entsprechenden $\beta(\alpha)$ vertauscht; denn durch Vertauschung von a_x mit b_x geht q_x in $\frac{1}{q_x}$ über, also wechseln dann in obiger Determinante die zwei Glieder in den Elementen einer Horizontalreihe ihre Plätze. So lassen sich alle in die Determinante aus den letzten, oder in die aus den ersten Gliedern überführen, und beweist man von dem Quotienten dieser Glieder, dass derselbe $= -1$, also ihre Summe Null (also unabhängig von einem a oder b), so muss obige Determinante selbst verschwinden.

Nun aber ist die Determinante aus den ersten Gliedern nichts Anderes, als die Eliminationsgleichung aus:

$$\Phi_{\mu+1}(a_h, \sqrt{A_h}) = 0, \; h = 1, \dots \mu \text{ und } \Phi_{\mu+1}(c_1, -\sqrt{C_1}) = 0, \; \Phi_{\mu+1}(c_2, -\sqrt{C_2}) = 0,$$

daher ((2.) und (2^a.)) gleich

$$\frac{\Delta\varphi_{31}(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_\mu, -\gamma_1, -\gamma_2)\varphi_{31}(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_\mu - \gamma_1 - \gamma_2)}{\varphi_{21}^{\mu+2}(\gamma_1)\varphi_{21}^{\mu+2}(\gamma_2)\varphi_{21}^{\mu+2}(\alpha_1)\dots\varphi_{21}^{\mu+2}(\alpha_\mu)};$$

und weil

$$\frac{\Delta\varphi_{31}(\alpha_1, \dots \alpha_\mu, -\gamma_1, -\gamma_2)}{\Delta\varphi_{31}(\alpha_1, \dots \alpha_\mu)} = \prod_1^\mu \varphi_{31}(\gamma_1 + \alpha_x)\varphi_{31}(\gamma_2 + \alpha_x),$$

so ist der Quotient dieser Determinante und der aus den letzten Gliedern:

$$= (-1)^{\mu+\Sigma h_i} . e^{-\Sigma q(\alpha_i - \beta_i) - \Sigma q'(\alpha_i' - \beta_i')} . \frac{\varphi_{31}(\alpha_1 + \dots + \alpha_\mu - \gamma_1 - \gamma_2)}{\varphi_{31}(\beta_1 + \dots + \beta_\mu - \gamma_1 - \gamma_2)}$$

$$\times \prod_1^\mu \frac{\varphi_{31}(\alpha_i + \gamma_1)\varphi_{31}(\alpha_i + \gamma_2)\varphi_{00}(\alpha_i)}{\varphi_{31}(\alpha_i + \gamma_1 + \gamma_2)\varphi_{10}(\alpha_i)\varphi_{21}(\alpha_i)} . \frac{\varphi_{31}(\beta_i + \gamma_1 + \gamma_2)\varphi_{10}(\beta_i)\varphi_{21}(\beta_i)}{\varphi_{31}(\beta_i + \gamma_1)\varphi_{31}(\beta_i + \gamma_2)\varphi_{00}(\beta_i)}.$$

Nun ergiebt sich aus den Gleichungen (7.), dass der unter dem Π-Zeichen stehende Quotient $= 1$; endlich ist:

$$\frac{\varphi_{31}\left(\alpha_1 + \dots + \alpha_\mu - \frac{1}{2}\Sigma(\alpha_i + \beta_i) - \frac{P}{2}\right)}{\varphi_{31}\left(\beta_1 + \dots + \beta_\mu - \frac{1}{2}\Sigma(\alpha_i + \beta_i) - \frac{P}{2}\right)} = -\frac{\varphi_{31}\left(\Sigma\frac{\alpha_i - \beta_i}{2} - \frac{P}{2}\right)}{\varphi_{31}\left(\Sigma\frac{\alpha_i - \beta_i}{2} + \frac{P}{2}\right)}$$

$$= -e^{i\pi(pq + p'q' + p' + q') + q(\alpha - \beta) + q'(\alpha' - \beta')};$$

daher der Quotient:

$$= (-1)^{\mu+\Sigma h_i+pq+p'q'+p'+q'+1} = -1$$

unter der Bedingung, dass von den Zahlen $p, p', \dots h_i$ die Gleichung:

$$(10.) \qquad (p'+1)(q'+1)+pq+h_1+h_2+\cdots+h_\mu \equiv \mu+1 \pmod 2$$

erfüllt wird, was auf $2^{\mu+3}$ Arten geschehen kann. —

Sind in den Gleichungen des Problems $\varkappa'$ Grössen α_i gleich den entsprechenden β_i, so vermindert sich die Zahl der h_i um $\varkappa'$, und man hat die Bedingungsgleichung:

$$(10^*.) \qquad (p'+1)(q'+1)+pq+h_1+h_2+\cdots+h_{\mu-\varkappa'} \equiv \mu+1 \pmod 2$$

die auf nur $2^{\mu+3-\varkappa'}$ Arten erfüllbar ist. — Für $\mu = \varkappa' = 1$ kommt ein Ausnahmefall, der nur zehn verschiedene Arten zulässt.

Die hieran sich knüpfenden *geometrischen Folgerungen* genügt es wohl hier nur andeutungsweise zu geben, nachdem Herr *Clebsch* dieselben für die Fälle $p=0$ und $p=1$ ausführlich dargelegt. Ich übergehe alle analogen Schlüsse die sich für $p=2$ an die ersten §§. des Aufsatzes über den Fall $p=1$ *) anreihen und gedenke hier nur eines Unterschiedes. Die Reduction nämlich der Coordinatenausdrücke als Functionen des Parameters vom n^{ten} Grad auf solche von $\frac{1}{2}n^{\text{ten}}$ Grad hat sich für den Fall $p=2$ als unthunlich und unnöthig herausgestellt; man kann ja die constanten Nullpunkte überall in die Constanten eingehn lassen.

Ich führe hier nur das Rechnungsergebniss an für den Fall einer *Curve vierter Ordnung mit einem Doppelpunkt* ($n=4$). Die allgemeine Gleichung derselben hat die Form:

$$x_1^2 . x_2 . x_3 + 2x_1 . f_3 + f_4 = 0$$

(wo die Indices den Grad der homogenen Functionen f in x_2 und x_3 angeben), wenn nämlich die Coordinatenaxen x_2 und x_3 mit den zwei Tangenten im Doppelpunkt zusammenfallen. Eliminirt man x_2 mittelst des Büschels von Geraden: $x_2+\lambda x_3 = 0$, so kommt:

$$x_1^2\lambda + 2x_1x_2(\beta+\lambda\beta_1+\lambda^2\beta_2+\lambda^3\beta_3) + x_3^2(\gamma+\lambda\gamma_1+\cdots+\lambda^4\gamma_4) = 0$$

oder

$$x_1^2\lambda + 2x_1x_3B_3 + x_3^2C_4 = 0.$$

---

*) Bd. 64, S. 210 dieses Journals.

Um rationale Ausdrücke der x_1 in den λ und $\sqrt{\Delta_6}$ zu erhalten, führt man den Büschel $p+\varrho.q=0$ ein und erhält:

$$-\mu x_1 = C_4, \quad \mu x_2 = \lambda\{B_3-\sqrt{B_3^2-\lambda C_4}\}, \quad \mu x_3 = B_3-\sqrt{B_3^2-\lambda C_4}.$$

Man erkennt sofort, dass die oben erwähnten vier Constanten Nullpunkte, die den Dreien gemeinsam sind, die vier Wurzeln von $C_4=0$ sammt dem positiven Wurzelzeichen sind; $\lambda=0$ und $\lambda=\infty$, sammt dem positiven Wurzelvorzeichen, gehören dem Doppelpunkt als Parameter an. Bringt man den Wurzelausdruck durch die Transformation

$$z = \frac{m_3-m_1}{m_3-m_2}\,\frac{\lambda-m_2}{\lambda-m_1} = \frac{1}{m}\,\frac{\lambda-m_2}{\lambda-m_1}$$

(wo m_1, m_2, m_3 drei beliebige von den sechs Wurzeln der Gleichung $\Delta_6=0$ sind) auf die Normalform:

$$\Delta_6 = B_3-\lambda C_4 = p^2(\lambda-m_1)^6.x.1-x.1-\varkappa^2 x.1-\lambda^2 x.1-\mu^2 x = p^2(\lambda-m_1)^6.X,$$

(wo das λ natürlich in $1-\lambda^2 x$ ein anderes als das des Parameters ist; p ein constanter Factor) so geht das Parameterpaar des Doppelpunkts, 0 und ∞, in $\frac{m_2}{m.m_1}$ und $\frac{1}{m}$ über, so dass die beiden Doppelpunktsintegrale sind:

$$\alpha = \int_0^{\frac{m_2}{m.m_1}} \frac{B+Cx}{\sqrt{X}}dx, \quad \beta = \int_0^{\frac{1}{m}} \frac{B+Cx}{\sqrt{X}}dx,$$

(α' und β' entsprechend gebildet). —

Wir wenden uns jetzt zur *Constantenbestimmung des Abelschen Satzes*, der für die Schnittpunkte einer Curve n^{ter} Ordnung mit $\frac{n.n-3}{2}-1$ Doppelpunkten mit einer beliebigen Curve m^{ter} Ordnung folgende Bedingungen stellt:

$$(11.)\quad \begin{cases} \sum\limits_1^{n.m} u_i = \dfrac{m}{n-3}\cdot c+p.i\pi+p'.o+q.\log p+q'.2A, \\ \sum\limits_1^{n.m} u'_i = \dfrac{m}{n-3}\cdot c'+p.o+p'.i\pi+q.2A+q'.\log q, \\ \dfrac{\varphi_{31}(\alpha_\varkappa-u_1)\varphi_{31}(\alpha_\varkappa-u_2)\dots\varphi_{31}(\alpha_\varkappa-u_{n.m})}{\varphi_{31}(\beta_\varkappa-u_1)\varphi_{31}(\beta_\varkappa-u_2)\dots\varphi_{31}(\beta_\varkappa-u_{n.m})} = \dfrac{m}{n-3}\cdot\gamma_\varkappa.e^{h_\varkappa+q(\alpha_\varkappa-\beta_\varkappa)+q'(\alpha'_\varkappa-\beta'_\varkappa)}, \end{cases}$$

wo $\varkappa=1, 2, \dots \frac{n.n-3}{2}-1$, und wo die p, q, $h_\varkappa$ dieselbe Bedeutung haben wie in (9). Die $z_1, \dots z_{nm}$ sind die Parameter des Schnittpunktsystems, die a_1, b_1, a_2, b_2, $\dots$ $a_{\frac{n.n-3}{2}-1}$, $b_{\frac{n.n-3}{2}-1}$ die Parameterpaare der Doppelpunkte. — Diese Gleichungen ergeben sich aus der Anfangs II. notirten Formel vermöge der

dort erwähnten Transformation. — Die c und γ_x hängen bloss noch von der Curve n^{ter} Ordnung ab. Lässt man eine Curve $n-3^{ter}$ Ordnung durch die Doppelpunkte gehen und in einem Punkte ausserdem berühren, so entspricht dem Berührungspunkt eine der oberen Grenzen $0,\ 1,\ \frac{1}{x^2},\ \dots\ \infty$; denn nur für diese Werthe verschwindet $\sqrt{X}$ und somit die Zweideutigkeit der Coordinatenausdrücke $x_1,\ x_2,\ x_3$, wo:

$$x_i = \overset{n}{f_i}(x) + \overset{n-3}{\varphi_i}(x).\sqrt{X}.$$

Daher ist dann:

$$c = \sum_{1}^{\frac{n.n-3}{2}-1} (\alpha_i+\beta_i), \quad c' = \sum_{1}^{\frac{n.n-3}{2}-1} (\alpha'_i+\beta'_i).$$

Lässt man ferner zur Bestimmung der γ_x die Curve $n-3^{ter}$ Ordnung durch alle Doppelpunkte, ausgenommen den x^{ten} gehen und in zwei anderen Punkten je zweipunktig berühren, so werden in (11.) alle Gleichungen, die φ-Producte enthalten, illusorisch, bis auf die x^{te}; diese wird für $p = p' = \dots = h_x = 0$;

$$\frac{\varphi^2_{31}(\alpha_x - v_1^{(x)})\varphi^2_{31}(\alpha_x - v_2^{(x)})}{\varphi^2_{31}(\beta_x - v_1^{(x)})\varphi^2_{31}(\beta_x - v_2^{(x)})}\cdot \prod_{i=1}^{i=\frac{n.n-3}{2}-1} \frac{\varphi_{31}(\alpha_x-\alpha_i)\varphi_{31}(\alpha_x-\beta_i)}{\varphi_{31}(\beta_x-\alpha_i)\varphi_{31}(\beta_x-\beta_i)} = \gamma_x,$$

wo zugleich

$$v_1^{(x)} + v_2^{(x)} = \frac{\alpha_x+\beta_x}{2}, \quad v_1^{(x)\prime} + v_2^{(x)\prime} = \frac{\alpha'_x+\beta'_x}{2},$$

oder, vermöge III:

$$\gamma_x = \frac{\varphi^2_{00}(\beta_x)\varphi^2_{10}(\alpha_x)\varphi^2_{21}(\alpha_x)}{\varphi^2_{00}(\alpha_x)\varphi^2_{10}(\beta_x)\varphi^2_{21}(\beta_x)}\cdot \prod_{i=1}^{i=\frac{n.n-3}{2}-1} \frac{\varphi_{31}(\alpha_x-\alpha_i)\varphi_{31}(\alpha_x-\beta_i)}{\varphi_{31}(\beta_x-\alpha_i)\varphi_{31}(\beta_x-\beta_i)}.$$

Jede andere Annahme von $p,\ q,\ \dots\ h_x$ hätte dasselbe gelehrt.

Die von Herrn *Clebsch* im §. 15 citirten *geometrischen Sätze fahren alle fort zu gelten, wenn man darin:* die Zahl der $r$fachen Berührungspunkte jedesmal, so oft sie vorkommt $(\mu+1, \mu+\nu+1)$, um 1 vermehrt (weil die Zahl der Bedingungsgleichungen um eine zwischen Integralen erster Gattung vermehrt ist), die Zahl $n.n-3$ überall um 2 vermindert, und wenn man endlich die Anzahl 4 der hyperelliptischen Perioden statt 2 setzt, d. h. $r^{\mu+4-x'}$ statt $r^{\mu+2-x'}$, r^4 statt r^2, desgl. für r'. — Nur eine Ausnahme ist zu notiren: für den Fall $n=4$, $\mu=0$, und $r=2m+1$ (wo m beliebig und der Grad der Schnittcurve ist) ist nämlich die Anzahl der möglichen Berührungspunkte

$(2m-1)^4$ um den einen Fall zu vermindern, wo $p=q=p'=q'=0$, wo also:

$$u_1+u_2=0, \quad u'_1+u'_2=0,$$

indem x_1 und x_2 hieraus nicht bestimmbar ist.

Auch die Sätze IV. (§. 16) *lassen sich hier reproduciren*, wenn man die obenerwähnten Aenderungen vornimmt und noch folgende: $2^{\mu+1-\varkappa'}$ durch die in V. aus Gleichung (10*.) gewonnene Zahl: $2^{\mu+3-\varkappa'}$ ersetzt; desgl. $2^{\frac{n.n-3}{2}-\varkappa'+1}$ durch $2^{\frac{n.n-3}{2}+2-\varkappa'}$ und endlich $2^{\frac{n-1.n-2}{2}+1-\varkappa'}$ durch $2^{\frac{n.n-3}{2}+3-\varkappa'}$

Hieraus folgt für $n=4$: die Anzahl der Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung mit einem Doppelpunkt ist $=16$, mit einem Rückkehrpunkt $=10$ (s. V. am Ende).

Sind P, Q, P', Q', H die Periodenzahlen für Schnittcurven zweiter Ordnung mit einer Curve vierter Ordnung, so hat man durch Zerfällung derselben folgende Sätze:

Von den 31 *Systemen von Curven zweiter Ordnung, die in vier Punkten eine Curve vierter Ordnung mit einem Doppelpunkt zweipunktig berühren, enthalten die* 30, *für welche P, Q, P', Q' nicht gleichzeitig Null sind, je vier Paare von Geraden, also je* 8 *Doppeltangenten; und diese* 30 *Systeme gruppiren sich zu Paaren so, dass jedes Paar alle* 16 *enthält. Somit kann jede Doppeltangente, mit einer anderen gruppirt, als* 15 *Systemen zugehörig betrachtet werden.*

Und allgemein: *die* $2^{\frac{n.n-3}{2}+2}$ *Curven $n-3^{ter}$ Ordnung, welche die Curve n^{ter} Ordnung mit* $\frac{n.n-3}{2}-1$ *Doppelpunkten in* $\frac{n.n-3}{2}+2$ *Punkten zweipunktig berührt, lassen sich auf* $15.2^{\frac{n.n-3}{2}-2}$ *Arten so in zwei gleiche Gruppen theilen, dass jede derselben* $2^{\frac{n.n-3}{2}}$ *Paare von Curven $n-3^{ter}$ Ordnung liefert, die einem und demselben System von Berührungscurven $2(n-3)^{ter}$ Ordnung zugerechnet werden können.*

Darmstadt, 1. October 1865.

Sur un cas particulier de la surface du quatrième ordre avec seize points singuliers.

(Par M. *A. Cayley* à Cambridge.)

Dans la note „sur la surface des ondes" (*Liouville* t. XI, 1846) j'ai étudié sous le nom de ***tétraédroïde*** la surface du quatrième ordre douée de seize points singuliers, et qu'une transformation homographique fait naître de la surface des ondes. Mon point de départ a été la propriété fondamentale suivante.

„Le tétraédroïde est une surface du quatrième ordre, qui est coupée par les plans d'un certain tétraèdre suivant des paires de coniques par rapport auxquelles les trois sommets du tétraèdre dans ce plan sont des points conjugués. De plus: les seize points d'intersection des quatre paires de coniques sont des points singuliers de la surface, c'est à dire des points où, au lieu d'un plan tangent, il y a un cône tangent du second ordre".

Dans la même note j'ai reconnu l'existence de seize plans singuliers qui touchent chacun la surface suivant une conique. Il est intéressant d'examiner de quelle manière mes formules se rattachent à celles de M. *Kummer* dans ses belles recherches (Monatsbericht der Berliner Akademie für 1864, pp. 246—260 et 495—499) relatives à la surface du quatrième ordre douée de seize points singuliers.

Partant des formules de M. *Kummer* il convient, pour plus de symmétrie, de changer les signes de a, f; puis en remarquant que dans l'équation (3.) p. 250 on doit avoir (voir p. 496) $+\frac{3}{2}cf$ au lieu de $-\frac{3}{2}cf$, l'équation de la surface sera

$$\begin{aligned}
&a^2q^2r^2+b^2r^2p^2+c^2p^2q^2+d^2p^2s^2+e^2q^2s^2+f^2r^2s^2\\
&+2bcp^2qr+2cepq^2s-2bfpr^2s-2efqrs^2\\
&+2capq^2r+2afqr^2s-2cdqp^2s-2fdrps^2\\
&+2abpqr^2+2bdrp^2s-2aerq^2s-2depqs^2-4gpqrs = 0.
\end{aligned}$$

Pour donner les équations des seize plans singuliers de cette surface je pose d'abord pour abréger

$$ad=\alpha,\quad be=\beta,\quad cf=\gamma,$$

et je détermine k au moyen de l'équation cubique

$$\gamma k^3+(-g-\tfrac{1}{2}\alpha+\tfrac{1}{2}\beta+\tfrac{3}{2}\gamma)k^2+(-g-\tfrac{3}{2}\alpha-\tfrac{1}{2}\beta+\tfrac{1}{2}\gamma)k-\alpha = 0,$$

puis j'introduis les quantités

$$\begin{aligned}
p' &= \quad \cdot \quad +cq \quad +\frac{b}{k+1}r+\frac{d}{k}s,\\
q' &= -cp \quad \cdot \quad +\frac{a}{k}r \quad -\frac{e}{k+1}s,\\
r' &= -\frac{b}{k+1}p-\frac{a}{k}q \quad \cdot \quad +fs,\\
s' &= -\frac{d}{k}p \quad +\frac{e}{k+1}q-fr \quad \cdot \quad ,
\end{aligned}$$

enfin je dénote par p_1, q_1, r_1, s_1; p_2, q_2, r_2, s_2; p_3, q_3, r_3, s_3 ce que deviennent les quantités p', q', r', s' en y substituant successivement pour k les trois racines k_1, k_2, k_3 de l'équation en k. Cela posé les seize plans singuliers sont donnés par les équations

$$\begin{array}{llll}
p=0, & q=0, & r=0, & s=0,\\
p_1=0, & q_1=0, & r_1=0, & s_1=0,\\
p_2=0, & q_2=0, & r_2=0, & s_2=0,\\
p_3=0, & q_3=0, & r_3=0, & s_3=0.
\end{array}$$

En prenant une ligne quelconque (p_1, q_1, r_1, s_1) et une colonne quelconque (r, r_1, r_2, r_3), puis en omettant le terme commun r_1, on a une des seize combinaisons $(p_1, q_1, s_1, r, r_2, r_3)$ de six plans qui se rencontrent dans un des seize points singuliers.

Supposons que les plans p, s_1, r_2, q_3 se rencontrent dans le même point. Pour que cette circonstance ait lieu il faut que la condition $\frac{k_2(k_3+1)}{k_3(k_1+1)}=1$ ou ce qui est la même chose $k_3(k_1-k_2)-(k_2-k_3)=0$ soit remplie; mais si cette condition est remplie, non seulement les plans (p, s_1, r_2, q_3) se rencontrent dans le même point mais aussi les plans (q, p_1, s_2, r_3), les plans (r, q_1, p_2, s_3) et les plans (s, r_1, q_2, p_3). L'équation $k_3(k_1-k_2)-(k_2-k_1)=0$ appartient évidemment à un système de six équations, et l'une quelconque de ces équations donnerait un résultat semblable; chacune de ces équations conduit, comme on va voir, à une certaine relation entre les quantités g, α, β, γ (ou g, a, b, c, d, e, f) relation en vertu de laquelle la surface générale du quatrième ordre douée de seize points singuliers se réduit au ***tétraédroïde***. Pour former la relation dont il s'agit, il faut égaler à zéro le produit des six

fonctions analogues à $k_3(k_1-k_2)-(k_2-k_3)$. Je forme d'abord le produit des trois fonctions $k_3(k_1-k_2)-(k_2-k_3)$, $k_1(k_2-k_3)-(k_3-k_1)$, $k_2(k_3-k_1)-(k_1-k_2)$, et en représentant pour un moment l'équation en k par $\mathfrak{a}k^3+\mathfrak{b}k^2+\mathfrak{c}k+\mathfrak{d}=0$, on trouve que le produit des trois fonctions est égal à

$$P+Q\sqrt{\Delta} = (\mathfrak{b}+\mathfrak{c})(\mathfrak{b}\mathfrak{c}+9\mathfrak{a}\mathfrak{d})-6(\mathfrak{a}\mathfrak{c}^2+\mathfrak{b}^2\mathfrak{d})$$
$$+(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}-2\mathfrak{a}-2\mathfrak{d})\sqrt{\mathfrak{b}^2\mathfrak{c}^2-4\mathfrak{b}^3\mathfrak{d}-4\mathfrak{a}\mathfrak{c}^3+18\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}-27\mathfrak{a}^2\mathfrak{d}^2}$$

et en substituant pour $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ leurs valeurs $\mathfrak{a}=\gamma$, $\mathfrak{b}=-g-\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta+\frac{3}{2}\gamma$, $\mathfrak{c}=-g-\frac{3}{2}\alpha-\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2}\gamma$, $\mathfrak{d}=-\alpha$, on trouve, toute réduction faite,

$$P = -2g^3+\tfrac{1}{2}g(\Sigma\alpha^2-10\Sigma\alpha\beta)+2(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta),$$
$$Q = -2g,$$
$$\Delta = g^4-\tfrac{1}{2}g^2(\Sigma\alpha^2-10\Sigma\alpha\beta)-4g(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)$$
$$+\tfrac{1}{16}(\Sigma\alpha^4+12\Sigma\alpha^3\beta-26\Sigma\alpha^2\beta^2+244\Sigma\alpha^2\beta\gamma).$$

Cela posé, l'équation cherchée est $P^2-Q^2\Delta=0$, c'est à dire:

$$0=\tfrac{1}{2}(P^2-Q^2\Delta)=g^3.4(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)$$
$$+g^2.4(-\Sigma\alpha^3\beta+4\Sigma\alpha^2\beta^2-2\Sigma\alpha^2\beta\gamma)$$
$$+g\,.(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)(\Sigma\alpha^2-10\Sigma\alpha\beta)$$
$$+\;2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2(\alpha-\beta)^2.$$

Cette équation, dans laquelle $\alpha=ad$, $\beta=be$, $\gamma=cf$, constitue la condition sous laquelle la surface de M. *Kummer* se réduit à un tétraédroïde.

Je passe à présent à mes formules de 1846. En écrivant pour plus de commodité f^2, g^2, h^2, l^2, m^2, n^2 au lieu de f, g, h, l, m, n mon équation du tétraédroïde est

$$\begin{vmatrix} . & x^2, & y^2, & z^2, & w^2 \\ x^2, & . & h^2, & g^2, & l^2 \\ y^2, & h^2, & . & f^2, & m^2 \\ z^2, & g^2, & f^2, & . & n^2 \\ w^2, & l^2, & m^2, & n^2, & \end{vmatrix} = 0$$

ou ce qui est la même chose

$$(A, B, C, D, F, G, H, L, M, N)(x^2, y^2, z^2, w^2)^2 = 0,$$

c'est à dire

$$Ax^4+By^4+Cz^4+Dw^4+2Fy^2z^2+2Gz^2x^2+2Hx^2y^2+2Lx^2w^2+2My^2w^2+2Nz^2w^2=0,$$

où les coefficients ont les valeurs

$$\begin{aligned}
&A = 2m^2n^2f^2, \quad B = 2n^2l^2g^2, \quad C = 2l^2m^2h^2, \quad D = 2f^2g^2h^2,\\
&F = l^2(\ \ l^2f^2 - m^2g^2 - n^2h^2), \quad L = f^2(\ \ l^2f^2 - m^2g^2 - n^2h^2),\\
&G = m^2(-l^2f^2 + m^2g^2 - n^2h^2), \quad M = g^2(-l^2f^2 + m^2g^2 - n^2h^2),\\
&H = n^2(-l^2f^2 - m^2g^2 + n^2h^2), \quad N = h^2(-l^2f^2 - m^2g^2 + n^2h^2).
\end{aligned}$$

Les coordonnées des seize points singuliers sont

$$(0, \pm k, \pm g, \pm l),\ (\pm h, 0, \pm f, \pm m),\ (\pm g, \pm f, 0, \pm n),\ (\pm l, \pm m, \pm n, 0),$$

et les équations des seize plans singuliers sont

$$\begin{aligned}
\cdot \quad \pm ny \pm mz \pm fw &= 0,\\
\pm nx \quad \cdot \quad \pm lz \pm gw &= 0,\\
\pm mx \pm ly \quad \cdot \quad \pm hw &= 0,\\
\pm fx \pm gy \pm hz \quad \cdot \quad &= 0,
\end{aligned}$$

où l'on donne des valeurs quelconques aux signes $\pm$. Pour comparer ces plans aux plans de M. *Kummer* j'écris le tableau

$p,\ q,\ r,\ s$	$\cdot\ +ny-mz+fw$	$-nx\ \cdot\ +lz+gw$	$mx-ly\ \cdot\ +hw$	$-fx-gy-lz\ \cdot$
p_1, q_1, r_1, s_1	$nx\ \cdot\ +lz+gw$	$mx+ly\ \cdot\ +hw$	$-fx-gy+hz\ \cdot$	$\cdot\ ny-mz-fw$
p_2, q_2, r_2, s_2	$-mx-ly\ \cdot\ +hw$	$-fx+gy-hz\ \cdot$	$\cdot\ ny+mz+fw$	$-nx\ \cdot\ +lz-gw$
p_3, q_3, r_3, s_3	$fx-gy-hz\ \cdot$	$\cdot\ -ny-mz+fw$	$-nx\ \cdot\ -lz+gw$	$mx-ly\ \cdot\ -hw$

et j'obtiens les valeurs suivantes

$$\begin{aligned}
p &= \quad \cdot \quad ny - mz + fw,\\
q &= -nx \quad \cdot \quad + lz + gw,\\
r &= \quad mx - ly \quad \cdot \quad + hw,\\
s &= -fx - gy - hz \quad \cdot \quad .
\end{aligned}$$

En résolvant ces équations par rapport à x, y, z, w et en posant pour abréger $\theta = lf + mg + nh$, on trouve

$$\begin{aligned}
\theta x &= \quad \cdot \quad - hq + gr - ls,\\
\theta y &= \quad hp \quad \cdot \quad - fr - ms,\\
\theta z &= -gp + fq \quad \cdot \quad - ns,\\
\theta w &= \quad lp + mq + nr \quad \cdot \quad ,
\end{aligned}$$

valeurs qu'il s'agit de substituer dans l'équation

$$U = (A, B, C, D, F, G, H, L, M, N)(x^2, y^2, z^2, w^2)^2 = 0$$

de la surface dont il est question.

De l'expression de U en p, q, r, s je ne considère d'abord que le terme multiplié par p^2q^2. Désignons par $\mathfrak{C}$ le coefficient de p^2q^2 dans $\theta^4 U$, nous aurons

$$\mathfrak{C} = \left.\begin{array}{ll} 6f^2g^2 & >\!\!<2l^2m^2h^2 \\ +6l^2m^2 & >\!\!<2f^2g^2h^2 \\ +h^2f^2 & >\!\!<2l^2(l^2f^2-m^2g^2-n^2h^2) \\ +g^2h^2 & >\!\!<2m^2(-l^2f^2+m^2g^2-n^2h^2) \\ +h^4 & >\!\!<2n^2(-l^2f^2-m^2g^2+n^2h^2) \\ +h^2l^2 & >\!\!<2f^2(l^2f^2-m^2g^2-n^2h^2) \\ +h^2m^2 & >\!\!<2g^2(-l^2f^2+m^2g^2-n^2h^2) \\ +(l^2f^2+m^2g^2-4lmfg) & >\!\!<2h^2(-l^2f^2-m^2g^2+n^2h^2) \end{array}\right\} = 2h^2\left\{\begin{array}{l} 6i^2j^2 \\ +6i^2j^2 \\ +i^2(i^2-j^2-k^2) \\ +j^2(-i^2+j^2-k^2) \\ +k^2(-i^2-j^2+k^2) \\ +i^2(i^2-j^2-k^2) \\ +j^2(-i^2+j^2-k^2) \\ +(i^2+j^2-4ij)(-i^2-j^2+k^2) \end{array}\right\},$$

les lettres i, j, k étant introduites pour désigner les produits

$$lf = i, \quad mg = j, \quad nh = k.$$

Après toutes les réductions on obtient

$$\mathfrak{C} = 2h^2((i+j)^2-k^2)^2 = 2h^2(i+j+k)^2(-i-j+k)^2 = 2h^2\theta^2(-i-j+k)^2$$

pour le coefficient de p^2q^2 dans $\theta^4 U$, ou ce qui est la même chose

$$h^2(-i-j+k)^2$$

pour le coefficient de p^2q^2 dans $\frac{1}{2}\theta^2 U$.

En calculant de même les autres coefficients de $\frac{1}{2}\theta^2 U$ et en écrivant pour abréger

$$\begin{aligned} i-j-k &= lf-mg-nh = a \\ -i+j-k &= -lf+mg-nh = b \\ -i-j+k &= -lf-mg+nh = c \end{aligned}$$

l'équation transformée sera

$$\begin{aligned} & f^2a^2q^2r^2+g^2b^2r^2p^2+h^2c^2p^2q^2+l^2a^2p^2s^2+m^2b^2q^2s^2+n^2c^2r^2s^2 \\ & +2ghbcp^2qr+2hmbcpq^2s-2gnbc\,pr^2s-2mnbc\,qrs^2 \\ & +2hfca\,pq^2r+2fnca\,qr^2s-2hlca\,qp^2s-2nlca\,rps^2 \\ & +2fgab\,pqr^2+2glab\,rp^2s-2fmab\,rq^2s-2lmab\,pqs^2 \\ & -(b-c)(c-a)(a-b)pqrs = 0. \end{aligned}$$

En posant

$$\begin{aligned} a' &= fa, & d' &= la, & -4g' &= (b-c)(c-a)(a-b), \\ b' &= gb, & e' &= mb, \\ c' &= hc, & f' &= nc, \end{aligned}$$

les quantités a', b', c', d', e', f', g' sont liées par une relation. Pour en prouver l'existence on n'a qu'à faire

$$a'd' = \alpha', \quad b'e' = \beta', \quad c'f' = \gamma'$$

et à se servir des expressions de a, b, c en f, g, h, l, m, n, alors on obtient

$$\begin{aligned} -2\alpha' &= a^2(b+c), \\ -2\beta' &= b^2(c+a), \\ -2\gamma' &= c^2(a+b), \\ -4g' &= (b-c)(c-a)(a-b), \end{aligned}$$

équations, qui impliquent une relation entre α', β', γ', g'; mais en supposant que a', b', c', d', e', f', g' soient des quantités qui satisfont à cette relation, il existe toujours des valeurs correspondantes de f, g, h, l, m, n, c'est à dire que l'équation du tétraédroïde est identique avec celle de M. *Kummer* toutes les fois que les coefficients a, b, c, d, e, f, g de cette dernière sont liés par une certaine relation. Ecrivons comme auparavant $ad = \alpha$, $be = \beta$, $cf = \gamma$, cette relation se trouve en éliminant a, b, c entre les équations

$$\begin{aligned} -2\alpha &= a^2(b+c), \\ -2\beta &= b^2(c+a), \\ -2\gamma &= c^2(a+b), \\ -4g &= (b-c)(c-a)(a-b), \end{aligned}$$

et il ne sagit que de prouver l'identité de cette relation avec celle que nous avons trouvée ci-dessus par d'autres considérations.

J'introduis les nouvelles notations

$$\begin{aligned} \alpha+\beta+\gamma &= -\tfrac{1}{2}P, & a+b+c &= \mathfrak{p}, \\ \beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta &= -\tfrac{1}{4}Q, & bc+ca+ab &= \mathfrak{q}, \\ \alpha\beta\gamma &= -\tfrac{1}{8}R, & abc &= \mathfrak{r}, \end{aligned}$$

je forme l'expression

$$2(\beta-\gamma) = -(bc+ca+ab)(b-c) = -\mathfrak{q}(b-c)$$

et les deux expressions analogues pour $2(\gamma-\alpha)$, $2(\alpha-\beta)$; j'en déduis le résultat

$$8(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta) = -\mathfrak{q}^3(b-c)(c-a)(a-b),$$

enfin je note les équations

$$\begin{aligned} (b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2 &= -4\mathfrak{q}^3+\mathfrak{p}^2\mathfrak{q}^2+18\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{r}-27\mathfrak{r}^2-4\mathfrak{p}^3\mathfrak{r}, \\ P &= \mathfrak{p}\mathfrak{q}-3\mathfrak{r}, \\ Q &= \mathfrak{q}^3-2\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{r}+3\mathfrak{r}^2, \\ R &= \mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{r}^2-\mathfrak{r}^3, \end{aligned}$$

qui donnent la transformation de leurs premiers membres en fonction de $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$; cela posé et à l'aide de ces valeurs on forme les égalités

$$\begin{aligned}
512(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)g^3 &= (-4\mathfrak{q}^3+\mathfrak{p}^2\mathfrak{q}^2+18\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{r}-27\mathfrak{r}^2-4\mathfrak{p}^3\mathfrak{r})\mathfrak{q}^3(b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2\\
256(-\Sigma\alpha^3\beta+4\Sigma\alpha^2\beta^2-2\Sigma\alpha^2\beta\gamma)g^2 &= (6\mathfrak{q}^3-\mathfrak{p}^2\mathfrak{q}^2-18\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{r}+27\mathfrak{r}^2+2\mathfrak{p}^3\mathfrak{r})\mathfrak{q}^3(b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2\\
128(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)(\Sigma\alpha^2-10\Sigma\alpha\beta)g &= (-12\mathfrak{q}^3+\mathfrak{p}^2\mathfrak{q}^2+18\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{r}-27\mathfrak{r}^2)\mathfrak{q}^3(b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2\\
64(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2(\alpha-\beta)^2 &= (\mathfrak{q}^3)\mathfrak{q}^3(b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2
\end{aligned}$$

qui multipliées par 1, 2, 1, 4, ajoutées ensemble et divisées par 128 conduisent à l'équation finale

$$\begin{aligned}
&g^3.4(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)\\
&+g^2.4(-\Sigma\alpha^3\beta+4\Sigma\alpha^2\beta^2-2\Sigma\alpha^2\beta\gamma)\\
&+g\ .\ (\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)(\Sigma\alpha^2-10\Sigma\alpha\beta)\\
&+\ \ 2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2(\alpha-\beta)^2 = 0
\end{aligned}$$

identique avec celle que l'on a trouvée ci-dessus, ce qui achève la démonstration que l'on avait en vue.

Cambridge, 18 mai 1865.

Satz aus der Störungstheorie.

(Auszug aus einem Schreiben an den Herausgeber.)

(Von Herrn *Scheibner* in Leipzig.)

Es sei M die Sonne, m ein Planet mit der elliptischen mittleren Entfernung a, Excentricität e, mittleren Anomalie $g=nt+c$, so dass $a^3n^2=\varkappa^2(M+m)$. Es sei ferner μ ein Komet, Asteroid oder Mond mit zu vernachlässigender Masse, so kann man die vollständigen Bewegungsgleichungen von μ in folgender strengen Form aufstellen.

Ueber der Länge a als Grundlinie construire man aus den drei Massen ein *fictives* Dreieck $M'm'\mu'$, dessen drei Seiten $M'm'=a$, $M'\mu'=R$, $m'\mu'=r$ den entsprechenden Seiten des *wahren* Dreiecks $Mm\mu$ der drei Körper parallel sein sollen. Bezieht man dann die Lage von μ' auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Ursprung im Schwerpunkt von a liegen mag, dessen x-Axe durch M' gehen und dessen xy-Ebene der Ekliptik oder Ebene der Planetenbahn parallel sein soll, so ergeben sich die Differentialgleichungen

$$(1+e\cos g)\left(\frac{d^2x}{dt^2}+2n\frac{dy}{dt}\right) = \frac{\partial U}{\partial x},$$

$$(1+e\cos g)\left(\frac{d^2y}{dt^2}-2n\frac{dx}{dt}\right) = \frac{\partial U}{\partial y},$$

$$(1+e\cos g)\left(\frac{d^2z}{dt^2}+z\right) = \frac{\partial U}{\partial z},$$

wo zur Abkürzung

$$U = \varkappa^2 M\left(\frac{1}{R}+\frac{R^2}{2a^3}\right)+\varkappa^2 m\left(\frac{1}{r}+\frac{r^2}{2a^3}\right)$$

geschrieben ist. Den (letzten) Multiplicator dieses Gleichungensystems erhält man ohne Schwierigkeit. Da hier unter t nicht die wahre, sondern eine fictive Zeit verstanden wird, so hat man, um nach geschehener Integration die Lage von μ zu finden, für das Verhältniss der Seiten des wahren und des fictiven Dreieckes den Werth $1-ee:1+e\cos g$ zu benutzen.

Für $e=0$ fällt das fictive mit dem wahren Dreiecke zusammen; man kann diesen Fall als das *ungestörte* Problem betrachten, wobei die Producte

$$-\frac{e\cos g}{1+e\cos g}\frac{\partial U}{\partial x}, \quad -\frac{e\cos g}{1+e\cos g}\frac{\partial U}{\partial y}, \quad -\frac{e\cos g}{1+e\cos g}\frac{\partial U}{\partial z}$$

die *störenden* Kräfte ausdrücken. Schreibt man dann

$$\frac{dx}{dt}+ny = \xi, \quad \frac{dy}{dt}-nx = \eta, \quad \frac{dz}{dt} = \zeta,$$

$$H = \tfrac{1}{2}(\xi\xi+\eta\eta+\zeta\zeta)+n(x\eta-y\xi)-\frac{\varkappa^2 M}{R}-\frac{\varkappa^2 m}{r},$$

so nehmen die ungestörten Differentialgleichungen die canonische Form an

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \xi}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \eta}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \zeta},$$

$$\frac{d\xi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{d\eta}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{d\zeta}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial z}.$$

Da H einer Constanten gleich ist, der letzte Multiplicator die Einheit wird und die unabhängige Variable t nicht explicite vorkommt, so bleiben noch *drei* Integrationen zu leisten, um die Aufgabe für $e = 0$ auf Quadraturen zurückzuführen.

December 1865.

Ueber einige besondere Punkte des Tetraeders.

(Von Herrn *O. Hermes*.)

Der aus den Elementen bekannte Satz, dass der Schwerpunkt, der Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises und der Schnittpunkt der Höhen eines Dreiecks auf einer geraden Linie liegen, hat in neuerer Zeit dadurch an Interesse gewonnen, dass *Joachimsthal* einen analogen Satz im Raume gefunden hat, nämlich, dass bei einem Tetraeder der Schwerpunkt desselben, der Mittelpunkt der ihm umschriebenen Kugel und der Mittelpunkt des durch seine Höhen als Generatrices bestimmten Hyperboloids auf einer geraden Linie liegen. Bei einer Untersuchung der gegenseitigen Beziehungen homologer Tetraeder haben sich mir weitere Analogieen des angeführten Satzes ergeben, durch welche sich einige Fragen erledigen, welche bisher als unbeantwortet zu betrachten sind, und von denen ich hier nur die folgenden zwei hervorhebe.

Der Schnittpunkt der Höhen eines Dreiecks $\varDelta$ ist bekanntlich der Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises desjenigen dem gegebenen Dreieck ähnlichen Dreiecks $\varDelta_1$, dessen Seiten durch die Eckpunkte von $\varDelta$ parallel den jedesmaligen Gegenseiten dieses Dreiecks gelegt sind. Der *Steiner*sche Satz von den Höhen des Tetraeders (Bd. 2, p. 97 dieses Journals) führt zu keinem Punkte, welcher für das dem gegebenen Tetraeder T umgeschriebene ähnliche Tetraeder T_1, dessen Seitenflächen den correspondirenden Flächen von T parallel sind, eine gleiche Rolle spielen möchte, als der Mittelpunkt der umgeschriebenen Kugel bei dem Tetraeder T; dem Mittelpunkte wenigstens des Hyperboloids, auf welchem die Höhen des Tetraeders T als Generatrices desselben Systems liegen, kommt die angedeutete Eigenschaft nicht zu. Was ferner den *Joachimsthal*schen Satz betrifft, nach welchem die Mittelpunkte des Höhenhyperboloids und der umgeschriebenen Kugel gleichweit vom Schwerpunkte des Tetraeders abstehen, so muss beim Vergleich desselben mit dem entsprechenden Satze in der Ebene auffallen, dass im Raume die Analogie fehlt für die Eigenschaft des gemeinschaftlichen Schwerpunktes der beiden Dreiecke $\varDelta$ und $\varDelta_1$ als ihres inneren Aehnlichkeitspunktes, welcher Eigenschaft gemäss sich die Abstände des Höhenschnittpunktes und des Mittelpunktes des dem Dreieck $\varDelta$ umschriebenen Kreises vom Schwerpunkte wie $1:2$ verhalten.

Es wird sich in dem Folgendem zeigen, dass durch die Vermittelung noch anderer Punkte, als der bisher in Betracht gezogenen, diese und ähnliche Fragen ihre Erledigung finden.

§. 1.

Man kann in dem Satze, von welchem oben ausgegangen wurde, den Schnittpunkt der Höhen eines Dreiecks ABC ersetzen durch jeden beliebigen Punkt p der Ebene desselben und erhält dann einen dem Mittelpunkte des dem Dreieck umschriebenen Kreises entsprechenden Punkt p_1 als gemeinsamen Schnittpunkt des durch die Mittelpunkte a_0, b_0, c_0 der Dreiecksseiten BC, CA, AB bezüglich zu den Verbindungslinien Ap, Bp, Cp parallel gezogenen Geraden: die Punkte p und p_1 liegen mit dem Schwerpunkte p_0 des Dreiecks auf derselben geraden Linie und es ist auch hier $pp_0 = 2p_1p_0$. Weniger bekannt scheint eine naheliegende weitere Verallgemeinerung des letzten Satzes zu sein, bei welcher der Schwerpunkt des Dreiecks durch den Pol p_0 einer beliebigen Transversale (g) in Beziehung auf das Dreieck ersetzt wird, und doch empfiehlt sich gerade diese Verallgemeinerung durch die Einfachheit ihrer Beweisführung.

Bezeichnet man die zu den Schnittpunkten der Transversale (g) mit den Dreiecksseiten in Beziehung auf die Endpunkte der jedesmaligen Seite conjugirten harmonischen Punkte durch a_0, b_0, c_0, welche Punkte kurz die *Pole der Transversale* (g) *in Bezug auf die Dreiecksseiten* heissen mögen, so sind die Dreiecke ABC und $a_0b_0c_0$ bekanntlich homolog (collinear) für die Axe (g) und das Centrum p_0, indem die Geraden Aa_0, Bb_0, Cc_0 sich in p_0 durchschneiden und die Schnittpunkte der correspondirenden Linienpaare (BC, b_0c_0), (CA, c_0a_0), (AB, a_0b_0) auf der Transversale (g) liegen. Wenn man also die Verbindungslinien der Eckpunkte A, B, C des gegebenen Dreiecks mit dem beliebig gegebenen Punkte p der Ebene bezüglich verlängert bis zu ihrer Durchschneidung mit der Transversale (g) in den Punkten a, b, c, so durchschneiden sich auch die Verbindungslinien aa_0, bb_0, cc_0 in demselben Punkte p_1, welcher mit p und dem Collineationscentrum p_0 auf derselben geraden Linie liegt, und es ergiebt sich

$$\frac{p_1p}{p_1p_0} = \frac{Aa_0}{p_0a_0} : \frac{Aa}{pa}, \quad \left(= \frac{Bb_0}{p_0b_0} : \frac{Bb}{pb} = \frac{Cc_0}{p_0c_0} : \frac{Cc}{pc}\right).$$

Man hat demnach den folgenden Satz:

I. *Wenn man die Punkte, in welchen die Verbindungslinien der Ecken eines Dreiecks mit einem beliebigen Punkte p der Ebene eine ebenfalls beliebig gegebene Transversale durchschneiden, je mit den Polen dieser Transversale in Bezug auf die correspondirenden Gegenseiten des Dreiecks verbindet, so durchschneiden sich die drei Verbindungslinien in demselben Punkte p_1, welcher mit dem Punkte p_0, dem Pole der Transversale in Beziehung auf das Dreieck, und dem gegebenen Punkte p auf derselben Geraden liegt.*

Die Punkte p und p_1, welche im Folgenden wiederholt in Betracht kommen, mögen kurz *conjugirte Punkte* heissen, und die gerade Linie pp_0p_1 *Pollinie* der Transversale in Beziehung auf das Dreieck. Die Punkte p und p_1 sind ebenso conjugirte Punkte, wenn die Transversale im Unendlichen liegt, also p_0 der Schwerpunkt des Dreiecks wird, die Pollinie heisse alsdann *Mittellinie,* und zwar im Besonderen, wenn p und p_1 bezüglich der Höhenschnittpunkt und der Mittelpunkt des dem Dreieck umgeschriebenen Kreises sind.

Der analytische Beweis des Satzes (I.) gewährt für die aus diesem Satze zu ziehenden Folgerungen gewisse Vortheile, weshalb derselbe hier eine Stelle finden möge.

Das Dreieck ABC sei das Coordinatendreieck und die Gleichung der Transversale (g):

$$(g) : \quad \frac{t}{\alpha}+\frac{u}{\beta}+\frac{v}{\gamma}=0,$$

also ihr Pol in Beziehung auf das Coordinatendreieck

$$p_0 : \quad \frac{t}{\alpha}=\frac{u}{\beta}=\frac{v}{\gamma}.$$

Als die Pole der Transversale (g) in Beziehung auf die Dreiecksseiten ergeben sich die drei Punkte:

$$a_0 : \quad t=0, \quad \frac{u}{\beta}=\frac{v}{\gamma},$$

$$b_0 : \quad u=0, \quad \frac{v}{\gamma}=\frac{t}{\alpha},$$

$$c_0 : \quad v=0, \quad \frac{t}{\alpha}=\frac{u}{\beta};$$

nimmt man diese drei Punkte als Eckpunkte eines neuen Coordinatendreiecks $a_0b_0c_0$, so ergeben sich als die Gleichungen der Seiten t_0, u_0, v_0 dieses Dreiecks:

$$(1.)\quad \begin{cases} \dfrac{t_0}{\alpha} = -\dfrac{t}{\alpha}+\dfrac{u}{\beta}+\dfrac{v}{\gamma}, \\ \dfrac{u_0}{\beta} = -\dfrac{u}{\beta}+\dfrac{v}{\gamma}+\dfrac{t}{\alpha}, \\ \dfrac{v_0}{\gamma} = -\dfrac{v}{\gamma}+\dfrac{t}{\alpha}+\dfrac{u}{\beta}, \end{cases}$$

und daraus umgekehrt:

$$(2.)\quad 2\frac{t}{\alpha} = \frac{u_0}{\beta}+\frac{v_0}{\gamma},\quad 2\frac{u}{\beta} = \frac{v_0}{\gamma}+\frac{t_0}{\alpha},\quad 2\frac{v}{\gamma} = \frac{t_0}{\alpha}+\frac{u_0}{\beta},$$

und

$$(3.)\quad \frac{t}{\alpha}+\frac{u}{\beta}+\frac{v}{\gamma} = \frac{t_0}{\alpha}+\frac{u_0}{\beta}+\frac{v_0}{\gamma};$$

die Gleichung der Transversale (g) also ist für beide Coordinatendreiecke dieselbe. Ebenso werden die Gleichungen des Pols der Transversale (g) in Beziehung auf das Dreieck ABC

$$(4.)\quad \frac{t_0}{\alpha} = \frac{u_0}{\beta} = \frac{v_0}{\gamma};$$

d. h. dieser Pol ist identisch mit dem Pol der Transversale (g) in Beziehung auf das zweite Coordinatendreieck $a_0 b_0 c_0$ und hat ausserdem für dieses Dreieck dieselben Gleichungen wie für das Coordinatendreieck ABC.

Nunmehr sei durch einen der Eckpunkte des ersten Coordinatendreiecks, z. B. durch den Punkt A, eine beliebige gerade Linie gezogen

$$(5.)\quad \frac{u}{a_{12}} = \frac{v}{a_{13}},$$

so ist ihr Schnittpunkt a mit der Transversale (g):

$$\frac{-\dfrac{t}{\alpha}}{\dfrac{a_{12}}{\beta}+\dfrac{a_{13}}{\gamma}} = \frac{u}{a_{12}} = \frac{v}{a_{13}},$$

oder, wenn man der Kürze wegen die neue Constante a_{11} einführt, durch die Gleichung

$$(6.)\quad \frac{a_{11}}{\alpha}+\frac{a_{12}}{\beta}+\frac{a_{13}}{\gamma} = 0,$$

so wird der Schnittpunkt a:

$$(7.)\quad \frac{t}{a_{11}} = \frac{u}{a_{12}} = \frac{v}{a_{13}}.$$

Geht man vermittelst der Gleichungen (2.) zum Coordinatensystem t_0, u_0, v_0

über, so ergeben sich als die Gleichungen dieses Punktes a wieder

$$(8.)\qquad \frac{t_0}{a_{11}} = \frac{u_0}{a_{12}} = \frac{v_0}{a_{13}},$$

ganz übereinstimmend mit den Gleichungen (7.) dieses Punktes in dem ersten Systeme t, u, v, und demnach wird auch die Verbindungslinie $a_0 a$ dargestellt durch die Gleichung

$$(9.)\qquad \frac{u_0}{a_{12}} = \frac{v_0}{a_{13}},$$

d. h. *die Verbindungslinien eines beliebigen Punktes der Transversale* (g) *mit den correspondirenden Ecken der beiden homologen Dreiecke* ABC *und* $a_0 b_0 c_0$ *werden bei Zugrundelegung des einen oder des anderen Dreiecks als Coordinatendreiecks durch dieselben Gleichungen ausgedrückt.*

Hierauf beruht der analytische Beweis der collinearen Eigenschaften dieser Linien und der durch ihre Durchschneidung sich ergebenden Punkte, nämlich dass sich alle Situationseigenschaften des Systems ABC ungeändert auf das System $a_0 b_0 c_0$ übertragen. Denn wenn man z. B. durch die Eckpunkte A, B, C des ersten Dreiecks bezüglich die beliebigen Geraden zieht

$$(10.)\qquad \frac{u}{a_{12}} = \frac{v}{a_{13}}, \qquad \frac{v}{a_{23}} = \frac{t}{a_{21}}, \qquad \frac{t}{a_{31}} = \frac{u}{a_{32}},$$

welche die Transversale (g) in den Punkten a, b, c durchschneiden mögen, so sind die Verbindungslinien dieser Punkte mit den correspondirenden Ecken des Dreiecks $a_0 b_0 c_0$ bezüglich

$$(11.)\qquad \frac{u_0}{a_{12}} = \frac{v_0}{a_{13}}, \qquad \frac{v_0}{a_{23}} = \frac{t_0}{a_{21}}, \qquad \frac{t_0}{a_{31}} = \frac{u_0}{a_{32}}.$$

Wenn jetzt für die Constanten a_{ik} die Bedingung $a_{ik} = a_{ki}$ erfüllt wird, d. h. der Werth dieser Constanten unabhängig ist von der Stellung ihrer Indices, so gehen die Geraden (10.) durch den Punkt

$$p \ : \quad a_{23} t = a_{31} u = a_{12} v$$

und demnach die Geraden (11.) durch den conjugirten Punkt

$$p_1 \ : \quad a_{23} t_0 = a_{31} u_0 = a_{12} v_0.$$

Die Gleichungen des Punktes p_1 für das Coordinatensystem (t, u, v) werden die folgenden:

$$(12.)\qquad \frac{t}{\alpha} : \frac{u}{\beta} : \frac{v}{\gamma} = \left(\frac{a_{12}}{\beta} + \frac{a_{13}}{\gamma}\right) : \left(\frac{a_{23}}{\gamma} + \frac{a_{21}}{\alpha}\right) : \left(\frac{a_{31}}{\alpha} + \frac{a_{32}}{\beta}\right),$$

und es ist sofort zu sehen, dass dieser Punkt mit den Punkten p und p_0 auf

derselben Geraden liegt, nämlich

$$(14.)\quad \frac{t}{\alpha}\Big(\frac{a_{12}}{\gamma}-\frac{a_{13}}{\beta}\Big)+\frac{u}{\beta}\Big(\frac{a_{23}}{\alpha}-\frac{a_{21}}{\gamma}\Big)+\frac{v}{\gamma}\Big(\frac{a_{31}}{\beta}-\frac{a_{32}}{\alpha}\Big) = 0,$$

womit der Satz (I.) bewiesen ist.

Abgesehen von den weiteren collinearen Beziehungen aller von den beiden conjugirten Punkten p und p_1 beschriebener Figuren, sei hier des Folgenden wegen nur noch hervorgehoben, dass man den Punkt p ansehen kann als den Pol der Transversale (g) in Beziehung auf einen bestimmten, drei beliebig angenommene Punkte λ, μ, ν enthaltenden Kegelschnitt (K), und dass dann der Punkt p_1 der Pol ist derselben Transversale in Beziehung auf den collinearen Kegelschnitt (K_1), d. h. welcher die drei conjugirten Punkte λ_1, μ_1, ν_1 enthält, und für welchen die Verbindungslinien aller Punkte mit den correspondirenden Punkten von (K) durch den Punkt p_0 gehen, während die correspondirenden Sehnen beider Kegelschnitte sich in Punkten der Transversale (g) durchschneiden. Wenn im Besonderen (g) im Unendlichen liegt, so wird p_0, der gemeinschaftliche Schwerpunkt der beiden Dreiecke ABC und $a_0b_0c_0$, Aehnlichkeitspunkt der beiden Kegelschnitte (K) und (K_1), ferner werden p und p_1 ihre Mittelpunkte und die correspondirenden Sehnen einander parallel; wenn also (K) ein Kreis ist, so wird auch (K_1) ein Kreis. Die letzte Annahme entspricht den Punkten p und p_1 als Höhenschnittpunkt und Mittelpunkt des dem Dreieck ABC umschriebenen Kreises.

§. 2.

Um jetzt die analogen räumlichen Eigenschaften zu entwickeln, denke man sich durch ein beliebig gegebenes Tetraeder $ABCD$ die Transversalebene (E) gelegt und zu den Schnittlinien derselben mit den Tetraederflächen in Beziehung auf die zugehörigen Seitendreiecke die Pole construirt, welche Punkte kurz *die Pole der Transversalebene in Beziehung auf die Tetraederflächen* heissen und den Gegenecken entsprechend durch A_0, B_0, C_0, D_0 bezeichnet werden mögen, so sind die Tetraeder $ABCD$ und $A_0B_0C_0D_0$ bekanntlich homolog (collinear) für die Ebene (E), indem die correspondirenden Seitenflächen beider Tetraeder sich in Geraden der Ebene (E) durchschneiden: die Verbindungslinien der entsprechenden Eckpunkte AA_0, BB_0, CC_0, DD_0 gehen durch denselben Punkt P_0, den Pol der Ebene (E) in Beziehung auf das Tetraeder, und dieser ist darum das Collineationscentrum der beiden Tetraeder. In dem besonderen Falle, wo die Ebene (E) im Unendlichen liegt,

werden A_0, B_0, C_0, D_0 die Schwerpunkte der Seitendreiecke, die entsprechenden Tetraederflächen einander parallel, ferner wird P_0 der gemeinschaftliche Schwerpunkt oder der innere Aehnlichkeitspunkt der beiden alsdann ähnlichen Tetraeder.

Es sei $ABCD$ das Coordinatentetraeder und zwar seien der Reihe nach die Dreiecke BCD, CDA, DAB, ABC die t-, u-, v-, w-Ebene, ferner die Gleichung der Transversalebene

$$E: \quad \frac{t}{\alpha}+\frac{u}{\beta}+\frac{v}{\gamma}+\frac{w}{\delta} = 0,$$

so sind die Pole derselben in Beziehung auf die einzelnen Tetraederflächen:

$$\begin{array}{lll} A_0: & t=0, & \frac{u}{\beta}=\frac{v}{\gamma}=\frac{w}{\delta}, \\ B_0: & u=0, & \frac{t}{\alpha}=\frac{v}{\gamma}=\frac{w}{\delta}, \\ C_0: & v=0, & \frac{t}{\alpha}=\frac{u}{\beta}=\frac{w}{\delta}, \\ D_0: & w=0, & \frac{t}{\alpha}=\frac{u}{\beta}=\frac{v}{\gamma}, \end{array}$$

deren Verbindungslinien mit den entsprechenden Gegenecken von $ABCD$ alle durch den Punkt

$$P_0: \quad \frac{t}{\alpha}=\frac{u}{\beta}=\frac{v}{\gamma}=\frac{w}{\delta},$$

den Pol der Ebene (E) in Beziehung auf das Tetraeder, gehen. Nimmt man jetzt die Punkte A_0, B_0, C_0, D_0 als Eckpunkte eines neuen Coordinatentetraeders, so sind die Seitenflächen $B_0C_0D_0$, $C_0D_0A_0$, $D_0A_0B_0$, $A_0B_0C_0$ desselben der Reihe nach:

$$(1.) \quad \begin{cases} \frac{t_0}{\alpha} = -\frac{2t}{\alpha}+\frac{u}{\beta}+\frac{v}{\gamma}+\frac{w}{\delta}, \\ \frac{u_0}{\beta} = -\frac{2u}{\beta}+\frac{v}{\gamma}+\frac{w}{\delta}+\frac{t}{\alpha}, \\ \frac{v_0}{\gamma} = -\frac{2v}{\gamma}+\frac{w}{\delta}+\frac{t}{\alpha}+\frac{u}{\beta}, \\ \frac{w_0}{\delta} = -\frac{2w}{\delta}+\frac{t}{\alpha}+\frac{u}{\beta}+\frac{v}{\gamma}, \end{cases}$$

woraus sich umgekehrt als Ausdrücke der alten Coordinaten durch die neuen ergeben:

$$(2.)\quad \begin{cases} \frac{3t}{\alpha} = \frac{u_0}{\beta}+\frac{v_0}{\gamma}+\frac{w_0}{\delta}, \quad \frac{3u}{\beta} = \frac{v_0}{\gamma}+\frac{w_0}{\delta}+\frac{t_0}{\alpha}, \quad \frac{3v}{\gamma} = \frac{w_0}{\delta}+\frac{t_0}{\alpha}+\frac{u_0}{\beta}, \\ \frac{3w}{\delta} = \frac{t_0}{\alpha}+\frac{u_0}{\beta}+\frac{v_0}{\gamma}, \end{cases}$$

und demgemäss

$$(3.)\quad \frac{t}{\alpha}+\frac{u}{\beta}+\frac{v}{\gamma}+\frac{w}{\delta} = \frac{t_0}{\alpha}+\frac{u_0}{\beta}+\frac{v_0}{\gamma}+\frac{w_0}{\delta};$$

die Gleichung also der Transversalebene (E) ist für beide Coordinatentetraeder dieselbe: ebenso werden die Gleichungen des Pols der Ebene (E) für das Tetraeder $ABCD$:

$$(4.)\quad \frac{t_0}{\alpha} = \frac{u_0}{\beta} = \frac{v_0}{\gamma} = \frac{w_0}{\delta},$$

d. h. dieser Pol ist identisch mit dem Pol der Ebene (E) in Bezug auf das zweite Coordinatentetraeder $A_0B_0C_0D_0$ und hat ausserdem für das System (t_0, u_0, v_0, w_0) dieselben Gleichungen wie für das System (t, u, v, w).

Nunmehr sei durch einen der Eckpunkte des ersten Coordinatentetraeders, z. B. durch A, eine beliebige gerade Linie gezogen:

$$(5.)\quad \frac{u}{a_{12}} = \frac{v}{a_{13}} = \frac{w}{a_{14}},$$

so ist ihr Schnittpunkt a mit der Transversalebene (E):

$$\frac{-\frac{t}{\alpha}}{\frac{a_{12}}{\beta}+\frac{a_{13}}{\gamma}+\frac{a_{14}}{\delta}} = \frac{u}{a_{12}} = \frac{v}{a_{13}} = \frac{w}{a_{14}},$$

oder, wenn man der Kürze wegen die neue Constante a_{11} einführt durch die Gleichung

$$(6.)\quad \frac{a_{11}}{\alpha}+\frac{a_{12}}{\beta}+\frac{a_{13}}{\gamma}+\frac{a_{14}}{\delta} = 0,$$

so wird der Schnittpunkt a:

$$(7.)\quad \frac{t}{a_{11}} = \frac{u}{a_{12}} = \frac{v}{a_{13}} = \frac{w}{a_{14}}.$$

Geht man nun vermittelst der Gleichungen (2.) zum Coordinatensystem (t_0, u_0, v_0, w_0) über, so ergeben sich nach Hinweghebung des Factors $\left(\frac{a_{11}}{\alpha}\right)^2$ als die Gleichungen dieses Punktes a wieder

$$(8.)\quad \frac{t_0}{a_{11}} = \frac{u_0}{a_{12}} = \frac{v_0}{a_{13}} = \frac{w_0}{a_{14}},$$

ganz übereinstimmend mit den Gleichungen (7.) dieses Punktes im System

(t, u, v, w), und demnach wird auch die Verbindungslinie $A_0 a$ durch die Gleichungen

$$(9.) \qquad \frac{u_0}{a_{12}} = \frac{v_0}{a_{13}} = \frac{w_0}{a_{14}}$$

ausgedrückt, welche mit den Gleichungen (5.) übereinkommen, d. h.

die Verbindungslinien eines beliebigen Punktes der Transversalebene (E) *mit den correspondirenden Ecken der beiden homologen Tetraeder* $ABCD$ *und* $A_0B_0C_0D_0$ *werden bei Zugrundelegung des einen oder des anderen Tetraeders als Coordinatentetraeder durch dieselben Gleichungen ausgedrückt.*

Hierauf beruht der analytische Beweis der collinearen Eigenschaften dieser Linien: es wird sich zeigen, dass durch die Verbindung der Punkte der Ebene (E) mit den entsprechenden Eckpunkten der beiden homologen Tetraeder $ABCD$ und $A_0B_0C_0D_0$ sich vier Paare conjugirter räumlicher Strahlenbüschel ergeben, welche einander in der Weise entsprechen, dass alle Situationseigenschaften, welche den einen zukommen, sich ungeändert auf die anderen conjugirten übertragen lassen.

Es seien die durch die Eckpunkte A, B, C, D des ersten Tetraeders gezogenen Geraden bezüglich

$$(10.) \qquad \begin{cases} \dfrac{u}{a_{12}} = \dfrac{v}{a_{13}} = \dfrac{w}{a_{14}}, \\ \dfrac{t}{a_{21}} = \dfrac{v}{a_{23}} = \dfrac{w}{a_{24}}, \\ \dfrac{t}{a_{31}} = \dfrac{u}{a_{32}} = \dfrac{w}{a_{34}}, \\ \dfrac{t}{a_{41}} = \dfrac{u}{a_{42}} = \dfrac{v}{a_{43}}, \end{cases}$$

welche die Transversalebene (E) in den Punkten a, b, c, d durchschneiden mögen, so sind die Verbindungslinien dieser Punkte mit den correspondirenden Eckpunkten des Tetraeders $A_0B_0C_0D_0$, bezüglich

$$(11.) \qquad \begin{cases} \dfrac{u_0}{a_{12}} = \dfrac{v_0}{a_{13}} = \dfrac{w_0}{a_{14}}, \\ \dfrac{t_0}{a_{21}} = \dfrac{v_0}{a_{23}} = \dfrac{w_0}{a_{24}}, \\ \dfrac{t_0}{a_{31}} = \dfrac{u_0}{a_{32}} = \dfrac{w_0}{a_{34}}, \\ \dfrac{t_0}{a_{41}} = \dfrac{u_0}{a_{42}} = \dfrac{v_0}{a_{43}}, \end{cases}$$

ganz dieselben Gleichungen im System (t_0, u_0, v_0, w_0) wie die Gleichungen (10.) im System (t, u, v, w); demnach kommen alle einer beliebigen Bedingung zwischen den Constanten a_{ik} entsprechenden Eigenschaften des ersten Systems (10.) von Geraden ungeändert dem zweiten System (11.) von Geraden zu, d. h. die beiden Systeme von Geraden, welche oben als conjugirte bezeichnet wurden, stimmen in allen Situationseigenschaften überein.

Wenn man also zunächst annimmt, dass $a_{ik} = a_{\nu k}$, d. h. dass die Coefficienten in den einzelnen Verticalreihen einander gleich sind, die Linien (10.) also durch denselben Punkt gehen, so haben die Linien (11.) dieselbe Eigenschaft, und zwar entspricht dem gemeinschaftlichen Schnittpunkte der ersteren:

$$P: \quad \frac{t}{a_1} = \frac{u}{a_2} = \frac{v}{a_3} = \frac{w}{a_4}$$

als gemeinschaftlicher Schnittpunkt der letzteren der Punkt

$$P_1: \quad \frac{t_0}{a_1} = \frac{u_0}{a_2} = \frac{v_0}{a_3} = \frac{w_0}{a_4}.$$

Nennt man jede zwei Punkte (wie P und P_1), welche in beiden Coordinatensystemen durch dieselben Gleichungen dargestellt werden, *conjugirte Punkte*, so hat man jetzt nur noch zu untersuchen, welche Lage conjugirte Punkte zu P_0 haben; es ergiebt sich, dass sie mit P_0 auf derselben Geraden liegen. Denn betrachtet man etwa die dem Punkte a der Transversalebene zugehörigen conjugirten Geraden Aa und A_0a, so liegen dieselben mit AA_0 in derselben Ebene, dasselbe also gilt auch für die auf diesen Geraden bezüglich liegenden Punkte P, P_1 und P_0; aus demselben Grunde liegen diese drei Punkte auch in jeder der drei übrigen Ebenen BbB_0, CcC_0, DdD_0, also in dem gemeinschaftlichen Durchschnitt dieser Ebenen, einer geraden Linie. Weiter erhält man, wie früher pag. 294, aus dem Dreieck aPP_1, durchschnitten von der Transversale (P_0, A_0, A):

$$(12.) \quad \frac{P_1P}{P_1P_0} = \frac{AA_0}{P_0A_0} : \frac{Aa}{Pa} \left(= \frac{BB_0}{P_0B_0} : \frac{Bb}{Pb} = \frac{CC_0}{P_0C_0} : \frac{Cc}{Pc} = \frac{DD_0}{P_0D_0} : \frac{Dd}{Pd} \right).$$

Man hat also den folgenden Satz:

II. *Wenn man die Punkte, in welchen die Verbindungslinien der Ecken eines Tetraeders mit einem beliebigen Punkte P des Raumes eine ebenfalls beliebig gegebene Transversalebene (E) durchschneiden, je mit dem Pol dieser Ebene in Bezug auf die correspondirende Gegenfläche des Tetraeders verbindet, so durchschneiden sich die vier Verbindungslinien in*

demselben Punkte P_1, welcher mit dem Punkte P_0, dem Pol der Transversalebene (E) in Beziehung auf das Tetraeder, und dem gegebenen Punkte P auf derselben Geraden liegt.

Wenn im Besonderen die Transversalebene (E) ins Unendliche rückt, so werden die Linien Aa, Bb, Cc, Dd bezüglich parallel den Linien Aa_0, Bb_0, Cc_0, Dd_0, die Punkte A_0, B_0, C_0, D_0 die Schwerpunkte der Seitendreiecke und demgemäss P_0 der Schwerpunkt des Tetraeders $ABCD$, ferner werden in den Relationen (12.) die Verhältnisse der unendlich langen Strecken $\frac{Aa}{Pa}$, $\frac{Bb}{Pb}$, $\frac{Cc}{Pc}$, $\frac{Dd}{Pd}$ gleich der Einheit und demnach diese Relationen selbst:

$$(13.)\qquad \frac{P_1P}{P_1P_0} = \frac{AA_0}{P_0A_0}\left(=\frac{BB_0}{P_0B_0} = \frac{CC_0}{P_0C_0} = \frac{DD_0}{P_0D_0}\right) = 4;$$

P_0 also theilt die Verbindungslinie jeder zwei conjugirten Punkte P und P_1 in demselben Verhältnisse wie die Verbindungslinien der correspondirenden Punkte der beiden ähnlichen und in Beziehung auf P_0 als inneren Aehnlichkeitspunkt ähnlich liegenden Tetraeder $ABCD$ und $A_0B_0C_0D_0$, d. h. P_0 ist auch der innere Aehnlichkeitspunkt für jede zwei von den conjugirten Punkten P und P_1 beschriebenen zusammengehörigen Systeme, also:

III. *Wenn man durch die Schwerpunkte der Seitenflächen eines Tetraeders Parallelen zieht zu den Verbindungslinien der entsprechenden Gegenecken mit einem beliebigen Punkte P des Raumes, so durchschneiden sich dieselben in demselben Punkte P_1, welcher mit P und dem Schwerpunkte P_0 des Tetraeders, P_0 zwischen P und P_1, auf derselben Geraden liegt und zwar so, dass*

$$P_1P = 4P_1P_0.$$

Eine Fläche des zweiten Grades (F) ist bekanntlich vollkommen bestimmt, wenn von ihr vier Punkte gegeben sind und ein Poltetraeder, d. h. ein Tetraeder, von welchem jeder Eckpunkt der Pol ist des gegenüberliegenden Seitendreiecks in Bezug auf die Fläche (F). Nimmt man nunmehr mit Berücksichtigung des Theorems (II.) an, dass der beliebig gegebene Punkt P für eine durch irgend vier Punkte A', B', C', D' gehende Fläche (F) der Eckpunkt ist eines Poltetraeders $PQRS$, wo Q, R, S in der Transversalebene (E) liegen, so bestimmt der conjugirte Punkt P_1 als vierter Eckpunkt ebenfalls mit den Punkten Q, R, S ein Poltetraeder für diejenige Fläche des zweiten Grades (F_1), welche die den vier Punkten A', B', C', D' conjugirten Punkte A'_1, B'_1, C'_1, D'_1 enthält.

Um nunmehr, diess vorausgesetzt, der Analogie für die Eigenschaft des Höhenschnittpunktes eines Dreiecks ABC als des Mittelpunktes des Kreises, welcher dem conjugirten ähnlichen Dreieck $A_1B_1C_1$ umschrieben ist, näher zu kommen, nehme man an, dass die Transversalebene im Unendlichen liegt, und dass die vier Punkte A', B', C', D' die Eckpunkte sind desjenigen dem Tetraeder $ABCD$ umschriebenen Tetraeders, dessen Seitendreiecke denen von $ABCD$ parallel sind. Alsdann kann man P ansehen als den Mittelpunkt einer bestimmten dem Tetraeder $A'B'C'D'$ umschriebenen Fläche des zweiten Grades (F), von welcher ein System conjugirter Durchmesser der Richtung nach bestimmt ist. Der conjugirte Punkt P_1 wird unter dieser Voraussetzung der Mittelpunkt derjenigen dem gegebenen Tetraeder $ABCD$, welches dem Tetraeder $A'B'C'D'$ conjugirt ist, umschriebenen Fläche des zweiten Grades (F_1), von welcher ein System conjugirter Durchmesser dem der conjugirten Fläche (F) zu Grunde liegenden System von Durchmessern parallel ist. Wenn man endlich als den Punkt P den Mittelpunkt wählt der dem Tetraeder $A'B'C'D'$ umschriebenen Kugel, für welche also jede drei auf einander senkrechte Axen als ein System conjugirter Durchmesser angesehen werden können, so wird auch der conjugirte Punkt P_1 der Mittelpunkt einer solchen dem Tetraeder $ABCD$ umschriebenen Fläche des zweiten Grades, für welche jede drei auf einander senkrechte Axen ein System conjugirter Durchmesser bilden, also eine Kugel, d. h.

IV. *Es sei einem Tetraeder (T) ein zweites (T') umschrieben mit parallelen Seitenflächen: wenn man dann durch die Schwerpunkte der Seitenflächen von (T) Parallelen zieht zu den Verbindungslinien der entsprechenden Gegenecken mit dem Mittelpunkte M der dem Tetraeder (T') umschriebenen Kugel, so durchschneiden sich diese vier Parallelen in dem Mittelpunkte M_1 der dem Tetraeder (T) umschriebenen Kugel; es liegen M, M_1 und P_0, der Schwerpunkt des Tetraeders, P_0 zwischen M und M_1, auf derselben Geraden, und zwar so, dass*

$$M_1M = 4M_1P_0.$$

Nimmt man umgekehrt M_1, den Mittelpunkt der dem Tetraeder (T) umschriebenen Kugel, als gegeben an, so erhält man den Mittelpunkt M der dem Tetraeder (T') umschriebenen Kugel als gemeinschaftlichen Schnittpunkt der durch die Ecken des Tetraeders (T) parallel zu den jedesmaligen Verbindungslinien der Schwerpunkte der entsprechenden Gegenflächen mit M_1 gezogenen Geraden. Man kann annehmen, dass diese Parallelen AM, BM,

CM, DM in Ebenen liegen, welche durch die Ecken des Tetraeders (T) parallel gelegt sind zu den Ebenen, welche die Verbindungslinien A_0M_1, B_0M_1, C_0M_1, D_0M_1 und bezüglich die Mittelpunkte der den Dreiecken BCD, CDA, DAB, ABC umschriebenen Kreise enthalten, d. h. welche senkrecht zu diesen Tetraederflächen und parallel den ihnen zugehörigen Mittellinien gelegt sind. Wie man also in der Ebene die beiden Sätze vom Mittelpunkte des umschriebenen Kreises und dem Schnittpunkte der Höhen eines Dreiecks, wie folgt, aussprechen kann:

Die Geraden, auf den Seiten eines Dreiecks (Δ) *senkrecht in den Mittelpunkten derselben errichtet, durchschneiden sich im Mittelpunkte* M_1 *des dem Dreieck* (Δ) *umschriebenen Kreises,* und

Wenn man dem Dreieck (Δ) *ein zweites Dreieck* (Δ') *umschreibt mit parallelen Seiten, so durchschneiden sich die aus den Ecken von* (Δ) *auf die Gegenseiten gefällten Senkrechten in dem Mittelpunkte* M *des dem Dreieck* (Δ') *umschriebenen Kreises. Die beiden Mittelpunkte* M *und* M_1 *sind conjugirte Punkte für den inneren Aehnlichkeitspunkt* P_0, *den gemeinschaftlichen Schwerpunkt und Aehnlichkeitspunkt der beiden Dreiecke* (Δ) *und* (Δ');

so kann man den beiden entsprechenden Sätzen im Raume folgende Form geben:

V. *Die Ebenen, auf den Seitenflächen eines Tetraeders* (T) *senkrecht in den Mittellinien derselben errichtet, durchschneiden sich im Mittelpunkte* M_1 *der dem Tetraeder* (T) *umschriebenen Kugel,* und

Wenn man dem Tetraeder (T) *ein zweites Tetraeder* (T') *umschreibt mit parallelen Seitenflächen, so durchschneiden sich die aus den Ecken von* (T) *auf die Gegenflächen senkrecht und den auf diesen Flächen liegenden Mittellinien parallel gelegten Ebenen in dem Mittelpunkte* M *der dem Tetraeder* (T') *umschriebenen Kugel. Die beiden Mittelpunkte* M *und* M_1 *sind conjugirte Punkte für den inneren Aehnlichkeitspunkt* P_0, *den gemeinschaftlichen Schwerpunkt und Aehnlichkeitspunkt der beiden Tetraeder* (T) *und* (T'). —

Die Sätze II. bis V. haben sich ergeben aus den allgemeinen Beziehungen der conjugirten Verbindungslinien ((10.) und (11.)) der entsprechenden Eckpunkte der beiden homologen Tetraeder $ABCD$ und $A_0B_0C_0D_0$ mit beliebigen Punkten der Collineationsebene, und zwar unter der Annahme, dass diese Verbindungslinien zu vier sich in demselben Punkte durchschneiden. Macht man für die Constanten a_{ik} in den erwähnten Gleichungen andere Annahmen,

so ergeben sich andere Sätze: wir beschränken uns hier auf die neue Annahme, dass

$$a_{ik} = a_{ki}$$

sein soll, dass also diese Constanten durch die Vertauschung ihrer Doppelindices keine Aenderung erleiden. Die geometrische Bedeutung dieser Annahme ist die, dass die vier Geraden (10.) Aa, Bb, Cc, Dd hyperboloidisch liegen, (Bd. 56, pag. 220 dieses Journals), d. h. Generatrices sind desselben Systems eines Hyperboloids (H). Alsdann gilt dasselbe für die vier conjugirten Geraden (11.) A_0a, B_0b, C_0c, D_0d, und zwar hat das Hyperboloid (H_1), auf welchem diese Linien demgemäss als Generatrices desselben Systems liegen, für das Coordinatensystem (t_0, u_0, v_0, w_0) dieselbe Gleichung, wie das durch die ersten Geraden bestimmte Hyperboloid (H) für das Coordinatensystem (t, u, v, w), und weil ausserdem die Ebene (E) in beiden Systemen durch dieselbe Gleichung dargestellt wird (3.), so haben auch die Pole Q und Q_1 dieser Ebene in Beziehung auf die Hyperboloide (H) und (H_1) dieselben Gleichungen und sind demnach conjugirte Punkte, also auf derselben Geraden mit P_0 befindlich, so dass

$$(14.)\quad \frac{Q_1Q}{Q_1P_0} = \frac{AA_0}{P_0A_0} : \frac{Aa}{Qa} \left(= \frac{BB_0}{P_0B_0} : \frac{Bb}{Qb} = \frac{CC_0}{P_0C_0} : \frac{Cc}{Qc} = \frac{DD_0}{Q_0D_0} : \frac{Dd}{Qd} \right).$$

Man hat demnach folgenden Satz:

VI. *Wenn man durch die Eckpunkte eines Tetraeders vier gerade Linien zieht, welche die Generatrices sind desselben Systems eines Hyperboloids* (H), *und den Schnittpunkt einer jeden derselben mit einer beliebig gegebenen Transversalebene* (E) *mit dem Pol dieser Ebene in Beziehung auf die correspondirende Gegenfläche des Tetraeders verbindet, so sind die vier Verbindungslinien die Generatrices desselben Systems eines zweiten Hyperboloids* (H_1). *Die Pole* Q *und* Q_1 *der Ebene* (E) *in Beziehung auf die beiden Hyperboloide* (H) *und* (H_1) *liegen mit dem Pol* (P_0) *dieser Ebene in Beziehung auf das gegebene Tetraeder auf derselben Geraden, mit dem oben* (14.) *angegebenen Verhältniss ihrer Abstände.*

Rückt die Transversalebene ins Unendliche, so dass an Stelle ihrer Pole in Beziehung auf die Tetraederflächen deren Schwerpunkte und in Beziehung auf die Hyperboloide (H) und (H_1) deren Mittelpunkte N und N_1 treten, während die Relationen (14.) ersetzt werden durch die folgenden:

$$(15.)\quad \frac{N_1 N}{N_1 P_0} = \frac{AA_0}{P_0 A_0}\left(= \frac{BB_0}{P_0 B_0} = \frac{CC_0}{P_0 C_0} = \frac{DD_0}{P_0 D_0}\right) = 4;$$

so ergiebt sich der Satz:

VII. *Wenn man durch die Eckpunkte eines Tetraeders vier gerade Linien zieht, welche die Generatrices sind desselben Systems eines Hyperboloids* (H), *und durch die Schwerpunkte der jedesmaligen Gegenflächen Parallelen zu denselben legt, so sind diese die Generatrices desselben Systems eines zweiten Hyperboloids* (H_1): *die Mittelpunkte* N *und* N_1 *dieser beiden Hyperboloide* (H) *und* (H_1) *liegen mit dem Schwerpunkte* P_0 *des Tetraeders auf derselben geraden Linie,* P_0 *zwischen* N *und* N_1, *und zwar so dass*

$$N_1 N = 4 N_1 P_0.$$

Nach dem in der Einleitung erwähnten *Steiner*schen Satze sind die Höhen eines Tetraeders die Generatrices desselben Systems eines Hyperboloids: es ergiebt sich darum als ein besonderer Fall des Satzes (VII.):

VIII. *Die Lothe in den Schwerpunkten der Seitenflächen eines Tetraeders sind die Generatrices desselben Systems eines Hyperboloids: die Mittelpunkte* N_1 *und* N *dieses Hyperboloids und des Höhenhyperboloids liegen mit dem Schwerpunkte* P_0 *des Tetraeders in gerader Linie, und zwar der Schwerpunkt zwischen den beiden Mittelpunkten, so dass*

$$N_1 N = 4 N_1 P_0.$$

Nunmehr hat *Joachimsthal* gezeigt, dass der Mittelpunkt N des Höhenhyperboloids, der Schwerpunkt P_0 des Tetraeders und der Mittelpunkt M_1 der dem Tetraeder umschriebenen Kugel auf derselben geraden Linie liegen, und zwar P_0 als Mittelpunkt der Strecke NM_1; es liegen demnach die vier Punkte M_1, N_1, P_0, N in der angegebenen Reihenfolge auf derselben Geraden und zwar so dass

$$\frac{NM_1}{NP_0} = \frac{N_1 M_1}{N_1 P_0} = 2,$$

also:

IX. *Der Mittelpunkt* M_1 *der dem Tetraeder umschriebenen Kugel, der Mittelpunkt* N_1 *des durch die Lothe in den Schwerpunkten der Seitenflächen bestimmten Hyperboloids, der Schwerpunkt* P_0 *des Tetraeders und der Mittelpunkt* N *des Höhenhyperboloids liegen als vier harmonische Punkte in der angegebenen Reihenfolge auf einer geraden Linie,* P_0 *als Mittelpunkt der beiden äusseren Punkte* N *und* M_1.

Nimmt man noch die in Satz (V.) ausgesprochene Eigenschaft des Punktes M, als des gemeinschaftlichen Schnittpunktes der vier Höhenebenen, hinzu, so erhält man

$$\frac{MP_0}{M_1P_0} = \frac{NP_0}{N_1P_0} = 3,$$

und N, der Mittelpunkt des Höhenhyperboloids, liegt in der Mitte der Linie M_1M, d. h. der Verbindungslinie des Mittelpunktes der umschriebenen Kugel und des Schnittpunktes der vier Höhenebenen.

§. 3.

Es sei jetzt die Frage zu erledigen, welche Verallgemeinerung der *Joachimsthal*sche Satz über die gegenseitige Lage der Mittelpunkte des Höhenhyperboloids und der dem Tetraeder umschriebenen Kugel erfährt, wenn man den ersteren durch den Pol einer beliebigen Ebene in Beziehung auf ein durch vier die Eckpunkte des Tetraeders durchschneidende Geraden als Generatrices desselben Systems bestimmtes Hyperboloid ersetzt. Auch hier empfiehlt sich zunächst für die Untersuchung der einfachere Fall, wo durch die Eckpunkte des Tetraeders vier sich in demselben Punkte durchschneidende Geraden gezogen sind.

In dem entsprechenden Satze beim Dreieck (§. 1) traten der Höhenschnittpunkt und der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises als specielle Fälle conjugirter Punkte für eine beliebige Transversale auf: der erstere dieser Punkte p war willkürlich in der Ebene angenommen und der zweite p_1 ergab sich dann als der gemeinsame Durchschnittspunkt der Verbindungslinien derjenigen Punkte a, b, c, in welchen die Verbindungslinien des Punktes p mit den Ecken des Dreiecks die Transversale durchschnitten, mit den Polen a_0, b_0, c_0 dieser Transversale in Beziehung auf die Dreiecksseiten. Im Raume heisst der analoge Satz:

X. Die Verbindungslinien der Ecken eines Tetraeders mit einem beliebigen Punkte P des Raumes durchschneiden eine ebenfalls beliebig gegebene Ebene (E) in vier Punkten: wenn man durch jede zwei dieser Punkte, welche als solche einem bestimmten Paar von Ecken des Tetraeders zugehören, und den Pol der Ebene (E) in Beziehung auf die das andere Eckenpaar verbindende Kante eine Ebene legt, so durchschneiden sich die sechs auf diese Weise construirbaren Ebenen in einem und demselben Punkte.

Zum Beweise dieses Satzes nehme man, wie in §. 2, das gegebene Tetraeder *ABCD* als Coordinatentetraeder: die Gleichung der Transversalebene sei wieder

$$E: \quad \frac{t}{\alpha}+\frac{u}{\beta}+\frac{v}{\gamma}+\frac{w}{\delta} = 0,$$

und der Schnittpunkt P der durch die Eckpunkte A, B, C, D bezüglich gelegten Geraden:

$$P: \quad \frac{t}{a_1}=\frac{u}{a_2}=\frac{v}{a_3}=\frac{w}{a_4};$$

wenn man nun der Kürze wegen (§. 2, Gleichung (6.)) die neuen Constanten a^{I}, a^{II}, a^{III}, a^{IV} einführt durch die Gleichungen:

$$(1.)\quad \begin{cases} \dfrac{a^{\mathrm{I}}}{\alpha}+\dfrac{a_2}{\beta}+\dfrac{a_3}{\gamma}+\dfrac{a_4}{\delta} = 0, \\ \dfrac{a_1}{\alpha}+\dfrac{a^{\mathrm{II}}}{\beta}+\dfrac{a_3}{\gamma}+\dfrac{a_4}{\delta} = 0, \\ \dfrac{a_1}{\alpha}+\dfrac{a_2}{\beta}+\dfrac{a^{\mathrm{III}}}{\gamma}+\dfrac{a_4}{\delta} = 0, \\ \dfrac{a_1}{\alpha}+\dfrac{a_2}{\beta}+\dfrac{a_3}{\gamma}+\dfrac{a^{\mathrm{IV}}}{\delta} = 0, \end{cases}$$

so sind (§. 2, Gleichung (7.)) die Schnittpunkte a, b, c, d der Linien AP, BP, CP, DP mit der Ebene (E):

$$a: \quad \frac{t}{a^{\mathrm{I}}}=\frac{u}{a_2}=\frac{v}{a_3}=\frac{w}{a_4},$$

$$b: \quad \frac{t}{a_1}=\frac{u}{a^{\mathrm{II}}}=\frac{v}{a_3}=\frac{w}{a_4},$$

$$c: \quad \frac{t}{a_1}=\frac{u}{a_2}=\frac{v}{a^{\mathrm{III}}}=\frac{w}{a_4},$$

$$d: \quad \frac{t}{a_1}=\frac{u}{a_2}=\frac{v}{a_3}=\frac{w}{a^{\mathrm{IV}}}.$$

Die Ebene durch irgend zwei dieser Punkte, z. B. a und b, und den Pol der Ebene (E) in Beziehung auf die das andere Eckenpaar, hier C und D, verbindende Kante, nämlich

$$t = u = 0, \quad \frac{v}{\gamma} = \frac{w}{\delta},$$

hat also die Gleichung:

$$(2.)\quad \left(\frac{t}{\alpha}+\frac{u}{\beta}\right)\left(\frac{a_3}{\gamma}-\frac{a_4}{\delta}\right)+\left(\frac{v}{\gamma}-\frac{w}{\delta}\right)\left(\frac{a_3}{\gamma}+\frac{a_4}{\delta}\right) = 0,$$

wie sich sofort unter Berücksichtigung der Gleichungen (1.) ergiebt. Diese Ebene enthält aber ausserdem die zu den Schnittpunkten A', B', C', D' der Linien AP, BP, CP, DP bezüglich mit den Ebenen BCD, CDA, DAB, ABC für die Pole A_0, B_0, C_0, D_0 der Ebene (E) in Beziehung auf diese Dreiecke conjugirten Punkte A_1, B_1, C_1, D_1: denn zu den Punkten

$$(3.)\quad \begin{cases} A': & t=0, \quad \frac{u}{a_2}=\frac{v}{a_3}=\frac{w}{a_4}, \\ B': & u=0, \quad \frac{v}{a_3}=\frac{w}{a_4}=\frac{t}{a_1}, \\ C': & v=0, \quad \frac{w}{a_4}=\frac{t}{a_1}=\frac{u}{a_2}, \\ D': & w=0, \quad \frac{t}{a_1}=\frac{u}{a_2}=\frac{v}{a_3} \end{cases}$$

gehören (vergl. §. 1, Gl. (12.) und (13.)) als die conjugirten Punkte

$$(4.)\quad \begin{cases} A_1: & t=0, \quad \frac{u}{\beta}:\frac{v}{\gamma}:\frac{w}{\delta}=\left(\frac{a_3}{\gamma}+\frac{a_4}{\delta}\right):\left(\frac{a_4}{\delta}+\frac{a_2}{\beta}\right):\left(\frac{a_2}{\beta}+\frac{a_3}{\gamma}\right), \\ B_1: & u=0, \quad \frac{v}{\gamma}:\frac{w}{\delta}:\frac{t}{\alpha}=\left(\frac{a_4}{\delta}+\frac{a_1}{\alpha}\right):\left(\frac{a_1}{\alpha}+\frac{a_3}{\gamma}\right):\left(\frac{a_3}{\gamma}+\frac{a_4}{\delta}\right), \\ C_1: & v=0, \quad \frac{w}{\delta}:\frac{t}{\alpha}:\frac{u}{\beta}=\left(\frac{a_1}{\alpha}+\frac{a_2}{\beta}\right):\left(\frac{a_2}{\beta}+\frac{a_4}{\delta}\right):\left(\frac{a_4}{\delta}+\frac{a_1}{\alpha}\right), \\ D_1: & w=0, \quad \frac{t}{\alpha}:\frac{u}{\beta}:\frac{v}{\gamma}=\left(\frac{a_2}{\beta}+\frac{a_3}{\gamma}\right):\left(\frac{a_3}{\gamma}+\frac{a_1}{\alpha}\right):\left(\frac{a_1}{\alpha}+\frac{a_2}{\beta}\right), \end{cases}$$

und von diesen genügen die Coordinatenwerthe für A_1 und B_1 der Gleichung (2.), wie behauptet war.

Es liegen also die vier Punkte a, A_1, b, B_1 auf der Ebene (2.) und es durchschneiden sich demgemäss die beiden Linien aA_1 und bB_1. Dasselbe gilt für jedes Paar der vier Linien aA_1, bB_1, cC_1, dD_1, und demnach gehen sie sämmtlich und folglich auch die sie zu zwei enthaltenden Ebenen durch denselben Punkt, welche sechs Ebenen auch, wie oben gezeigt wurde, durch je zwei der Punkte a, b, c, d und den Pol der Ebene (E) in Beziehung auf die entsprechende Gegenkante des Tetraeders bestimmt sind. Nennt man diesen gemeinschaftlichen Punkt der sechs Ebenen (2.) P_2, so ist sofort weiter zu sehen, dass P_2 mit den Punkten P und P_1 (Satz II.) auf derselben Geraden liegt; denn diese drei Punkte liegen mit jedem der vier Punkte a, b, c, d in einer Ebene, weil sie bezüglich auf den Verbindungslinien, z. B. des

Punktes a mit den Punkten A_1, A' und A_0 liegen und diese nach Satz I. derselben Geraden angehören. Der Pol P_0 der Ebene (E) in Beziehung auf das Tetraeder ist nach Satz II. ein vierter Punkt der Geraden PP_1P_2. Es ist demnach gleichzeitig der folgende Satz bewiesen:

XI. *Wenn man die Punkte, in welchen die Verbindungslinien der Eckpunkte eines Tetraeders mit einem beliebigen Punkte P des Raumes eine ebenfalls beliebig gegebene Ebene (E) durchschneiden, verbindet mit den auf den entsprechenden Gegenflächen liegenden conjugirten Punkten der Schnittpunkte der Verbindungslinien mit diesen Flächen, so durchschneiden sich die vier Verbindungslinien in demselben Punkte P_2, welcher zugleich der gemeinschaftliche Schnittpunkt ist der sechs Ebenen des Satzes* X. *Der Punkt P_2 liegt mit den drei Punkten P_0, P und P_1 des Satzes* II. *auf derselben Geraden.*

Rückt die Transversalebene (E) ins Unendliche, und wird P gleichzeitig der in Satz V. als Schnittpunkt der Höhenebenen definirte Punkt M, so geht P_2 in den früher mit M_1 bezeichneten Mittelpunkt der dem Tetraeder $ABCD$ umschriebenen Kugel über, weil die Linien A_1P_2, B_1P_2, C_1P_2, D_1P_2 bezüglich den Linien AM, BM, CM, DM parallel sind. —

Es bleibt nunmehr noch der allgemeinere Fall zu untersuchen übrig, wo die durch die Eckpunkte des Tetraeders gezogenen Geraden hyperboloidisch liegen: alsdann ergeben sich ganz analoge Resultate, und zwar zunächst der Satz:

XII. *Vier beliebige durch die Ecken eines Tetraeders gelegte Generatrices desselben Systems eines Hyperboloids durchschneiden eine ebenfalls beliebige Transversalebene (E) in vier Punkten; durch jede zwei dieser Punkte, welche als solche einem bestimmten Paar von Ecken des Tetraeders zugehören, und den Pol der Ebene (E) in Beziehung auf die das andere Eckenpaar verbindende Tetraederkante ist eine Ebene bestimmt: die sechs so bestimmten Ebenen durchschneiden sich in demselben Punkte.*

Auf das gegebene Tetraeder als Coordinatentetraeder bezogen sei die Transversalebene, wie früher, ausgedrückt durch die Gleichung:

$$(E): \quad \frac{t}{\alpha}+\frac{u}{\beta}+\frac{v}{\gamma}+\frac{w}{\delta} = 0,$$

die durch die Eckpunkte A, B, C, D aber gezogenen Fundamentallinien seien

$$(5.)\quad \begin{cases} Aa: & \frac{u}{a_{12}} = \frac{v}{a_{13}} = \frac{w}{a_{14}}, \\ Bb: & \frac{t}{a_{21}} = \frac{v}{a_{23}} = \frac{w}{a_{24}}, \\ Cc: & \frac{t}{a_{31}} = \frac{u}{a_{32}} = \frac{w}{a_{34}}, \\ Dd: & \frac{t}{a_{41}} = \frac{u}{a_{42}} = \frac{v}{a_{43}}, \end{cases}$$

für welche als Generatrices desselben Systems eines Hyperboloids die Bedingung

$$(6.)\quad a_{ik} = a_{ki}$$

erfüllt wird. Wenn man jetzt der Kürze wegen (vergl. §. 2, Gleichung (6.)) die neuen Constanten a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44} einführt durch die Gleichungen:

$$(7.)\quad \begin{cases} \frac{a_{11}}{\alpha} + \frac{a_{12}}{\beta} + \frac{a_{13}}{\gamma} + \frac{a_{14}}{\delta} = 0, \\ \frac{a_{21}}{\alpha} + \frac{a_{22}}{\beta} + \frac{a_{23}}{\gamma} + \frac{a_{24}}{\delta} = 0, \\ \frac{a_{31}}{\alpha} + \frac{a_{32}}{\beta} + \frac{a_{33}}{\gamma} + \frac{a_{34}}{\delta} = 0, \\ \frac{a_{41}}{\alpha} + \frac{a_{42}}{\beta} + \frac{a_{43}}{\gamma} + \frac{a_{44}}{\delta} = 0, \end{cases}$$

so sind die Schnittpunkte a, b, c, d der Fundamentallinien (5.) mit der Transversalebene (§. 2, Gleichung (7.)):

$$(8.)\quad \begin{cases} a: & \frac{t}{a_{11}} = \frac{u}{a_{12}} = \frac{v}{a_{13}} = \frac{w}{a_{14}}, \\ b: & \frac{t}{a_{21}} = \frac{u}{a_{22}} = \frac{v}{a_{23}} = \frac{w}{a_{24}}, \\ c: & \frac{t}{a_{31}} = \frac{u}{a_{32}} = \frac{v}{a_{33}} = \frac{w}{a_{34}}, \\ d: & \frac{t}{a_{41}} = \frac{u}{a_{42}} = \frac{v}{a_{43}} = \frac{w}{a_{44}}. \end{cases}$$

Die Ebene durch irgend zwei dieser Punkte, z. B. a und b, und den Pol der Ebene (E) in Bezug auf die das andere Eckenpaar, C und D, verbindende Kante, nämlich

$$t = u = 0, \quad \frac{v}{\gamma} = \frac{w}{\delta},$$

hat nunmehr die Gleichung

$$(9.)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{a_{24}a_{12}-a_{22}a_{14}}{\delta}-\dfrac{a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13}}{\gamma}\right)t+\left(\dfrac{a_{21}a_{14}-a_{11}a_{24}}{\delta}-\dfrac{a_{21}a_{13}-a_{11}a_{23}}{\gamma}\right)u \\ \qquad +(a_{12}^2-a_{11}a_{22})\left(\dfrac{v}{\gamma}-\dfrac{w}{\delta}\right) = 0; \end{cases}$$

oder wenn man der Kürze wegen die neuen Constanten b_{ik} und c_{ik} einführt durch die Gleichungen:

$$(10.)\quad \begin{cases} a_{22}a_{33}-a_{23}^2 = b_{23}, & a_{11}a_{44}-a_{14}^2 = b_{14}, \\ a_{33}a_{11}-a_{31}^2 = b_{31}, & a_{22}a_{44}-a_{24}^2 = b_{24}, \\ a_{11}a_{22}-a_{12}^2 = b_{12}, & a_{33}a_{44}-a_{34}^2 = b_{34}, \end{cases}$$

$$(11.)\quad \begin{cases} a_{13}a_{14}-a_{34}a_{11} = c_{12}, & a_{14}a_{12}-a_{42}a_{11} = c_{13}, & a_{12}a_{13}-a_{23}a_{11} = c_{14}, \\ a_{24}a_{21}-a_{41}a_{22} = c_{23}, & a_{21}a_{23}-a_{13}a_{22} = c_{24}, & a_{23}a_{24}-a_{34}a_{22} = c_{21}, \\ a_{31}a_{32}-a_{12}a_{33} = c_{34}, & a_{32}a_{34}-a_{24}a_{33} = c_{31}, & a_{34}a_{31}-a_{41}a_{33} = c_{32}, \\ a_{42}a_{43}-a_{23}a_{44} = c_{41}, & a_{43}a_{41}-a_{31}a_{44} = c_{42}, & a_{41}a_{42}-a_{12}a_{44} = c_{43}, \end{cases}$$

wo aber zu bemerken ist, dass vermöge der Bedingung (6.) nur die Ausdrücke b_{ik} und b_{ki} einander gleich sind, während die Ausdrücke c_{ik} durch Vertauschung ihrer Indices andere Werthe erhalten. Zwischen diesen Grössen b_{ik} und c_{ik} finden vermittelst der Gleichungen (7.) die folgenden Beziehungsgleichungen statt:

$$(12.)\quad \begin{cases} \dfrac{c_{14}}{\gamma}+\dfrac{c_{13}}{\delta}=\dfrac{b_{12}}{\beta}, & \dfrac{c_{12}}{\delta}+\dfrac{c_{14}}{\beta}=\dfrac{b_{13}}{\gamma}, & \dfrac{c_{13}}{\beta}+\dfrac{c_{12}}{\gamma}=\dfrac{b_{14}}{\delta}, \\ \dfrac{c_{21}}{\delta}+\dfrac{c_{24}}{\alpha}=\dfrac{b_{23}}{\gamma}, & \dfrac{c_{23}}{\alpha}+\dfrac{c_{21}}{\gamma}=\dfrac{b_{24}}{\delta}, & \dfrac{c_{24}}{\gamma}+\dfrac{c_{23}}{\delta}=\dfrac{b_{21}}{\alpha}, \\ \dfrac{c_{32}}{\alpha}+\dfrac{c_{31}}{\beta}=\dfrac{b_{34}}{\delta}, & \dfrac{c_{34}}{\beta}+\dfrac{c_{32}}{\delta}=\dfrac{b_{31}}{\alpha}, & \dfrac{c_{31}}{\delta}+\dfrac{c_{34}}{\alpha}=\dfrac{b_{32}}{\beta}, \\ \dfrac{c_{43}}{\beta}+\dfrac{c_{42}}{\gamma}=\dfrac{b_{41}}{\alpha}, & \dfrac{c_{41}}{\gamma}+\dfrac{c_{43}}{\alpha}=\dfrac{b_{42}}{\beta}, & \dfrac{c_{42}}{\alpha}+\dfrac{c_{41}}{\beta}=\dfrac{b_{43}}{\gamma}. \end{cases}$$

Diess vorausgesetzt, wird die obige Gleichung (9.) der Ebene durch die beiden Punkte a, b und den Pol von (E) in Beziehung auf die Kante CD:

$$(13.)\quad \left(\frac{c_{23}}{\delta}-\frac{c_{24}}{\gamma}\right)t+\left(\frac{c_{13}}{\delta}-\frac{c_{14}}{\gamma}\right)u-\frac{b_{12}}{\gamma}v+\frac{b_{12}}{\delta}w = 0.$$

Wenn man jetzt durch die Schnittpunkte a, b, c, d der Fundamentallinien (5.) mit der Transversalebene (E) diejenigen vier Linien construirt, welche als Generatrices des zweiten Systems mit den Geraden (5.) auf demselben Hyperboloid liegen, Linien, welche bezüglich die correspondirenden Flächen BCD, CDA, DAB, ABC des gegebenen Tetraeders in den Punkten A', B', C', D' durchschneiden mögen, und zu diesen Punkten in jeder Seitenfläche die con-

jugirten Punkte A_1, B_1, C_1, D_1 darstellt, so findet sich, dass die Ebene (13.) zwei dieser Verbindungsgeraden enthält.

Zunächst ergiebt sich der Schnittpunkt der Generatrix des zweiten Systems durch den Punkt a mit der Seitenfläche BCD als derjenige Punkt, welchen diese Fläche $t=0$ mit den Ebenen durch a und jede der drei Generatrices des ersten Systems (5.) Bb, Cc, Dd gemeinschaftlich hat; die Gleichungen dieser drei Ebenen aber werden bei Benutzung der Formeln (7.) und (11.):

$$\begin{aligned}(a, Bb) &: \quad (a_{23}a_{14}-a_{13}a_{24})t-c_{13}v+c_{14}w = 0,\\ (a, Cc) &: \quad (a_{34}a_{12}-a_{14}a_{32})t-c_{14}w+c_{12}u = 0,\\ (a, Dd) &: \quad (a_{42}a_{13}-a_{12}a_{43})t-c_{12}u+c_{13}v = 0;\end{aligned}$$

und demgemäss erhält man für ihren gemeinschaftlichen Schnittpunkt A', so wie durch Fortschreiten der Indices für die Punkte B', C', D' die folgenden Systeme von Gleichungen:

$$(14.)\quad \begin{cases} A' : & t=0, & c_{12}u = c_{13}v = c_{14}w,\\ B' : & u=0, & c_{21}t = c_{23}v = c_{24}w,\\ C' : & v=0, & c_{31}t = c_{32}u = c_{34}w,\\ D' : & w=0, & c_{41}t = c_{42}u = c_{43}v \quad , \end{cases}$$

als die conjugirten Punkte A_1, B_1, C_1, D_1 ergeben sich demnach (§. 1, Gl. 12):

$$A_1 : \quad t=0, \quad \frac{u}{\beta}:\frac{v}{\gamma}:\frac{w}{\delta}=\left(\frac{1}{\gamma c_{13}}+\frac{1}{\delta c_{14}}\right):\left(\frac{1}{\delta c_{14}}+\frac{1}{\beta c_{12}}\right):\left(\frac{1}{\beta c_{12}}+\frac{1}{\gamma c_{13}}\right),$$

oder vermöge der Gleichungen (12.):

$$(15.)\quad \begin{cases} A_1 : & t=0, & \dfrac{u}{c_{12}.b_{12}}=\dfrac{v}{c_{13}.b_{13}}=\dfrac{w}{c_{14}.b_{14}},\\ B_1 : & u=0, & \dfrac{t}{c_{21}.b_{21}}=\dfrac{v}{c_{23}.b_{23}}=\dfrac{w}{c_{24}.b_{24}},\\ C_1 : & v=0, & \dfrac{t}{c_{31}.b_{31}}=\dfrac{u}{c_{32}.b_{32}}=\dfrac{w}{c_{34}.b_{34}},\\ D_1 : & w=0, & \dfrac{t}{c_{41}.b_{41}}=\dfrac{u}{c_{42}.b_{42}}=\dfrac{v}{c_{43}.b_{43}} \end{cases}$$

Es ist sofort zu sehen, dass von diesen vier Punkten die beiden ersten auf der Ebene (13.) liegen, und weil sich durch cyklisches Fortrücken der Indices aus der Gleichung (13.) die Gleichungen der übrigen fünf Ebenen ergeben, welche die Punkte a, b, c, d zu zwei und den jedesmaligen Pol

der Ebene (E) in Beziehung auf die zugehörige Gegenkante enthalten, während die Gleichungen (15.) in einander übergehen, so enthält jede dieser Ebenen zwei von den Punkten (15.). Es liegen also beispielsweise die vier Punkte a, A_1, b, B_1 auf der Ebene (13.) und es durchschneiden sich demgemäss die beiden Linien aA_1 und bB_1. Dasselbe gilt für jedes Paar der vier Linien aA_1, bB_1, cC_1, dD_1 und demnach gehen diese Linien sämmtlich, und folglich auch die sechs Ebenen (13.), durch denselben Punkt. Es ist darum gleichzeitig der folgende Satz bewiesen:

XIII. *Vier beliebige durch die Ecken eines Tetraeders gelegte Generatrices desselben Systems eines Hyperboloids durchschneiden eine ebenfalls beliebige Transversalebene (E) in vier Punkten a, b, c, d; construirt man durch jeden dieser Punkte die Generatrix des zweiten Systems und zu dem Schnittpunkte derselben mit der correspondirenden Gegenfläche des Tetraeders den conjugirten Punkt, so durchschneiden sich die vier Verbindungslinien der conjugirten Punkte mit den entsprechenden Fusspunkten a, b, c, d im demselben Punkte.*

Der gemeinschaftliche Schnittpunkt der vier Geraden A_1a, B_1b, C_1c, D_1d (XIII.) ist zugleich derjenige der sechs Ebenen (13.) (XII.); um weiter zu zeigen, dass dieser Punkt, welcher etwa Q_2 heissen mag, mit den Punkten P_0, Q und Q_1, d. h. den Polen der Ebene (E) in Beziehung auf das Tetraeder $ABCD$, in Beziehung auf das diesem Tetraeder umschriebene Hyperboloid (H) und in Beziehung auf das dem homologen Tetraeder $A_0B\,C_0D_0$ umschriebene Hyperboloid (H_1) auf derselben Geraden liegen, sind noch zur Abkürzung der Rechnung einige Beziehungen zwischen den Coefficienten a_{ik} und den aus ihnen weiter abgeleiteten Coefficienten b_{ik} und c_{ik} festzustellen. Zunächst sind als neue Grössen d_{ik} einzuführen die folgenden Complexionen der Coefficienten a_{ik}:

$$(16.)\quad \begin{cases} a_{23}a_{14}-a_{13}a_{24} = d_{12} & (\text{oder } d_{34}), \\ a_{34}a_{12}-a_{14}a_{32} = d_{13} & (\text{oder } d_{42}), \\ a_{42}a_{13}-a_{12}a_{43} = d_{14} & (\text{oder } d_{23}), \end{cases}$$

wobei zu beachten ist, dass die Grössen d_{ik} bei Vertauschung ihrer Indices i und k keine Aenderung erleiden und bei einer cyklischen Permutation der Indices in den einzelnen Coefficienten a_{ik} zugleich die Indices in den zugehörigen Grössen d_{ik} cyklisch permutirt werden. Alsdann hat man die neuen Relationen:

$$(17.)\quad \begin{cases} \dfrac{c_{41}}{\delta}-\dfrac{c_{31}}{\gamma} = \dfrac{d_{34}}{\alpha} \text{ oder } \dfrac{d_{12}}{\alpha}, \\[2ex] \dfrac{c_{21}}{\beta}-\dfrac{c_{41}}{\delta} = \dfrac{d_{42}}{\alpha} \text{ oder } \dfrac{d_{13}}{\alpha}, \\[2ex] \dfrac{c_{31}}{\gamma}-\dfrac{c_{21}}{\beta} = \dfrac{d_{23}}{\alpha} \text{ oder } \dfrac{d_{14}}{\alpha} \end{cases}$$

und neun ähnliche Relationen durch cyklisches Fortrücken der Indices 1, 2, 3, 4, und der Coefficienten α, β, γ, δ; ferner das System von Beziehungsgleichungen

$$(18.)\quad \begin{cases} \dfrac{b_{12}}{\beta}(\gamma c_{23}-\delta c_{24}-\beta d_{12}) = \dfrac{\gamma}{\delta}c_{23}c_{13}-\dfrac{\delta}{\gamma}c_{24}c_{14}, \\[2ex] \dfrac{b_{13}}{\gamma}(\delta c_{34}-\beta c_{32}-\gamma d_{13}) = \dfrac{\delta}{\beta}c_{34}c_{14}-\dfrac{\beta}{\delta}c_{32}c_{12}, \\[2ex] \dfrac{b_{14}}{\delta}(\beta c_{42}-\gamma c_{43}-\delta d_{14}) = \dfrac{\beta}{\gamma}c_{42}c_{12}-\dfrac{\gamma}{\beta}c_{43}c_{13}, \end{cases}$$

welches sich durch dasselbe Verfahren wie das System (17.) durch neun weitere Gleichungen vervollständigen lässt, und endlich das in sich abgeschlossene System:

$$(19.)\quad \begin{cases} \beta\left(\dfrac{c_{32}}{\gamma}-\dfrac{c_{42}}{\delta}\right)+\gamma\left(\dfrac{c_{43}}{\delta}-\dfrac{c_{23}}{\beta}\right)+\delta\left(\dfrac{c_{24}}{\beta}-\dfrac{c_{34}}{\gamma}\right) = 0, \\[2ex] \gamma\left(\dfrac{c_{43}}{\delta}-\dfrac{c_{13}}{\alpha}\right)+\delta\left(\dfrac{c_{14}}{\alpha}-\dfrac{c_{34}}{\gamma}\right)+\alpha\left(\dfrac{c_{31}}{\gamma}-\dfrac{c_{41}}{\delta}\right) = 0, \\[2ex] \delta\left(\dfrac{c_{14}}{\alpha}-\dfrac{c_{24}}{\beta}\right)+\alpha\left(\dfrac{c_{21}}{\beta}-\dfrac{c_{41}}{\delta}\right)+\beta\left(\dfrac{c_{42}}{\delta}-\dfrac{c_{12}}{\alpha}\right) = 0, \\[2ex] \alpha\left(\dfrac{c_{21}}{\beta}-\dfrac{c_{31}}{\gamma}\right)+\beta\left(\dfrac{c_{32}}{\gamma}-\dfrac{c_{12}}{\alpha}\right)+\gamma\left(\dfrac{c_{13}}{\alpha}-\dfrac{c_{23}}{\beta}\right) = 0. \end{cases}$$

Diess vorausgesetzt, erleichtert sich die Uebersicht des Beweises, dass die vier Punkte P_0, Q, Q_1 und Q_2 auf derselben Geraden liegen: — Der Beweis lässt sich darauf beschränken, zu zeigen, dass *die Ebene durch die Pole Q und P_0 der Transversalebene (E) bezüglich des Hyperboloids (H) und des Coordinatentetraeders und einen der Schnittpunkte der Generatrices* (5.) *mit der Ebene (E), z. B. den Punkt a* (8.), *zugleich den Punkt A_1* (15.) *dieser Ebene enthält.*

Der Pol Q der Ebene (E) in Beziehung auf das durch die windschiefen Geraden (5.) bestimmte Hyperboloid (H) sei

$$\frac{t}{A}=\frac{u}{B}=\frac{v}{C}=\frac{w}{D},$$

so ergeben sich für die Coefficienten A, B, C, D die Werthe

$$A = a_{12}a_{13}a_{14}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{a_{22}}{\beta . a_{12}}+\frac{a_{33}}{\gamma . a_{13}}+\frac{a_{44}}{\delta . a_{14}}\right),$$

$$B = a_{23}a_{24}a_{21}\left(\frac{1}{\beta}+\frac{a_{33}}{\gamma . a_{23}}+\frac{a_{44}}{\delta . a_{24}}+\frac{a_{11}}{\alpha . a_{21}}\right),$$

$$C = a_{34}a_{31}a_{32}\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{a_{44}}{\delta . a_{34}}+\frac{a_{11}}{\alpha . a_{31}}+\frac{a_{22}}{\beta . a_{32}}\right),$$

$$D = a_{41}a_{42}a_{43}\left(\frac{1}{\delta}+\frac{a_{11}}{\alpha . a_{41}}+\frac{a_{22}}{\beta . a_{42}}+\frac{a_{33}}{\gamma . a_{43}}\right);$$

ferner sei die Gleichung der Ebene durch diesen Punkt Q, den Pol P_0 der Ebene (E) in Beziehung auf das Tetraeder

$$\frac{t}{\alpha} = \frac{u}{\beta} = \frac{v}{\gamma} = \frac{w}{\delta}$$

und den Schnittpunkt a (8.) der Generatrix Aa mit der Ebene (E):

$$\frac{t}{a_{11}} = \frac{u}{a_{12}} = \frac{v}{a_{13}} = \frac{w}{a_{14}},$$

in folgender Form dargestellt:

$$(20.) \qquad Lt+Mu+Nv+Pw = 0,$$

so erhalten die Coefficienten derselben durch die Gleichungssysteme (11.), (16.) und (17.) die Werthe:

$$L = \frac{1}{\alpha}(\beta . c_{12}d_{12}+\gamma . c_{13}d_{13}+\delta . c_{14}d_{14}),$$

$$M = -c_{12}d_{12}+c_{13}c_{32}-c_{14}c_{42}+\frac{\gamma}{\beta}c_{12}c_{23}-\frac{\delta}{\beta}c_{12}c_{24},$$

$$N = -c_{13}d_{13}+c_{14}c_{43}-c_{12}c_{23}+\frac{\delta}{\gamma}c_{13}c_{34}-\frac{\beta}{\gamma}c_{13}c_{32},$$

$$P = -c_{14}d_{14}+c_{12}c_{24}-c_{13}c_{34}+\frac{\beta}{\delta}c_{14}c_{42}-\frac{\gamma}{\delta}c_{14}c_{43}.$$

Setzt man nunmehr in die Gleichung (20.) für t, u, v, w die Werthe ein, welche sich aus den Gleichungen (15.) des Punktes A_1:

$$t = 0, \quad \frac{u}{b_{12}c_{12}} = \frac{v}{b_{13}c_{13}} = \frac{w}{b_{14}c_{14}},$$

ergeben, so erhält bei Berücksichtigung der Gleichungen (18.) die linke Seite der Gleichung (20.), abgesehen vom Factor $c_{12}c_{13}c_{14}$, die Form:

$$\beta\cdot\frac{c_{32}}{c_{14}}\left(\frac{b_{12}}{\beta}-\frac{c_{13}}{\delta}\right)+\gamma\cdot\frac{c_{43}}{c_{12}}\left(\frac{b_{13}}{\gamma}-\frac{c_{14}}{\beta}\right)+\delta\cdot\frac{c_{24}}{c_{13}}\left(\frac{b_{14}}{\delta}-\frac{c_{12}}{\gamma}\right)$$
$$-\beta\cdot\frac{c_{42}}{c_{13}}\left(\frac{b_{12}}{\beta}-\frac{c_{14}}{\gamma}\right)-\gamma\cdot\frac{c_{23}}{c_{14}}\left(\frac{b_{13}}{\gamma}-\frac{c_{12}}{\delta}\right)-\delta\cdot\frac{c_{34}}{c_{12}}\left(\frac{b_{14}}{\delta}-\frac{c_{13}}{\beta}\right),$$

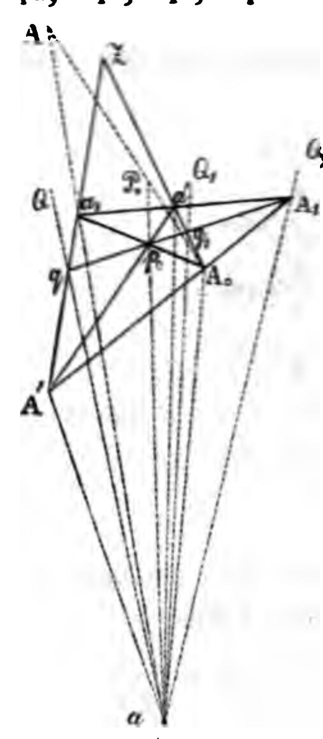
oder vermittelst der Gleichungen (12.):

$$\frac{\beta}{\gamma}\cdot e_{32}+\frac{\gamma}{\delta}\cdot e_{43}+\frac{\delta}{\beta}\cdot e_{24}-\frac{\beta}{\delta}\cdot e_{42}-\frac{\gamma}{\beta}\cdot e_{23}-\frac{\delta}{\gamma}\cdot e_{34},$$

welcher Ausdruck vermöge der ersten Gleichung des Systems (19.) verschwindet: darum liegt der Punkt A_1 auf der Ebene (20.), was zu beweisen war.

Ebenso gehören auch die Punkte B_1, C_1, D_1 (15.) bezüglich mit den Fusspunkten b, c, d (8.) und den beiden Polen P_0 und Q je derselben Ebene an, und demnach liegt der gemeinschaftliche Schnittpunkt Q_2 der vier Geraden A_1a, B_1b, C_1c, D_1d (XIII.) mit P_0 und Q, folglich auch mit Q_1 (VI.), auf derselben Geraden. —

Schliesslich möge noch erwähnt werden, dass auch hier (vergl. IX.) *die vier Punkte Q, P_0, Q_1 und Q_2 harmonische Punkte sind und zwar Q und Q_1, die Pole der Ebene (E) in Beziehung auf die beiden Hyperboloide (H) und (H_1), conjugirt in Beziehung auf die beiden Punkte P_0 und Q_2, bezüglich den Pol von (E) für das Tetraeder und den Schnittpunkt der vier Geraden A_1a, B_1b, C_1c, D_1d.*



Zum Beweise nenne man etwa die Punkte, in welchen die Verbindungslinien des Fusspunktes a mit den Punkten Q, P_0, Q_1, A das Coordinatendreieck BCD durchschneiden, bezüglich q, p_0, q_1, a_1, so liegen die ersteren drei derselben mit A_1, dem Schnittpunkte der Geraden Q_2a mit BCD, wie oben bewiesen, auf einer Geraden, ebenso die beiden conjugirten Punkte A' und A_1 mit A_0, dem Pol der Ebene (E) in Beziehung auf das Dreieck BCD; P_0 liegt als Pol von (E) in Beziehung auf das Tetraeder $ABCD$ auf der Verbindungslinie AA_0; noch sei Z der Schnittpunkt der Linie $A'a_1$ mit der Schnittlinie der beiden Ebenen BCD und (E).

Die Geraden Aa und A_0a sind conjugirt in Beziehung auf das Collineationscentrum P_0, ebenso die Geraden $A'a$ und $a'a$, wenn $a'a$ die Generatrix ist des zweiten Systems des Hyperboloids (H_1) durch den Fusspunkt a. Nunmehr hat man vermöge der Eigenschaft der Punkte Q und Q_1 als der Pole der

Ebene (E) in Beziehung auf die beiden Hyperboloide (H) und (H_1) die beiden harmonischen Punktsysteme (A', q, a_1, Z) und (A_0, q_1, a', Z), folglich da die Punktsysteme (A', A_0, A_1) und (q, q_1, A_1) je auf einer Geraden liegen, so gehören auch die Punkte a_1, a' und A_1 derselben Geraden an; demnach kann man die vier Geraden $A_1 A_0$, $A_0 p_0$, $p_0 a'$, $a' A_1$ ansehen als die auf einander folgenden Seiten eines Vierecks, dessen Gegenseiten sich paarweise in den Punkten A' und a_1 durchschneiden, d. h. $A_1 a_1$ und $A_0 a'$, als Diagonalen des Vierecks, theilen die dritte Diagonale desselben, $A_1 p_0$, harmonisch: demnach ist das Punktsystem (A_1, q_1, p_0, q) harmonisch. In gleicher Weise durchschneiden die Verbindungslinien der vier Punkte Q_2, Q_1, P_0 und Q mit jedem der übrigen Fundamentalpunkte b, c, d die entsprechenden Coordinatenebenen CDA, DAB, ABC in harmonischen Punktsystemen, und demnach sind die vier Punkte Q_2, Q_1, P_0 und Q selbst harmonische Punkte.

Berlin, Februar 1865.

Sur les sections circulaires des surfaces du second ordre et les ombilics des surfaces quelconques.

(Par M. *C. Souillart* à Caen.)

M. *Otto Hesse* a signalé dans ses *Vorlesungen über die analytische Geometrie des Raumes* (p. 335), une difficulté d'analyse par laquelle on est arrêté, quand on veut présenter la théorie des sections circulaires des surfaces du second ordre comme un cas particulier de la théorie générale de leurs sections planes: cette difficulté consiste à partager une certaine équation en deux autres. La décomposition se fait aisément (loc. cit.), lorsque l'équation de la surface ne contient pas les rectangles des variables, et la théorie s'achève alors comme par les autres méthodes: mais le cas général est beaucoup plus rebelle. M. *Hesse* est parvenu (t. 60, p. 305 de ce Journal) à mettre le premier membre de l'équation dont il s'agit sous la forme d'une somme de plusieurs carrés: le nombre de ces carrés a été réduit à 2 par M. *Henrici* (t. 64, p. 187). L'obstacle est donc levé, mais les formules obtenues sont assez compliquées et il resterait à en déduire la théorie des sections circulaires.

Au lieu d'une décomposition en carrés, on peut, au moyen des propriétés d'un déterminant qui se présente de lui-même dans la question, étendre au cas général la marche qui réussit dans le cas de l'équation réduite: on obtient ainsi des résultats beaucoup plus simples et la forme des équations se prête commodément à la solution complète du problème primitif.

A un autre point de vue, la recherche des sections circulaires des surfaces du second ordre peut être considérée aussi comme un cas particulier du problème des ombilics d'une surface quelconque: cette remarque suffit pour montrer que le problème de MM. *Hesse* et *Henrici* est, au fond, résolu depuis long-temps. Inversement, la solution que nous en obtenons donne, sous une forme nouvelle et remarquable, la solution du problème général des ombilics: on trouve d'ailleurs aisément une forme correspondante pour l'équation générale des lignes de courbure.

La symétrie de ces formules tient à l'emploi d'un déterminant de même forme que le précédent, et qu'on désigne quelquefois sous le nom de *Hessien*

bordé. La valeur de ce déterminant, pour un point quelconque de la surface que l'on considère, ne dépend pas du système d'axes coordonnés auxquels la surface est rapportée, et quand la surface est du second ordre, cette valeur est la même en chacun de ses points. Cette remarque, associée à un théorème de *Joachimsthal,* met en évidence un certain nombre de propriétés dont jouissent les lignes de courbure des surfaces du second ordre.

I.

1. Soit

$$a_{00}x^2+a_{11}y^2+a_{22}z^2+2a_{01}xy+2a_{02}xz+2a_{12}yz+2a_{03}x+2a_{13}y+2a_{23}z+a_{33}=0$$

l'équation d'une surface du second ordre rapportée à des axes rectangulaires quelconques et

$$ax+by+cz-d = 0$$

l'équation d'un plan, a, b, c étant les cosinus des angles que la normale au plan fait avec les axes coordonnés, en sorte que l'on a

$$a^2+b^2+c^2 = 1.$$

Les longueurs des axes de la section que le plan produit dans la surface s'obtiennent en résolvant l'équation du second degré

$$(1.)\quad \begin{vmatrix} a_{00}-\lambda & a_{01} & a_{02} & a \\ a_{10} & a_{11}-\lambda & a_{12} & b \\ a_{20} & a_{21} & a_{22}-\lambda & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix} = 0$$

dans laquelle l'inconnue λ désigne le quotient d'une constante par le carré de l'un de ces axes (*Hesse,* Vorlesungen etc. p. 331). Pour que la section soit un cercle, il faut et il suffit que cette équation ait ses racines égales. Cette condition n'établit qu'une seule relation entre les quantités a, b, c qui déterminent la direction du plan, et comme ces quantités ne sont assujetties en outre qu'à vérifier l'équation $a^2+b^2+c^2=1$, on est conduit à ce paradoxe qu'il existe dans toute surface du second ordre une infinité de directions de plans cycliques.

Mais il arrive ici, comme dans plusieurs cas analogues, que l'équation de condition unique comprend en réalité deux équations distinctes, et c'est dans la décomposition de cette équation que consiste la difficulté signalée par M. *Hesse.*

2. L'équation (1.) développée et ordonnée par rapport à λ, peut être mise sous la forme simple

$$(2.)\qquad (a^2+b^2+c^2)\lambda^2+\left(\frac{d\Delta}{da_{00}}+\frac{d\Delta}{da_{11}}+\frac{d\Delta}{da_{22}}\right)\lambda-\Delta = 0,$$

en posant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & b \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix}$$

La condition d'égalité des racines est

$$(3.)\qquad \left(\frac{d\Delta}{da_{00}}+\frac{d\Delta}{da_{11}}+\frac{d\Delta}{da_{22}}\right)^2+4(a^2+b^2+c^2)\Delta = 0;$$

telle est l'équation qu'il s'agit de partager en deux autres.

Les propriétés élémentaires des déterminants nous donnent les identités

$$(4.)\qquad \begin{cases} a\dfrac{d\Delta}{da_{00}}+\tfrac{1}{2}b\dfrac{d\Delta}{da_{01}}+\tfrac{1}{2}c\dfrac{d\Delta}{da_{02}} = 0, \\ \tfrac{1}{2}a\dfrac{d\Delta}{da_{10}}+b\dfrac{d\Delta}{da_{11}}+\tfrac{1}{2}c\dfrac{d\Delta}{da_{12}} = 0, \\ \tfrac{1}{2}a\dfrac{d\Delta}{da_{20}}+\tfrac{1}{2}b\dfrac{d\Delta}{da_{21}}+c\dfrac{d\Delta}{da_{22}} = 0, \end{cases}$$

au moyen desquelles on peut exprimer les dérivées du déterminant Δ par rapport aux éléments principaux en fonction des dérivées relatives aux trois éléments a_{01}, a_{02}, a_{12}, et vice versa. On a ainsi les deux groupes de formules

$$(5.)\qquad \begin{cases} a\dfrac{d\Delta}{da_{00}} = -\tfrac{1}{2}\left(b\dfrac{d\Delta}{da_{01}}+c\dfrac{d\Delta}{da_{02}}\right), \\ b\dfrac{d\Delta}{da_{11}} = -\tfrac{1}{2}\left(c\dfrac{d\Delta}{da_{12}}+a\dfrac{d\Delta}{da_{01}}\right), \\ c\dfrac{d\Delta}{da_{22}} = -\tfrac{1}{2}\left(a\dfrac{d\Delta}{da_{02}}+b\dfrac{d\Delta}{da_{12}}\right); \end{cases}$$

$$(6.)\qquad \begin{cases} bc\dfrac{d\Delta}{da_{12}} = a^2\dfrac{d\Delta}{da_{00}}-b^2\dfrac{d\Delta}{da_{11}}-c^2\dfrac{d\Delta}{da_{22}}, \\ ca\dfrac{d\Delta}{da_{02}} = b^2\dfrac{d\Delta}{da_{11}}-c^2\dfrac{d\Delta}{da_{22}}-a^2\dfrac{d\Delta}{da_{00}}, \\ ab\dfrac{d\Delta}{da_{01}} = c^2\dfrac{d\Delta}{da_{22}}-a^2\dfrac{d\Delta}{da_{00}}-b^2\dfrac{d\Delta}{da_{11}}. \end{cases}$$

Des formules (5.) on conclut la suivante

$$(7.) \quad \begin{cases} -2abc\left(\frac{d\Delta}{da_{00}}+\frac{d\Delta}{da_{11}}+\frac{d\Delta}{da_{22}}\right) = a^2\left(b\frac{d\Delta}{da_{02}}+c\frac{d\Delta}{da_{01}}\right)+b^2\left(c\frac{d\Delta}{da_{01}}+a\frac{d\Delta}{da_{12}}\right) \\ \qquad\qquad +c^2\left(a\frac{d\Delta}{da_{12}}+b\frac{d\Delta}{da_{02}}\right). \end{cases}$$

D'autre part si nous appliquons la formule connue (*Brioschi,* Théorie des déterminants p. 13.)

$$\frac{dP}{da_{rs}}\frac{dP}{da_{r_1s_1}}-\frac{dP}{da_{r_1s}}\frac{dP}{da_{rs_1}} = P\frac{d^2P}{da_{rs}da_{r_1s_1}},$$

relative à un déterminant P quelconque, nous aurons, en observant que pour un déterminant symétrique tel que Δ, chaque dérivée doit être remplacée par sa moitié, à moins qu'elle ne soit prise par rapport à un élément principal

$$\frac{d\Delta}{da_{11}}\frac{d\Delta}{da_{22}}-\tfrac{1}{4}\left(\frac{d\Delta}{da_{12}}\right)^2 = \Delta\frac{d^2\Delta}{da_{11}da_{22}} = -a^2\Delta,$$

d'où

$$4a^2\Delta = \left(\frac{d\Delta}{da_{12}}\right)^2-4\frac{d\Delta}{da_{11}}\frac{d\Delta}{da_{22}}.$$

Eliminant $\frac{d\Delta}{da_{11}}\frac{d\Delta}{da_{22}}$ au moyen des formules (5.), on obtient pour Δ l'expression suivante où n'entrent que les dérivées relatives aux éléments a_{01}, a_{02}, a_{12},

$$(8.) \quad -4abc\Delta = a\frac{d\Delta}{da_{01}}\frac{d\Delta}{da_{02}}+b\frac{d\Delta}{da_{12}}\frac{d\Delta}{da_{10}}+c\frac{d\Delta}{da_{20}}\frac{d\Delta}{da_{21}};$$

si au contraire on éliminait $\left(\frac{d\Delta}{da_{12}}\right)^2$ au moyen des formules (6.), on obtiendrait pour Δ l'expression suivante, en fonction de ses dérivées relatives aux éléments principaux

$$(9.) \quad 4a^2b^2c^2\Delta = \left(a^2\frac{d\Delta}{da_{00}}-b^2\frac{d\Delta}{da_{11}}-c^2\frac{d\Delta}{da_{22}}\right)^2-4b^2c^2\frac{d\Delta}{da_{11}}\frac{d\Delta}{da_{22}},$$

dans laquelle le second membre peut, comme on le sait, prendre plusieurs formes différentes.

La formule (9.) pourrait être appliquée à la transformation de l'équation (3.), mais on obtient des résultats plus simples en employant les formules (7.) et (8.). L'équation (3.), multipliée par $4a^2b^2c^2$, devient alors

$$(10.) \quad \begin{cases} \left[a^2\left(b\frac{d\Delta}{da_{02}}+c\frac{d\Delta}{da_{01}}\right)+b^2\left(c\frac{d\Delta}{da_{01}}+a\frac{d\Delta}{da_{12}}\right)+c^2\left(a\frac{d\Delta}{da_{12}}+b\frac{d\Delta}{da_{02}}\right)\right]^2 \\ -4abc(a^2+b^2+c^2)\left(a\frac{d\Delta}{da_{01}}\frac{d\Delta}{da_{02}}+b\frac{d\Delta}{da_{01}}\frac{d\Delta}{da_{12}}+c\frac{d\Delta}{da_{02}}\frac{d\Delta}{da_{12}}\right) = 0. \end{cases}$$

Par un développement partiel et un groupement convenable des termes, on peut la mettre sous la forme suivante

$$(11.)\quad \begin{cases} a^4\left(b\frac{d\Delta}{da_{02}}-c\frac{d\Delta}{da_{01}}\right)^2+b^4\left(c\frac{d\Delta}{da_{01}}-a\frac{d\Delta}{da_{12}}\right)^2+c^4\left(a\frac{d\Delta}{da_{12}}-b\frac{d\Delta}{da_{02}}\right)^2 \\ \quad -2b^2c^2\left(c\frac{d\Delta}{da_{01}}-a\frac{d\Delta}{da_{12}}\right)\left(a\frac{d\Delta}{da_{12}}-b\frac{d\Delta}{da_{02}}\right) \\ \quad -2c^2a^2\left(a\frac{d\Delta}{da_{12}}-b\frac{d\Delta}{da_{02}}\right)\left(b\frac{d\Delta}{da_{02}}-c\frac{d\Delta}{da_{01}}\right) \\ \quad -2a^2b^2\left(b\frac{d\Delta}{da_{02}}-c\frac{d\Delta}{da_{01}}\right)\left(c\frac{d\Delta}{da_{01}}-a\frac{d\Delta}{da_{12}}\right) = 0. \end{cases}$$

Si nous posons, pour abréger,

$$b\frac{d\Delta}{da_{02}}-c\frac{d\Delta}{da_{01}} = A,\quad c\frac{d\Delta}{da_{01}}-a\frac{d\Delta}{da_{12}} = B,\quad a\frac{d\Delta}{da_{12}}-b\frac{d\Delta}{da_{02}} = C,$$

l'équation précédente s'écrira

$$A^2a^4+B^2b^4+C^2c^4-2BCb^2c^2-2CAc^2a^2-2ABa^2b^2 = 0,$$

ou bien sous la forme équivalente

$$(12.)\quad (a\sqrt{A}+b\sqrt{B}+c\sqrt{C})(a\sqrt{A}+b\sqrt{B}-c\sqrt{C})(a\sqrt{A}-b\sqrt{B}+c\sqrt{C})(-a\sqrt{A}+b\sqrt{B}+c\sqrt{C}) = 0.$$

3. L'équation (12.) est vérifiée par $A=0$, $B=0$, $C=0$, et nous allons reconnaître qu'elle n'a pas d'autre solution admissible. En effet elle ne peut être vérifiée que si l'un, au moins, des quatre facteurs est nul séparément. Or la somme des trois quantités A, B, C étant nulle identiquement, si l'on suppose qu'aucune d'elles ne soit nulle, ces trois quantités ne pourront pas être de même signe: soit A celle qui est de signe contraire aux deux autres, on peut toujours supposer $A<0$. Chacun des facteurs de l'équation (12.) contiendra alors le terme imaginaire $a\sqrt{A}$, et ne pourra être nul que si ce terme disparaît: il faudra donc que l'on ait $a=0$. *Si donc on suppose qu'aucune des quantités A, B, C ne soit nulle, l'équation* (12.) *ne peut être vérifiée que par l'une des hypothèses* $a=0$, $b=0$, $c=0$. *On arrive à la même conclusion quand on suppose qu'une seule des quantités A, B, C soit nulle;* il n'y a d'ailleurs pas à examiner le cas où deux de ces quantités seraient nulles, puisque la troisième le serait aussi.

L'équation de condition, prise sous l'une des formes (10.), (11.), (12.), est vérifiée en effet par l'une quelconque des trois hypothèses $a=0$, $b=0$, $c=0$. Par exemple si l'on suppose $a=0$, l'équation (10.) se réduit à

$$bc\left(b\frac{d\Delta}{da_{01}}+c\frac{d\Delta}{da_{02}}\right) = 0,$$

ce qui est alors une identité en vertu de la première équation (5.). Mais il faut observer que pour passer de l'équation (3.) à l'équation (10.) nous avons multiplié par $4a^2b^2c^2$, ce qui a pu introduire les solutions $a=0$, $b=0$, $c=0$. C'est en effet ce qui a lieu, car nous allons reconnaître que *l'équation primitive* (3.) *n'est pas vérifiée par l'hypothèse* $a=0$, *si l'on n'a pas en même temps* $A=0$, $B=0$, $C=0$.

Dans l'hypothèse $a=0$, la somme $\frac{d\Delta}{da_{00}}+\frac{d\Delta}{da_{11}}+\frac{d\Delta}{da_{22}}$ se réduit à $\frac{d\Delta}{da_{00}}-(b^2+c^2)a_{00}$, et le développement de Δ à $a_{00}\frac{d\Delta}{da_{00}}+(a_{02}b-a_{01}c)^2$; en sorte que l'équation (3.) devient

$$\left[\frac{d\Delta}{da_{00}}-(b^2+c^2)a_{00}\right]^2+4(b^2+c^2)\left[a_{00}\frac{d\Delta}{da_{00}}+(a_{02}b-a_{01}c)^2\right] = 0$$

ou bien

$$(13.)\qquad \left[\frac{d\Delta}{da_{00}}+(b^2+c^2)a_{00}\right]^2+4(b^2+c^2)(a_{02}b-a_{01}c)^2 = 0.$$

Le premier membre de cette équation étant une somme de deux carrés, elle ne peut être vérifiée que si chacun d'eux est nul. Ayant déjà $a=0$, on ne peut pas avoir en outre $b=0$ et $c=0$: il faut donc que l'on ait $a_{02}b-a_{01}c=0$. Mais on a, dans l'hypothèse de $a=0$,

$$A=2(b^2+c^2)(a_{02}b-a_{01}c),\ B=-2c^2(a_{02}b-a_{01}c),\ C=-2b^2(a_{02}b-a_{01}c);$$

l'équation (13.) ne peut donc pas être vérifiée par cette hypothèse, sans que l'on ait en même temps $A=0$, $B=0$, $C=0$.

Donc enfin l'équation de condition se décompose dans les trois suivantes, qui n'en font que deux,

$$A=0,\quad B=0,\quad C=0,$$

ou bien

$$(14.)\qquad a\frac{d\Delta}{da_{12}}=b\frac{d\Delta}{da_{02}}=c\frac{d\Delta}{da_{01}}.$$

II.

4. Les équations (14.), jointes à l'équation $a^2+b^2+c^2=1$, déterminent complètement les directions des plans cycliques, mais il reste à en déduire les résultats que l'on obtient par d'autres méthodes.

Ces équations développées sont, en divisant par 2,

$$(15.)\qquad \begin{cases} a[a(a_{12}a-a_{02}b-a_{01}c)+a_{00}bc] = b[b(a_{02}b-a_{01}c-a_{12}a)+a_{11}ca] \\ \qquad\qquad = c[c(a_{01}c-a_{12}a-a_{02}b)+a_{22}ab]. \end{cases}$$

Elles sont homogènes et du troisième degré en a, b, c. L'élimination de l'une des inconnues se ferait aisément, mais l'équation qui en résulterait entre les deux autres serait du sixième degré. On peut tirer des équations (14.) un parti plus avantageux, en y introduisant comme variable auxiliaire le rayon de la section circulaire considérée. Désignons par λ la racine double de l'équation (2.), c'est à dire le quotient d'une constante par le carré de ce rayon: on a

$$\lambda = -\frac{1}{2(a^2+b^2+c^2)}\left(\frac{d\Delta}{da_{00}}+\frac{d\Delta}{da_{11}}+\frac{d\Delta}{da_{22}}\right).$$

Mais la formule (7.) donne, en tenant compte des équations (14.),

$$\frac{d\Delta}{da_{00}}+\frac{d\Delta}{da_{11}}+\frac{d\Delta}{da_{22}} = -\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}\,a\,\frac{d\Delta}{da_{12}} = -\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}\,b\,\frac{d\Delta}{da_{02}}$$
$$= -\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}\,c\,\frac{d\Delta}{da_{01}};$$

d'où les trois équations

$$\tfrac{1}{2}\frac{d\Delta}{da_{12}} = bc\lambda, \quad \tfrac{1}{2}\frac{d\Delta}{da_{02}} = ca\lambda, \quad \tfrac{1}{2}\frac{d\Delta}{da_{01}} = ab\lambda,$$

qui étant développées donnent les suivantes

$$(16.)\quad \begin{cases} (a_{00}-\lambda)bc+a(a_{12}a-a_{02}b-a_{01}c) = 0, \\ (a_{11}-\lambda)ca+b(a_{02}b-a_{01}c-a_{12}a) = 0, \\ (a_{22}-\lambda)ab+c(a_{01}c-a_{12}a-a_{02}b) = 0. \end{cases}$$

Ces équations ne sont que du second degré, mais chacune d'elles renferme les trois inconnues. Multiplions par c la seconde et par b la troisième, puis ajoutons; il vient, après avoir divisé par a, la première équation du groupe

$$(17.)\quad \begin{cases} (a_{11}-\lambda)c^2+(a_{22}-\lambda)b^2-2a_{12}bc = 0, \\ (a_{22}-\lambda)a^2+(a_{00}-\lambda)c^2-2a_{02}ca = 0, \\ (a_{00}-\lambda)b^2+(a_{11}-\lambda)a^2-2a_{01}ab = 0; \end{cases}$$

et les deux autres s'obtiennent d'une manière analogue.

Si la quantité λ était déterminée, les équations (17.) feraient connaître la direction des projections, sur chacun des plans coordonnés, de la normale au plan de la section circulaire. Or on peut trouver comme il suit l'équation qui détermine λ. On déduit des équations (16.)

$$abc(a_{00}-\lambda)(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) = -(a_{12}a-a_{02}b-a_{01}c)(a_{02}b-a_{01}c-a_{12}a)(a_{01}c-a_{12}a-a_{02}b)$$
$$= -[2a_{01}a_{02}a_{12}abc+a_{12}^2a^2(a_{12}a-a_{02}b-a_{01}c)+a_{02}^2b^2(a_{02}b-a_{01}c-a_{12}a)$$
$$+a_{01}^2c^2(a_{01}c-a_{12}a-a_{02}b)]$$
$$= -abc[2a_{01}a_{02}a_{12}-a_{12}^2(a_{00}-\lambda)-a_{02}^2(a_{11}-\lambda)-a_{01}^2(a_{22}-\lambda)];$$

ce qui donne, par la suppression du facteur *abc*, le développement de l'équation

$$(18.)\quad \begin{vmatrix} a_{00}-\lambda & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation est précisément celle qui détermine les inverses des carrés des axes de la surface: si donc nous considérons les sections circulaires qui passent par le centre de la surface, leurs rayons sont les trois demi-axes.

Pour chacune des trois valeurs de λ, les équations (17.) font connaître les rapports $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{a}$, $\frac{a}{b}$ par des équations du second degré: donc *par chacun des axes de la surface il passe deux sections circulaires.*

On reconnaît aisément qu'il n'y a de réelles que les sections passant par l'axe moyen. En effet pour que les valeurs des rapports $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{a}$, $\frac{a}{b}$ soient réelles, il faut que les trois quantités

$$a_{12}^2-(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda),\quad a_{20}^2-(a_{22}-\lambda)(a_{00}-\lambda),\quad a_{01}^2-(a_{00}-\lambda)(a_{11}-\lambda)$$

soient positives. Mais si l'on pose l'équation auxiliaire

$$(19.)\quad a_{12}^2-(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) = 0,$$

et qu'on désigne par α et β ($\alpha<\beta$) les deux racines, toujours réelles, de cette équation, on sait, d'après la remarque de *Cauchy*, que l'équation (18.) a une racine λ_0 plus petite que α, une racine λ_1 comprise entre α et β, et une racine λ_2 plus grande que β. Par conséquent le premier membre de l'équation (19.) est négatif pour $\lambda=\lambda_0$ ou $\lambda=\lambda_2$, et positif pour $\lambda=\lambda_1$. Il en est de même évidemment pour les deux autres expressions.

5. Pour que la surface soit de révolution, il faut et il suffit que ses deux systèmes réels de sections circulaires se confondent, c'est à dire que les équations (17.) aient leurs racines égales pour $\lambda=\lambda_1$. On a ainsi les équations de condition

$$(20.)\quad a_{12}^2-(a_{11}-\lambda_1)(a_{22}-\lambda_1)=0,\quad a_{02}^2-(a_{22}-\lambda_1)(a_{00}-\lambda_1)=0,\quad a_{01}^2-(a_{00}-\lambda_1)(a_{11}-\lambda_1)=0.$$

Introduisant tour à tour chacune de ces conditions dans l'équation (18.), on trouve que la quantité λ_1 doit satisfaire aux trois équations

$$\begin{aligned} 2a_{01}a_{02}a_{12}-a_{02}^2(a_{11}-\lambda_1)-a_{01}^2(a_{22}-\lambda_1) &= 0, \\ 2a_{01}a_{02}a_{12}-a_{01}^2(a_{22}-\lambda_1)-a_{12}^2(a_{00}-\lambda_1) &= 0, \\ 2a_{01}a_{02}a_{12}-a_{12}^2(a_{00}-\lambda_1)-a_{02}^2(a_{11}-\lambda_1) &= 0; \end{aligned}$$

d'où l'on conclut immédiatement

$$a_{12}^2(a_{00}-\lambda_1) = a_{02}^2(a_{11}-\lambda_1) = a_{01}^2(a_{22}-\lambda_1) = a_{01}a_{02}a_{12},$$

et par suite les conditions connues

$$(21.) \qquad \lambda_1 = a_{00} - \frac{a_{01}a_{02}}{a_{12}} = a_{11} - \frac{a_{01}a_{12}}{a_{02}} = a_{22} - \frac{a_{02}a_{12}}{a_{01}}.$$

Si l'on observe que la somme des premiers membres des équations (20.) est la dérivée par rapport à λ_1 du premier membre de l'équation (18.), on reconnaît que λ_1 est dans le cas présent une racine double de cette équation, ainsi que cela doit être.

Remarquons, en passant, un moyen simple pour arriver directement aux équations (21.), en exprimant l'égalité de deux racines de l'équation (18.). Pour que la racine λ_1 devienne égale à λ_0 ou à λ_2, il faut qu'elle se confonde avec l'une des racines, α ou β, de l'équation (19.); le même raisonnement pouvant se répéter pour les deux équations analogues à (19.), on voit que la racine double doit satisfaire aux trois équations (20.), et on achève comme plus haut.

6. Dans le cas particulier où l'on a $a_{01} = a_{02} = a_{12} = 0$, l'équation (18.) se réduit à

$$(a_{00}-\lambda)(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) = 0;$$

et si l'on suppose $a_{00} < a_{11} < a_{22}$, on a $\lambda_0 = a_{00}$, $\lambda_1 = a_{11}$, $\lambda_2 = a_{22}$.

Les équations (17.), quand on y fait $\lambda = \lambda_1$, donnent

$$b = 0, \quad \frac{a}{c} = \pm\sqrt{\frac{a_{11}-a_{00}}{a_{22}-a_{11}}},$$

tandis que si l'on y fait $\lambda = \lambda_0$ ou $\lambda = \lambda_2$, elles donnent $a = 0$, $\frac{b}{c}$ imaginaire, ou $c = 0$, $\frac{a}{b}$ imaginaire. Ce sont les résultats connus.

III.

7. Soit $u = 0$ l'équation d'une surface quelconque; si nous représentons par u_0, u_1, u_2 les dérivées de u par rapport à x, y, z, et par u_{00}, u_{01}, u_{02}, ... les dérivées secondes, l'équation qui détermine les deux rayons principaux de la surface en l'un quelconque de ses points peut être mise sous la forme (*Hesse*, Vorlesungen etc. p. 355)

$$(22.)\quad \begin{vmatrix} u_{00}-\lambda & u_{01} & u_{02} & u_0 \\ u_{10} & u_{11}-\lambda & u_{12} & u_1 \\ u_{20} & u_{21} & u_{22}-\lambda. & u_2 \\ u_0 & u_1 & u_2 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

l'inconnue auxiliaire λ étant définie par la relation $\lambda = \frac{\sqrt{u_0^2+u_1^2+u_2^2}}{R}$, où R désigne l'un des deux rayons principaux.

Quand on l'applique à une surface du second ordre, cette équation ne diffère de l'équation (1.) que par le changement de u_0, u_1, u_2 en a, b, c. On conclut de là que *dans une surface du second ordre, les rayons de courbure principaux en un point quelconque sont entre eux dans le même rapport que les carrés des axes de toute section parallèle au plan tangent en ce point:* propriété bien connue et qui lie les ombilics aux sections circulaires.

Si l'on pose

$$U = \begin{vmatrix} u_{00} & u_{01} & u_{02} & u_0 \\ u_{10} & u_{11} & u_{12} & u_1 \\ u_{20} & u_{21} & u_{22} & u_2 \\ u_0 & u_1 & u_2 & 0 \end{vmatrix},$$

l'équation qui donne les deux rayons de courbure principaux pourra s'écrire sous la forme simple et symétrique

$$(23.)\quad (u_0^2+u_1^2+u_2^2)\lambda^2+\left(\frac{dU}{du_{00}}+\frac{dU}{du_{11}}+\frac{dU}{du_{22}}\right)\lambda-U=0.$$

Pour qu'un point de la surface $u=0$ soit un ombilic, il faut qu'en ce point l'équation (23.) ait ses deux racines égales. L'équation de condition se déduira de l'équation (3.), en remplaçant dans celle-ci le déterminant Δ et ses éléments par le déterminant U et ses éléments correspondants; et la même substitution pouvant se faire dans toutes les formules des n°s 2 et 3, on en conclut finalement que les ombilics seront déterminés par les équations

$$(24.)\quad u_0\frac{dU}{du_{12}} = u_1\frac{dU}{du_{02}} = u_2\frac{dU}{du_{01}},$$

et le rayon de courbure R en un point ombilic, par l'une des formules

$$(25.)\quad 2u_0u_1u_2\frac{\sqrt{u_0^2+u_1^2+u_2^2}}{R} = u_0\frac{dU}{du_{12}} = u_1\frac{dU}{du_{02}} = u_2\frac{dU}{du_{01}}.$$

8. L'équation qui détermine les deux rayons principaux se met le plus ordinairement sous la forme

$$(26.)\quad (rt-s^2)R^2+[(1+p^2)t-2pqs+(1+q^2)r]\sqrt{1+p^2+q^2}.R+(1+p^2+q^2)^2=0,$$

les lettres p, q, r, s, t ayant la signification connue. Si l'on exprime que les racines de cette équation sont égales, on sait (d'après un calcul de *Poisson* rapporté dans *l'Analyse appliquée* de *Leroy*) décomposer cette condition unique en deux autres. En posant

$$(1+p^2)s-pqr=M,\quad (1+q^2)s-pqt=N,$$

on arrive à mettre l'équation de condition sous la forme

$$(27.)\quad \left[(1+p^2)N-\frac{1+p^2+q^2-p^2q^2}{1+p^2}M\right]^2+\frac{4p^2q^2(1+p^2+q^2)}{(1+p^2)^2}M^2=0;$$

d'où l'on conclut

$$M=0,\quad N=0.$$

Pour décomposer en une somme de deux carrés la condition d'égalité des racines de l'équation (22.), il suffirait de traduire le calcul de *Poisson* dans les notations du n°. 7. En changeant ensuite les éléments de U en ceux de Δ, on obtiendrait sous forme d'une somme de deux carrés la condition d'égalité des racines de l'équation (1.), résultat que l'on ne saurait tirer de la méthode de M. *Hesse* et auquel M. *Henrici* n'est parvenu qu'en sacrifiant l'homogénéité des formules.

Ce calcul n'aurait qu'une symétrie incomplète, à cause du rôle inégal des variables x, y, z dans les équations (26.) et (27.). Il en serait de même d'une décomposition en trois carrés qu'on pourrait déduire de la forme sous laquelle M. *B. Amiot* (Journal de *Liouville* t. 12, p. 130) a présenté l'équation (27.); cette forme est la suivante

$$(27^{\text{bis}}.)\quad P^2+4M^2+(pP+2qM)^2=0,$$

la quantité M étant celle de plus haut, et la quantité P désignant l'expression

$$(1+q^2)r-(1+p^2)t.$$

La considération du déterminant U et de ses dérivées simplifierait notablement la traduction des équations (27.) et (27bis). Je me bornerai à indiquer les nouvelles expressions des principales quantités qui figurent dans ces calculs et qui se rencontrent souvent dans la théorie des surfaces. En voici le tableau:

$$
(28.)\begin{cases}
p=-\dfrac{u_0}{u_2},\quad q=-\dfrac{u_1}{u_2},\quad 1+p^2+q^2=\dfrac{u_0^2+u_1^2+u_2^2}{u_2^2},\\[2mm]
r=\dfrac{1}{u_2^3}\dfrac{dU}{du_{11}},\quad s=-\dfrac{1}{u_2^3}\dfrac{1}{2}\dfrac{dU}{du_{01}},\quad t=\dfrac{1}{u_2^3}\dfrac{dU}{du_{00}},\\[2mm]
rt-s^2=\dfrac{1}{u_2^6}\Big[\dfrac{dU}{du_{00}}\dfrac{dU}{du_{11}}-\dfrac{1}{4}\Big(\dfrac{dU}{du_{01}}\Big)^2\Big]=-\dfrac{1}{u_2^4}U,\\[2mm]
(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=\dfrac{1}{u_2^3}\Big(\dfrac{dU}{du_{00}}+\dfrac{dU}{du_{11}}+\dfrac{dU}{du_{22}}\Big)\\[2mm]
\qquad=-\dfrac{1}{2u_0u_1u_2}\dfrac{1}{u_2^3}\Big[u_0^2\Big(u_1\dfrac{dU}{du_{02}}+u_2\dfrac{dU}{du_{01}}\Big)+u_1^2\Big(u_2\dfrac{dU}{du_{01}}+u_0\dfrac{dU}{du_{12}}\Big)\\[2mm]
\qquad\qquad+u_2^2\Big(u_0\dfrac{dU}{du_{12}}+u_1\dfrac{dU}{du_{02}}\Big)\Big],\\[2mm]
(1+q^2)r-(1+p^2)t=\dfrac{1}{2u_0u_1u_2}\dfrac{1}{u_2^3}\Big[u_0^2\Big(u_1\dfrac{dU}{du_{02}}-u_2\dfrac{dU}{du_{01}}\Big)+u_1^2\Big(u_2\dfrac{dU}{du_{01}}-u_0\dfrac{dU}{du_{12}}\Big)\\[2mm]
\qquad\qquad-u_2^2\Big(u_0\dfrac{dU}{du_{12}}-u_1\dfrac{dU}{du_{02}}\Big)\Big],\\[2mm]
(1+p^2)s-pqr=\dfrac{1}{2u_2^4}\Big(u_0\dfrac{dU}{du_{12}}-u_2\dfrac{dU}{du_{01}}\Big),\\[2mm]
(1+q^2)s-pqt=\dfrac{1}{2u_2^4}\Big(u_1\dfrac{dU}{du_{02}}-u_2\dfrac{dU}{du_{01}}\Big).
\end{cases}
$$

Les deux dernières formules montrent l'accord des équations (24.) avec $M=0$ et $N=0$.

9. L'emploi du déterminant U permet de mettre aussi sous une forme très-symétrique l'équation générale des lignes de courbure. Sous sa forme la plus connue, cette équation est

$$[(1+q^2)s-pqt]\,dy^2+[(1+q^2)r-(1+p^2)t]\,dy\,dx-[(1+p^2)s-pqr]\,dx^2 = 0.$$

En faisant usage des formules (28.) on pourra d'abord l'écrire

$$
u_0u_1\Big(u_1\frac{dU}{du_{02}}-u_2\frac{dU}{du_{01}}\Big)dy^2-u_0u_1\Big(u_0\frac{dU}{du_{12}}-u_2\frac{dU}{du_{01}}\Big)dx^2
$$
$$
+\Big[u_0^2\Big(u_1\frac{dU}{du_{02}}-u_2\frac{dU}{du_{01}}\Big)+u_1^2\Big(u_2\frac{dU}{du_{01}}-u_0\frac{dU}{du_{12}}\Big)-u_2^2\Big(u_0\frac{dU}{du_{12}}-u_1\frac{dU}{du_{02}}\Big)\Big]dx\,dy = 0.
$$

Pour donner à cette équation plus de symétrie, nous y introduirons aussi la quantité dz: il suffira pour cela de l'écrire comme il suit

$$
\Big(u_1\frac{dU}{du_{02}}-u_2\frac{dU}{du_{01}}\Big)u_0dy\,(u_1dy+u_0dx)+\Big(u_2\frac{dU}{du_{01}}-u_0\frac{dU}{du_{12}}\Big)u_1dx\,(u_0dx+u_1dy)
$$
$$
-\Big(u_0\frac{dU}{du_{12}}-u_1\frac{dU}{du_{02}}\Big)u_2^2\,dx\,dy = 0
$$

et d'observer que l'on a

$$u_0 dx + u_1 dy = -u_2 dz.$$

On obtiendra ainsi l'équation

$$(29.)\quad \begin{cases} u_0\left(u_1\dfrac{dU}{du_{02}} - u_2\dfrac{dU}{du_{01}}\right)dy\,dz + u_1\left(u_2\dfrac{dU}{du_{01}} - u_0\dfrac{dU}{du_{12}}\right)dx\,dz \\ \qquad + u_2\left(u_0\dfrac{dU}{du_{12}} - u_1\dfrac{dU}{du_{02}}\right)dx\,dy = 0. \end{cases}$$

10. Le déterminant U qui intervient dans toutes les formules des n°s 7, 8, 9 a, en chaque point de la surface $u=0$, une valeur déterminée et indépendante du sytème de coordonnées rectangulaires que l'on emploie.

En effet d'après l'équation (23.), si R et R' désignent les deux rayons de courbure principaux pour le point considéré, on a

$$(30.)\quad U = -\frac{(u_0^2+u_1^2+u_2^2)^2}{RR'},$$

expression dans laquelle le numérateur est la quatrième puissance du *paramètre différentiel du premier ordre de la fonction-de-point* u (*Lamé*).

Supposons que la fonction u soit entière et rationnelle en x, y, z et du degré m, et rendons-la homogène par l'introduction d'une variable t qu'on fera plus tard égale à 1: le déterminant U pourra se transformer (*Brioschi*, Déterminants p. 135) dans l'expression suivante

$$U = -\frac{mu}{m-1}\begin{vmatrix} u_{00} & u_{01} & u_{02} \\ u_{10} & u_{11} & u_{12} \\ u_{20} & u_{21} & u_{22} \end{vmatrix} + \frac{t^2}{(m-1)^2}\begin{vmatrix} u_{00} & u_{01} & u_{02} & u_{03} \\ u_{10} & u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{20} & u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{30} & u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix},$$

dans laquelle le premier terme disparatt ici, à cause de $u=0$. Il reste donc simplement

$$(31.)\quad U = \frac{1}{(m-1)^2}\begin{vmatrix} u_{10} & u_{01} & u_{02} & u_{03} \\ u_{10} & u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{20} & u_{21} & u_{22} & u_{13} \\ u_{30} & u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix},$$

c'est à dire, à un facteur près, le *Hessien* de la fonction homogène qui se confond avec u pour $t=1$.

11. Dans le cas particulier d'une surface du second ordre, le second membre de l'équation (31.) se réduit à une fonction des coefficients de l'équation: donc *pour une surface du second ordre la quantité U a la même valeur en chaque point.*

Posons, pour abréger,

$$h = \sqrt{u_0^2+u_1^2+u_2^2};$$

la propriété que nous venons d'énoncer s'écrira, d'après l'équation (30.),

$$(32.)\qquad \frac{h^4}{RR'} = \text{const.}$$

Mais *Joachimsthal* a reconnu (t. 26 de ce Journal) que tout le long d'une ligne de courbure d'une surface du second ordre, on a, en désignant par R celui des deux rayons de courbure qui se rapporte à la section principale tangente à cette ligne

$$(33.)\qquad \frac{h^3}{R} = \text{const.}$$

Des équations (32.) et (33.) on conclut les deux suivantes

$$(34.)\qquad \frac{h}{R'} = \text{const.},\qquad \frac{R}{R'^3} = \text{const.}$$

La dernière formule exprime ce théorème de M. *O. Bonnet* (J. de l'Ecole Polytechnique, 32[e] cahier p. 143):

Tout le long d'une ligne de courbure d'une surface du second ordre, le rayon de courbure principal correspondant varie proportionnellement au cube de l'autre rayon principal; et de celui-ci résulte immédiatement l'un de ceux qu'a donnés M. *Bertrand* (J. de *Liouville,* tome IX, p. 132):

Si l'on considère sur une surface du second ordre un rectangle formé par quatre lignes de courbure, le produit des quatre rayons de courbure qui répondent à deux sommets opposés est égal au produit des quatre rayons qui répondent aux deux autres sommets, et de plus on peut avec ces huit rayons former deux proportions.

La formule $\frac{h}{R'} = \text{const.}$ exprime cet autre théorème:

Tout le long d'une ligne de courbure d'une surface du second ordre, le rayon de courbure de la section principale normale à cette ligne varie proportionnellement au paramètre h.

Appliquées au cas particulier des paraboloides, les formules $\frac{h}{R'} = \text{const.}$, $\frac{h^3}{R} = \text{const.}$ démontrent les deux propriétés suivantes:

En un point quelconque d'une ligne de courbure d'un paraboloide, 1° le rayon de courbure de la section principale normale à cette ligne a pour projection sur l'axe de la surface une longueur constante; 2° si l'on projette sur l'axe le rayon de courbure de la section principale tangente à cette ligne, qu'on projette ensuite cette projection sur le rayon de courbure, et enfin cette nouvelle projection sur l'axe, on obtiendra une longueur constante.

Caen, 1866.

Ueber die Transformation der *Abel*schen Functionen erster Ordnung.

(Von Herrn *Königsberger* zu Greifswald.)

§. 1.

Das Transformationsproblem für die *Abel*schen Functionen erster Ordnung, mit dem ich mich in dieser Abhandlung beschäftige, lautet folgendermassen:

Alle möglichen Fälle zu finden, in denen man dem System von Differentialgleichungen:

$$(1.)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}}+\dfrac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} = \dfrac{(\alpha+\beta y_1)\,dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}}+\dfrac{(\alpha+\beta y_2)\,dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}}, \\ \dfrac{x_1 dx_1}{\sqrt{R(x_1)}}+\dfrac{x_2 dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} = \dfrac{(\gamma+\delta y_1)\,dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}}+\dfrac{(\gamma+\delta y_2)\,dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}} \end{cases}$$

durch ein System von zwei algebraischen Gleichungen zwischen den Variablen x_1, x_2, y_1, y_2

$$(2.)\quad f_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0,\quad f_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$$

genügen kann, vorausgesetzt dass

$$R(x) = x(1-x)(1-c^2x)(1-l^2x)(1-m^2x),$$
$$R_1(y) = y(1-y)(1-\varkappa^2y)(1-\lambda^2y)(1-\mu^2y)$$

und $c, l, m, \varkappa, \lambda, \mu$ reell und <1 angenommen werden, während $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ keiner Beschränkung unterworfen sind; oder anders ausgesprochen:

Es sind zwei Gleichungssysteme

$$(3.)\quad \frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}}+\frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} = du'_1,\quad \frac{x_1 dx_1}{\sqrt{R(x_1)}}+\frac{x_2 dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} = du'_2$$

und

$$(4.)\quad \frac{dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}}+\frac{dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}} = du_1,\quad \frac{y_1 dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}}+\frac{y_2 dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}} = du_2$$

gegeben, es sollen alle möglichen Fälle gefunden werden, in denen zwischen du_1, du_2, du'_1, du'_2 lineare homogene Gleichungen von der Form:

$$(5.)\quad \begin{cases} du'_1 = \alpha\, du_1+\beta\, du_2, \\ du'_2 = \gamma\, du_1+\delta\, du_2 \end{cases}$$

und zugleich zwischen x_1, x_2, y_1, y_2 zwei algebraische Gleichungen bestehen.

Mit Benutzung der Bezeichnungen von *Weierstrass*, die ich in diesem Journal Bd. 64 genauer erläutert habe, ergeben sich als Lösungen des Systems (4.) folgende:

$$(6.)\quad \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\left(\frac{1}{\lambda^2}-y_1\right)\left(\frac{1}{\lambda^2}-y_2\right)}}{\sqrt[4]{\dfrac{-R_1\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)}{\varkappa^2\lambda^2\mu^2}}} = \dfrac{\vartheta(v'_1, v'_2, \tau'_{11}, \tau'_{12}, \tau'_{22})_1}{\vartheta(v'_1, v'_2, \tau'_{11}, \tau'_{12}, \tau'_{22})_5} = al(u_1, u_2, \varkappa, \lambda, \mu)_1, \\[2ex] \dfrac{\sqrt{-(1-y_1)(1-y_2)}}{\sqrt[4]{\dfrac{-R_1(1)}{\varkappa^2\lambda^2\mu^2}}} = \dfrac{\vartheta(v'_1, v'_2, \tau'_{11}, \tau'_{12}, \tau'_{22})_3}{\vartheta(v'_1, v'_2, \tau'_{11}, \tau'_{12}, \tau'_{22})_5} = al(u_1, u_2, \varkappa, \lambda, \mu)_3, \end{cases}$$

wenn v'_1, v'_2 mit u_1, u_2 durch die Gleichungen verbunden sind:

$$(7.)\quad \begin{cases} u_1 = 2K_{11}v'_1 + 2K_{12}v'_2, \\ u_2 = 2K_{21}v'_1 + 2K_{22}v'_2. \end{cases}$$

Die Grössen τ'_{11}, τ'_{12}, τ'_{22} sind, wenn

$$\sigma = \begin{vmatrix} 2K_{11} & 2K_{12} \\ 2K_{21} & 2K_{22} \end{vmatrix}$$

gesetzt wird, durch folgende Gleichungen definirt:

$$(8.)\quad \begin{cases} \tau'_{11} = \dfrac{1}{\sigma}\begin{vmatrix} 2iK'_{11} & 2K_{12} \\ 2iK'_{21} & 2K_{22} \end{vmatrix}, \quad \tau'_{12} = \dfrac{1}{\sigma}\begin{vmatrix} 2iK'_{12} & 2K_{12} \\ 2iK'_{22} & 2K_{22} \end{vmatrix}, \\[2ex] \tau'_{21} = \dfrac{1}{\sigma}\begin{vmatrix} 2K_{11} & 2iK'_{11} \\ 2K_{21} & 2iK'_{21} \end{vmatrix}, \quad \tau'_{22} = \dfrac{1}{\sigma}\begin{vmatrix} 2K_{11} & 2iK'_{12} \\ 2K_{21} & 2iK'_{22} \end{vmatrix}, \end{cases}$$

worin $\tau'_{12} = \tau'_{21}$ ist und ausserdem die Relation stattfindet:

$$(9.)\quad \tau'_{11}.\tau'_{22} - \tau'_{12}.\tau'_{21} = \frac{(K'_{11}.K'_{22} - K'_{12}.K'_{21})}{(K_{11}.K_{22} - K_{12}.K_{21})},$$

während die K durch die Integrale bestimmt sind:

$$(10.)\quad \begin{cases} K_{11} = \displaystyle\int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\varkappa^2}} \frac{dy}{\sqrt{R_1(y)}}, \quad K_{21} = -\int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\varkappa^2}} \frac{y\,dy}{\sqrt{R_1(y)}}, \quad K_{12} = \int_1^0 \frac{dy}{\sqrt{R_1(y)}}, \quad K_{22} = \int_1^0 \frac{y\,dy}{\sqrt{R_1(y)}}, \\[2ex] iK'_{11} = i\displaystyle\int_{\frac{1}{\mu^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{dy}{\sqrt{-R_1(y)}}, \quad iK'_{21} = -i\int_{\frac{1}{\mu^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{y\,dy}{\sqrt{-R_1(y)}}, \quad iK'_{12} = i\int_{\frac{1}{\varkappa^2}}^{1} \frac{dy}{\sqrt{-R_1(y)}}, \quad iK'_{22} = i\int_{\frac{1}{\varkappa^2}}^{1} \frac{y\,dy}{\sqrt{-R_1(y)}} \end{cases}$$

und

$$(11.)\qquad iK'_{\mu 1} = i\overline{K}_{\mu 1},\quad iK'_{\mu 2} = i\overline{K}_{\mu 1} + i\overline{K}_{\mu 2}.$$

Aus der Annahme, dass $\varkappa$, λ, μ reell und < 1 sein sollen, folgt unmittelbar, dass die so bestimmten $K_{11}, \therefore \overline{K}_{11}, \ldots$ sämmtlich reell sind.

Ebenso ergeben sich für das zweite System

$$(12.)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \dfrac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} = \alpha\, du_1 + \beta\, du_2, \\ \dfrac{x_1\, dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \dfrac{x_2\, dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} = \gamma\, du_1 + \delta\, du_2 \end{cases}$$

die Lösungen:

$$(13.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\left(\frac{1}{l^2}-x_1\right)\left(\frac{1}{l^2}-x_2\right)}}{\sqrt[4]{\dfrac{-R'\left(\frac{1}{l^2}\right)}{c^2 l^2 m^2}}} = \dfrac{\vartheta(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})_1}{\vartheta(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})_5} \\ \qquad = al(\alpha u_1 + \beta u_2 + \varepsilon, \gamma u_1 + \delta u_2 + \zeta, c, l, m)_1, \\ \dfrac{\sqrt{-(1-x_1)(1-x_2)}}{\sqrt[4]{\dfrac{-R'(1)}{c^2 l^2 m^2}}} = \dfrac{\vartheta(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})_3}{\vartheta(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})_5} \\ \qquad = al(\alpha u_1 + \beta u_2 + \varepsilon, \gamma u_1 + \delta u_2 + \zeta, c, l, m)_3 \end{cases}$$

worin ε und ζ constante Grössen, ferner

$$(14.)\qquad \begin{cases} \alpha u_1 + \beta u_2 + \varepsilon = 2C_{11} v_1 + 2C_{12} v_2, \\ \gamma u_1 + \delta u_2 + \zeta = 2C_{21} v_1 + 2C_{22} v_2, \end{cases}$$

und $C_{11}, \ldots$ durch Integrale ähnlich den für das erste System aufgestellten bestimmt sind, in denen nur statt $\varkappa$, λ, μ die Grössen c, l, m zu setzen sind.

Die Bedingung dass zwischen x_1, x_2, y_1, y_2 zwei algebraische Gleichungen stattfinden sollen, geht, da sich diese Grössen durch

$$al(u_1, u_2, \varkappa, \lambda, \mu)_1,\quad al(u_1, u_2, \varkappa, \lambda, \mu)_3$$
$$al(\alpha u_1 + \beta u_1 + \varepsilon, \gamma u_1 + \delta u_2 + \zeta, c, l, m)_1,\quad al(\alpha u_1 + \beta u_2 + \varepsilon, \gamma u_1 + \delta u_2 + \zeta, c, l, m)_3$$

algebraisch ausdrücken lassen, darin über, dass auch zwischen diesen vier Functionen zwei algebraische Gleichungen bestehen, die von der Form sein werden:

$$(15.)\qquad \begin{cases} F_1\left(al(u_1 \ldots \varkappa \ldots)_1^2, al(u_1 \ldots \varkappa \ldots)_3^2, al(\alpha u_1 \ldots c \ldots)_1^2, al(\alpha u_1 \ldots c \ldots)_3^2\right) = 0, \\ F_2\left(al(u_1 \ldots \varkappa \ldots)_1^2, al(u_1 \ldots \varkappa \ldots)_3^2, al(\alpha u_1 \ldots c \ldots)_1^2, al(\alpha u_1 \ldots c \ldots)_3^2\right) = 0. \end{cases}$$

Nun ergeben sich aus den Transformationsformeln des § 2. meiner Abhandlung (Band 64 dieses Journals) unmittelbar folgende Gleichungen:

(16.) $al(u_1+2K_{11}, u_2+2K_{21})_1^2 = al(u_1, u_2)_1^2,\quad al(u_1+2K_{11}, u_2+2K_{21})_3^2 = al(u_1, u_2)_3^2,$

(17.) $al(u_1+2K_{12}, u_2+2K_{22})_1^2 = al(u_1, u_2)_1^2,\quad al(u_1+2K_{12}, u_2+2K_{22})_3^2 = al(u_1, u_2)_3^2,$

(18.) $al(u_1+2iK'_{11}, u_2+2iK'_{21})_1^2 = al(u_1, u_2)_1^2,\quad al(u_1+2iK'_{11}, u_2+2iK'_{21})_3^2 = al(u_1, u_2)_3^2,$

(19.) $al(u_1+2iK'_{12}, u_2+2iK'_{22})_1^2 = al(u_1, u_2)_1^2,\quad al(u_1+2iK'_{12}, u_2+2iK'_{22})_3^2 = al(u_1, u_2)_3^2.$

Da die Gleichungen (15.) für beliebige u_1, u_2 bestehen, so werden wir in der Substitution der Perioden ein Mittel haben, um die Werthe der Coefficienten α, β, γ, δ sowie die Relationen zwischen den Periodenintegralen herzuleiten; setzt man nämlich in (15.) statt u_1, u_2 der Reihe nach:

$$(20.)\quad \begin{cases} u_1+2\mathfrak{m}_1 K_{11}, & u_2+2\mathfrak{m}_1 K_{21}, \\ u_1+2\mathfrak{m}_2 K_{12}, & u_2+2\mathfrak{m}_2 K_{22}, \\ u_2+2\mathfrak{m}'_1 iK'_{11}, & u_2+2\mathfrak{m}'_1 iK'_{21}, \\ u_1+2\mathfrak{m}'_2 iK'_{12}, & u_2+2\mathfrak{m}'_2 iK'_{22}, \end{cases}$$

so erhält man acht Gleichungen, welche die Relationen zwischen den in einander zu transformirenden Systemen liefern werden.

Aus den beiden algebraischen Gleichungen (2.) folgt nämlich, dass einem bestimmten Werthepaare x_1, x_2 im Allgemeinen eine endliche Anzahl von Werthepaaren y_1, y_2 entspricht und umgekehrt. Ein bestimmtes Werthepaar von y_1, y_2 liefert aber ein Werthepaar von:

$$al(u_1, u_2, \varkappa, \ldots)_1,\quad al(u_1, u_2, \varkappa, \ldots)_3,$$

also darf diesen Grössen auch nur eine endliche Anzahl von Werthen

$$al(\alpha u_1+\beta u_2+\varepsilon, \ldots c, \ldots)_1,\quad al(\alpha u_1+\beta u_2+\varepsilon, \ldots c, \ldots)_3$$

entsprechen. Da aber aus jedem der durch die Substitutionen (20.) entstandenen Gleichungssysteme sich unendlich viele Werthepaare ergeben, so müssen sich die einzelnen Paare von einer bestimmten Grenze an wiederholen und es müssen also die Gleichungen stattfinden:

$$(21.)\ \begin{cases} al(\alpha u_1+\beta u_2+\varepsilon+2\alpha\mathfrak{m}_1K_{11}+2\beta\mathfrak{m}_1K_{21}, \gamma u_1+\delta u_2+\zeta+2\gamma\mathfrak{m}_1K_{11}+2\delta\mathfrak{m}_1K_{21}, c, l, m)_1^2 = \\ al(\alpha u_1+\beta u_2+\varepsilon+2\alpha\mathfrak{n}_1 K_{11}+2\beta\mathfrak{n}_1 K_{21}, \gamma u_1+\delta u_2+\zeta+2\gamma\mathfrak{n}_1 K_{11}+2\delta\mathfrak{n}_1 K_{21}, c, l, m)_1^2 \end{cases}$$

und ähnlich gestaltete, die sich für die *Abel*schen Functionen mit dem Index 1 und 3 aus den in (20.) angegebenen Substitutionen ergeben.

Da nun die Functionen $al(u_1, u_2)_\alpha$ nur vier Perioden haben, so könnte man aus den Gleichungen (21.) unmittelbar die Relationen herleiten, zu denen

wir am Ende des folgenden Paragraphen geführt werden; ich ziehe es jedoch vor, hier eine rein algebraische Auflösungsmethode zu geben, da dieselbe uns einige für die Theorie der ϑ-Functionen wichtige Formeln liefern wird. Fügen wir also zu den Gleichungen (21.) und den dazu gehörigen noch die ähnlich gebildeten für die *Abel*schen Functionen mit dem Index 13 hinzu, was, da die Argumente u_1, u_2 beliebig sind, erlaubt ist, so würde, wenn:

$$(22.)\quad \begin{cases} \alpha u_1+\beta u_2+2\alpha\mathfrak{m}_1K_{11}+2\beta\mathfrak{m}_1K_{21}+\varepsilon = 2C_{11}\mathfrak{v}_1'+2C_{12}\mathfrak{v}_2', \\ \gamma u_1+\delta u_2+2\gamma\mathfrak{m}_1K_{11}+2\delta\mathfrak{m}_1K_{21}+\zeta = 2C_{21}\mathfrak{v}_1'+2C_{22}\mathfrak{v}_2' \end{cases}$$

und

$$(23.)\quad \begin{cases} \alpha u_1+\beta u_2+2\alpha\mathfrak{n}_1K_{11}+2\beta\mathfrak{n}_1K_{21}+\varepsilon = 2C_{11}\mathfrak{v}_1+2C_{12}\mathfrak{v}_2, \\ \gamma u_1+\delta u_2+2\gamma\mathfrak{n}_1K_{11}+2\delta\mathfrak{n}_1K_{21}+\zeta = 2C_{21}\mathfrak{v}_1+2C_{22}\mathfrak{v}_2 \end{cases}$$

gesetzt wird, unsere Aufgabe folgendermassen lauten:

Es sollen die Werthe von $\mathfrak{v}_1'$, $\mathfrak{v}_2'$ als Functionen von $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$ ausgedrückt gefunden werden, welche die drei Gleichungen befriedigen:

$$(24.)\quad \begin{cases} \dfrac{\vartheta(\mathfrak{v}_1',\mathfrak{v}_2')_1^2}{\vartheta(\mathfrak{v}_1',\mathfrak{v}_2')_5^2} = \dfrac{\vartheta(\mathfrak{v}_1,\mathfrak{v}_2)_1^2}{\vartheta(\mathfrak{v}_1,\mathfrak{v}_2)_5^2}, \quad \dfrac{\vartheta(\mathfrak{v}_1',\mathfrak{v}_2')_3^2}{\vartheta(\mathfrak{v}_1',\mathfrak{v}_2')_5^2} = \dfrac{\vartheta(\mathfrak{v}_1,\mathfrak{v}_2)_3^2}{\vartheta(\mathfrak{v}_1,\mathfrak{v}_2)_5^2}, \\ \dfrac{\vartheta(\mathfrak{v}_1',\mathfrak{v}_2')_{13}^2}{\vartheta(\mathfrak{v}_1',\mathfrak{v}_2')_5^2} = \dfrac{\vartheta(\mathfrak{v}_1,\mathfrak{v}_2)_{13}^2}{\vartheta(\mathfrak{v}_1,\mathfrak{v}_2)_5^2}. \end{cases}$$

Zur Lösung dieser Aufgabe schicke ich ein System von Additionsformeln voraus, das mir für die Behandlung verschiedener Fragen in der Theorie der *Abel*schen Functionen als das bequemste erschienen ist.

§. 2.

Indem ich die im §. 3 meiner Abhandlung (Band 64) gebrauchten Bezeichnungen festhalte, setze ich

$$\varepsilon_1 = 1, \quad \varepsilon_2 = 3,$$

also

$$\varepsilon' = (13)(13) = 5, \quad \varepsilon = 1, \quad 3, \quad 13,$$

so dass, wenn $\delta = 5$ angenommen wird:

$$\gamma = 5, \quad 1, \quad 3, \quad 13 \text{ ist.}$$

Die dort aufgestellten Gleichungen werden nun, wenn $w_1 = w_2 = 0$ gesetzt und $\vartheta(\mathfrak{v}_1'+\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2'+\mathfrak{v}_2)_\alpha$ mit P_α, $\vartheta(\mathfrak{v}_1'-\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2'-\mathfrak{v}_2)_\alpha$ mit Q_α, $\vartheta(\mathfrak{v}_1', \mathfrak{v}_2')_\alpha$ mit p_α, $\vartheta(\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2)_\alpha$ mit q_α bezeichnet wird, folgendes System von Additionsformeln ergeben:

$$(25.)\quad \begin{cases} \vartheta_5^2 . P_5\, Q_5 = p_5^2 q_5^2 + p_1^2 q_1^2 + p_3^2 q_3^2 + p_{13}^2 q_{13}^2, \\ \vartheta_5^2 . P_0\, Q_0 = p_5^2 q_0^2 + p_1^2 q_{01}^2 + p_3^2 q_{03}^2 + p_{13}^2 q_{24}^2, \\ \vartheta_5^2 . P_1\, Q_1 = -p_5^2 q_1^2 + p_1^2 q_5^2 - p_3^2 q_{13}^2 + p_{13}^2 q_3^2, \\ \vartheta_5^2 . P_2\, Q_2 = p_5^2 q_2^2 - p_1^2 q_{12}^2 + p_3^2 q_{23}^2 - p_{13}^2 q_{04}^2, \\ \vartheta_5^2 . P_3\, Q_3 = -p_5^2 q_3^2 + p_1^2 q_{13}^2 + p_3^2 q_5^2 - p_{13}^2 q_1^2, \\ \vartheta_5^2 . P_4\, Q_4 = p_5^2 q_4^2 - p_1^2 q_{14}^2 - p_3^2 q_{34}^2 + p_{13}^2 q_{02}^2, \\ \vartheta_5^2 . P_{01} Q_{01} = p_5^2 q_{01}^2 - p_1^2 q_0^2 + p_3^2 q_{24}^2 - p_{13}^2 q_{03}^2, \\ \vartheta_5^2 . P_{02} Q_{02} = -p_5^2 q_{02}^2 + p_1^2 q_{34}^2 - p_3^2 q_{14}^2 + p_{13}^2 q_4^2, \\ \vartheta_5^2 . P_{03} Q_{03} = p_5^2 q_{03}^2 - p_1^2 q_{24}^2 - p_3^2 q_0^2 + p_{13}^2 q_{01}^2, \\ \vartheta_5^2 . P_{04} Q_{04} = -p_5^2 q_{04}^2 + p_1^2 q_{23}^2 + p_3^2 q_{12}^2 - p_{13}^2 q_2^2, \\ \vartheta_5^2 . P_{12} Q_{12} = p_5^2 q_{12}^2 + p_1^2 q_2^2 + p_3^2 q_{04}^2 + p_{13}^2 q_{23}^2, \\ \vartheta_5^2 . P_{13} Q_{13} = -p_5^2 q_{13}^2 - p_1^2 q_3^2 + p_3^2 q_1^2 + p_{13}^2 q_5^2, \\ \vartheta_5^2 . P_{14} Q_{14} = p_5^2 q_{14}^2 + p_1^2 q_4^2 - p_3^2 q_{02}^2 - p_{13}^2 q_{34}^2, \\ \vartheta_5^2 . P_{23} Q_{23} = p_5^2 q_{23}^2 + p_1^2 q_{04}^2 - p_3^2 q_2^2 - p_{13}^2 q_{12}^2, \\ \vartheta_5^2 . P_{24} Q_{24} = -p_5^2 q_{24}^2 - p_1^2 q_{03}^2 + p_3^2 q_{01}^2 + p_{13}^2 q_0^2, \\ \vartheta_5^2 . P_{34} Q_{34} = p_5^2 p_{34}^2 + p_1^2 q_{02}^2 + p_3^2 q_4^2 + p_{13}^2 q_{14}^2. \end{cases}$$

Die drei Gleichungen (24.) werden nun, wie aus der dritten, fünften und zwölften der eben aufgestellten Additionsformeln ersichtlich ist, in das folgende Gleichungssystem übergehen:

$$(26.)\quad \begin{cases} \vartheta(\mathfrak{v}_1'+\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2'+\mathfrak{v}_2)_1\, \vartheta(\mathfrak{v}_1'-\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2'-\mathfrak{v}_2)_1 = 0, \\ \vartheta(\mathfrak{v}_1'+\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2'+\mathfrak{v}_2)_3\, \vartheta(\mathfrak{v}_1'-\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2'-\mathfrak{v}_2)_3 = 0, \\ \vartheta(\mathfrak{v}_1'+\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2'+\mathfrak{v}_2)_{13}\, \vartheta(\mathfrak{v}_1'-\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2'-\mathfrak{v}_2)_{13} = 0, \end{cases}$$

oder vielmehr, es werden die gesuchten Werthe von $\mathfrak{v}_1'$, $\mathfrak{v}_2'$, wie aus (22.) und (23.) hervorgeht, die folgenden drei Gleichungen befriedigen müssen:

$$(27.)\quad \begin{cases} \vartheta(\mathfrak{v}_1'-\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2'-\mathfrak{v}_2)_1 = 0, \\ \vartheta(\mathfrak{v}_1'-\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2'-\mathfrak{v}_2)_3 = 0, \\ \vartheta(\mathfrak{v}_1'-\mathfrak{v}_2, \mathfrak{v}_2'-\mathfrak{v}_2)_{13} = 0. \end{cases}$$

Es ist also die Frage darauf zurückgeführt, die Werthe von $\mathfrak{w}_1$ und $\mathfrak{w}_2$ zu suchen, für welche die drei ϑ-Functionen:

$$\vartheta(\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2)_1, \quad \vartheta(\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2)_3, \quad \vartheta(\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2)_{13}$$

zu gleicher Zeit Null werden.

Zur Lösung dieser Aufgabe schicken wir folgenden Hülfssatz voraus:

Wenn e_1, e_2 Werthe der Variablen sind, welche die drei Gleichungen befriedigen:

$$(28.)\qquad \vartheta(e_1, e_2)_1 = 0,\quad \vartheta(e_1, e_2)_3 = 0,\quad \vartheta(e_1, e_2)_{13} = 0,$$

so müssen nothwendig die Gleichungen bestehen:

$$\left(\frac{\vartheta(u_1+e_1, u_2+e_2)_1}{\vartheta(u_1+e_1, u_2+e_2)_5}\right)^2 = \left(\frac{\vartheta(u_1, u_2)_1}{\vartheta(u_1, u_2)_5}\right)^2,\quad \left(\frac{\vartheta(u_1+e_1, u_2+e_2)_3}{\vartheta(u_1+e_1, u_2+e_2)_5}\right)^2 = \left(\frac{\vartheta(u_1, u_2)_3}{\vartheta(u_1, u_2)_5}\right)^2,$$

$$\left(\frac{\vartheta(u_1+e_1, u_2+e_2)_{13}}{\vartheta(u_1+e_1, u_2+e_2)_5}\right)^2 = \left(\frac{\vartheta(u_1, u_2)_{13}}{\vartheta(u_1, u_2)_5}\right)^2.$$

Zunächst ist unmittelbar ersichtlich, dass wenn $\vartheta(u_1, u_2)_1$, $\vartheta(u_1, u_2)_3$, $\vartheta(u_1, u_2)_{13}$ für dieselben Werthe von u_1, u_2 verschwinden, nicht auch $\vartheta(u_1, u_2)_5$ für eben diese Werthe Null werden kann; denn nach der ersten Formel (25.) ist:

$$\vartheta_5^2 . \vartheta(u_1+e_1, u_2+e_2)_5 \vartheta(u_1-e_1, u_2-e_2)_5 =$$
$$\vartheta(u_1,u_2)_5^2 \vartheta(e_1,e_2)_5^2 + \vartheta(u_1,u_2)_1^2 \vartheta(e_1,e_2)_1^2 + \vartheta(u_1,u_2)_3^2 \vartheta(e_1,e_2)_3^2 + \vartheta(u_1,u_2)_{13}^2 \vartheta(e_1,e_2)_{13}^2;$$

wäre nun zu gleicher Zeit:

$$\vartheta(e_1, e_2)_5 = \vartheta(e_1, e_2)_1 = \vartheta(e_1, e_2)_3 = \vartheta(e_1, e_2)_{13} = 0,$$

so müsste auch $\vartheta(u_1+e_1, u_2+e_2)_5 \vartheta(u_1-e_1, u_2-e_2)_5 = 0$ sein, was, da u_1, u_2 beliebig sind, unmöglich ist.

Nun ist nach Formel (4.) (Bd. 64, p. 28 dieses Journals):

$$\vartheta_5 . \vartheta_2 . \vartheta(u_1+e_1, u_2+e_2)_2 \vartheta(u_1-e_1, u_2-e_2)_5 = \vartheta(e_1, e_2)_5 \vartheta(e_1, e_2)_2 \vartheta(u_1, u_2)_5 \vartheta(u_1, u_2)_2$$

und nach Formel (1.)

$$\vartheta_5 . \vartheta_5 . \vartheta(u_1+e_1, u_2+e_2)_5 \vartheta(u_1-e_1, u_2-e_2)_5 = \vartheta(e_1, e_2)_5 \vartheta(e_1, e_2)_5 \vartheta(u_1, u_2)_5 \vartheta(u_1, u_2)_5$$

oder durch Division, die erlaubt ist, weil, wie eben bewiesen, $\vartheta(e_1, e_2)_5$ nicht Null ist,

$$(29.)\qquad \frac{\vartheta(u_1+e_1, u_2+e_2)_2}{\vartheta(u_1+e_1, u_2+e_2)_5} = \frac{\vartheta_5}{\vartheta_2}\,\frac{\vartheta(e_1, e_2)_2}{\vartheta(e_1, e_2)_5}\,\frac{\vartheta(u_1, u_2)_2}{\vartheta(u_1, u_2)_5}.$$

Ebenso folgt aus der elften und ersten Formel (Bd. 64, p. 28 dieses Journals)

$$(30.)\qquad \frac{\vartheta(u_1+e_1, u_2+e_2)_{12}}{\vartheta(u_1+e_1, u_2+e_2)_5} = \frac{\vartheta_5}{\vartheta_{12}}\,\frac{\vartheta(e_1, e_2)_{12}}{\vartheta(e_1, e_2)_5}\,\frac{\vartheta(u_1, u_2)_{12}}{\vartheta(u_1, u_2)_5}.$$

und aus Verbindung von (29.) und (30.):

$$(31.)\qquad \frac{\vartheta(u_1+e_1, u_2+e_2)_{12}}{\vartheta(u_1+e_1, u_2+e_2)_2} = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_{12}}\,\frac{\vartheta(e_1, e_2)_{12}}{\vartheta(e_1, e_2)_2}\,\frac{\vartheta(u_1, u_2)_{12}}{\vartheta(u_1, u_2)_2},$$

welche Gleichung, wenn man die Substitution 2 auf sie anwendet (Bd. 64, p. 23 dieses Journals), übergeht in:

$$(32.)\qquad \frac{\vartheta(u_1+e_1, u_2+e_2)_1}{\vartheta(u_1+e_1, u_2+e_2)_5} = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_{12}}\,\frac{\vartheta(e_1, e_2)_{12}}{\vartheta(e_1, e_2)_2}\,\frac{\vartheta(u_1, u_2)_1}{\vartheta(u_1, u_2)_5}.$$

Nun erhält man aber aus (31.), wenn man in derselben $u_1 = -e_1$, $u_2 = -e_2$ setzt, die Gleichung:

$$\left(\frac{\vartheta(e_1, e_2)_{12}}{\vartheta(e_1, e_2)_2}\right)^2 = \left(\frac{\vartheta_{12}}{\vartheta_2}\right)^2,$$

so dass (32.) übergeht in:

$$(33.)\quad \left(\frac{\vartheta(u_1+e_1, u_2+e_2)_1}{\vartheta(u_1+e_1, u_2+e_2)_5}\right)^2 = \left(\frac{\vartheta(u_1, u_2)_1}{\vartheta(u_1, u_2)_5}\right)^2$$

Behandelt man ebenso die ϑ-Functionen mit dem Index 23 und 2 durch die Substitution 2 und die ϑ-Functionen mit dem Index 01 und 03 durch die Substitution 01, so erhält man die beiden Gleichungen:

$$(34.)\quad \left(\frac{\vartheta(u_1+e_1, u_2+e_2)_3}{\vartheta(u_1+e_1, u_2+e_2)_5}\right)^2 = \left(\frac{\vartheta(u_1, u_2)_3}{\vartheta(u_1, u_2)_5}\right)^2, \quad \left(\frac{\vartheta(u_1+e_1, u_2+e_2)_{13}}{\vartheta(u_1+e_1, u_2+e_2)_5}\right)^2 = \left(\frac{\vartheta(u_1, u_2)_{13}}{\vartheta(u_1, u_2)_5}\right)^2.$$

Bevor wir zur Anwendung dieses Satzes gehen, müssen wir die Entwicklung des zweiten Differentialquotienten des Logarithmus der ϑ-Function in algebraische Functionen der ϑ-Quotienten voranschicken.

Ich begnüge mich mit der Angabe des Resultats, indem ich nur bemerke, dass dasselbe aus der ersten Gleichung (25.) durch Entwicklung beider Seiten der Gleichung nach Potenzen von v_1, v_2 erhalten wird; die drei Relationen sind:

$$(35.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \log \vartheta(u_1, u_2)_5}{\partial u_1^2} = \\ \dfrac{\frac{\partial^2 \vartheta_5}{\partial v_1^2}}{\vartheta_5} + \left(\dfrac{\frac{\partial \vartheta_1}{\partial v_1}}{\vartheta_5}\right)^2 \left(\dfrac{\vartheta(u_1, u_2)_1}{\vartheta(u_1, u_2)_5}\right)^2 + \left(\dfrac{\frac{\partial \vartheta_3}{\partial v_1}}{\vartheta_5}\right)^2 \left(\dfrac{\vartheta(u_1, u_2)_3}{\vartheta(u_1, u_2)_5}\right)^2 + \left(\dfrac{\frac{\partial \vartheta_{13}}{\partial v_1}}{\vartheta_5}\right)^2 \left(\dfrac{\vartheta(u_1, u_2)_{13}}{\vartheta(u_1, u_2)_5}\right)^2, \\ \dfrac{\partial^2 \log \vartheta(u_1, u_2)_5}{\partial u_2^2} = \\ \dfrac{\frac{\partial^2 \vartheta_5}{\partial v_2^2}}{\vartheta_5} + \left(\dfrac{\frac{\partial \vartheta_1}{\partial v_2}}{\vartheta_5}\right)^2 \left(\dfrac{\vartheta(u_1, u_2)_1}{\vartheta(u_1, u_2)_5}\right)^2 + \left(\dfrac{\frac{\partial \vartheta_3}{\partial v_2}}{\vartheta_5}\right)^2 \left(\dfrac{\vartheta(u_1, u_2)_3}{\vartheta(u_1, u_2)_5}\right)^2 + \left(\dfrac{\frac{\partial \vartheta_{13}}{\partial v_2}}{\vartheta_5}\right)^2 \left(\dfrac{\vartheta(u_1, u_2)_{13}}{\vartheta(u_1, u_2)_5}\right)^2; \\ \dfrac{\partial^2 \log \vartheta(u_1, u_2)_5}{\partial u_1 . \partial u_2} = \\ \dfrac{\frac{\partial^2 \vartheta_5}{\partial v_1 . \partial v_2}}{\vartheta_5} + \dfrac{\frac{\partial \vartheta_1}{\partial v_1} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial v_2}}{\vartheta_5^2} \left(\dfrac{\vartheta(u_1, u_2)_1}{\vartheta(u_1, u_2)_5}\right)^2 + \dfrac{\frac{\partial \vartheta_3}{\partial v_1} \frac{\partial \vartheta_3}{\partial v_2}}{\vartheta_5^2} \left(\dfrac{\vartheta(u_1, u_2)_3}{\vartheta(u_1, u_2)_5}\right)^2 + \dfrac{\frac{\partial \vartheta_{13}}{\partial v_1} \frac{\partial \vartheta_{13}}{\partial v_2}}{\vartheta_5^2} \left(\dfrac{\vartheta(u_1, u_2)_{13}}{\vartheta(u_1, u_2)_5}\right)^2 \end{cases}$$

Sind nun e_1, e_2 Werthe der Variablen, welche die Gleichungen befriedigen:

$$\vartheta(e_1, e_2)_1 = 0, \quad \vartheta(e_1, e_2)_3 = 0, \quad \vartheta(e_1, e_2)_{13} = 0,$$

und setzt man in den Gleichungen (35.) statt u_1, u_1+e_1, statt u_2, u_2+e_2, so erhält man mit Benutzung des in den Gleichungen (33.), (34.) ausgesprochenen Hülfssatzes die Gleichungen:

$$(36.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \log\vartheta(u_1+e_1, u_2+e_2)_5}{\partial u_1^2} = \dfrac{\partial^2 \log\vartheta(u_1, u_2)_5}{\partial u_1^2}, \\ \dfrac{\partial^2 \log\vartheta(u_1+e_1, u_2+e_2)_5}{\partial u_2^2} = \dfrac{\partial^2 \log\vartheta(u_1, u_2)_5}{\partial u_2^2}. \\ \dfrac{\partial^2 \log\vartheta(u_1+e_1, u_2+e_2)_5}{\partial u_1 . \partial u_2} = \dfrac{\partial^2 \log\vartheta(u_1, u_2)_5}{\partial u_1 . \partial u_2}. \end{cases}$$

Die Integration dieser Gleichungen liefert die Relation:

$$(37.)\quad \vartheta(u_1+e_1, u_2+e_2)_5 = e^{pu_1+qu_2+r}\vartheta(u_1, u_2)_5$$

wo p, q, r Constanten sind.

Seien nun e_1', e_2' zwei andere Werthe, für welche $\vartheta(u_1, u_2)_1$, $\vartheta(u_1, u_2)_3$, $\vartheta(u_1, u_2)_{13}$ zu gleicher Zeit verschwinden, so erhält man ebenso:

$$(38.)\quad \vartheta(u_1+e_1', u_2+e_2')_5 = e^{p'u_1+q'u_2+r'}\vartheta(u_1, u_2)_5$$

wo, wie leicht zu sehen, zwischen den Grössen p, q, e_1, e_2, p', q', e_1', e_2' die Relation bestehen muss:

$$(39.)\quad pe_1'+qe_2'-p'e_1-q'e_2 = 2s\pi i,$$

wenn s eine beliebige ganze Zahl bezeichnet. Durch Substitution der vier Werthepaare 0, 1; 1, 0; τ_{11}, τ_{21}; τ_{12}, τ_{22} ergeben sich für e_1, e_2 folgende Ausdrücke:

$$(40.)\quad \begin{cases} e_1 = m_1+n_1\tau_{11}+n_2\tau_{12}, \\ e_2 = m_2+n_1\tau_{21}+n_2\tau_{22}, \end{cases}$$

in denen die Grössen m_1, m_2, n_1, n_2, wie man sich durch Einsetzen in die zu befriedigenden Gleichungen überzeugt, beliebige ganze Zahlen sind. Es sind also die Lösungen der Gleichung (27.) also auch die der Gleichung (24.) folgende

$$\mathfrak{v}_1'-\mathfrak{v}_1 = r_{11}+s_{11}\tau_{11}+s_{12}\tau_{12},$$
$$\mathfrak{v}_2'-\mathfrak{v}_2 = r_{12}+s_{11}\tau_{21}+s_{12}\tau_{22},$$

in denen r_{11}, r_{12}, s_{11}, s_{12} beliebige ganze Zahlen sind, oder nach (22.)

und (23.):

$$(41.)\quad \begin{cases} (\mathfrak{m}_1-\mathfrak{n}_1)(\alpha K_{11}+\beta K_{21}) = C_{11}(r_{11}+s_{11}\tau_{11}+s_{12}\tau_{12})+C_{12}(r_{12}+s_{11}\tau_{21}+s_{12}\tau_{22}),\\ (\mathfrak{m}_1-\mathfrak{n}_1)(\gamma K_{11}+\delta K_{21}) = C_{21}(r_{11}+s_{11}\tau_{11}+s_{12}\tau_{12})+C_{22}(r_{12}+s_{11}\tau_{21}+s_{12}\tau_{22}). \end{cases}$$

Aehnlich liefern die übrigen Systeme (20.) die Gleichungen:

$$(42.)\quad \begin{cases} (\mathfrak{m}_2-\mathfrak{n}_2)(\alpha K_{12}+\beta K_{22}) = C_{11}(r_{21}+s_{21}\tau_{11}+s_{22}\tau_{12})+C_{12}(r_{22}+s_{21}\tau_{21}+s_{22}\tau_{22}),\\ (\mathfrak{m}_2-\mathfrak{n}_2)(\gamma K_{12}+\delta K_{22}) = C_{21}(r_{21}+s_{21}\tau_{11}+s_{22}\tau_{12})+C_{22}(r_{22}+s_{21}\tau_{21}+s_{22}\tau_{22}), \end{cases}$$

$$(43.)\quad \begin{cases} i(\mathfrak{m}_1'-\mathfrak{n}_1')(\alpha K_{11}'+\beta K_{21}') = C_{11}(r_{11}'+s_{11}'\tau_{11}+s_{12}'\tau_{12})+C_{12}(r_{12}'+s_{11}'\tau_{21}+s_{12}'\tau_{22}),\\ i(\mathfrak{m}_1'-\mathfrak{n}_1')(\gamma K_{11}'+\delta K_{21}') = C_{21}(r_{11}'+s_{11}'\tau_{11}+s_{12}'\tau_{12})+C_{22}(r_{12}'+s_{11}'\tau_{21}+s_{12}'\tau_{22}), \end{cases}$$

$$(44.)\quad \begin{cases} i(\mathfrak{m}_2'-\mathfrak{n}_2')(\alpha K_{12}'+\beta K_{22}') = C_{11}(r_{21}'+s_{21}'\tau_{11}+s_{22}'\tau_{12})+C_{12}(r_{22}'+s_{21}'\tau_{21}+s_{22}'\tau_{22}),\\ i(\mathfrak{m}_2'-\mathfrak{n}_2')(\gamma K_{12}'+\delta K_{22}') = C_{21}(r_{21}'+s_{21}'\tau_{11}+s_{22}'\tau_{12})+C_{22}(r_{22}'+s_{21}'\tau_{21}+s_{22}'\tau_{22}), \end{cases}$$

wo die r und s beliebige ganze Zahlen sind.

§. 3.

Setzt man zur Abkürzung

$$(45.)\quad \begin{cases} \mathfrak{M}_2(r_{11}+s_{11}\tau_{11}+s_{12}\tau_{12}) = \mathfrak{M}_{11}, & \mathfrak{M}_2(r_{12}+s_{11}\tau_{21}+s_{12}\tau_{22}) = \mathfrak{M}_{12}, & \mathfrak{m}_1-\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{M}_1,\\ \mathfrak{M}_1(r_{21}+s_{21}\tau_{11}+s_{22}\tau_{12}) = \mathfrak{M}_{21}, & \mathfrak{M}_1(r_{22}+s_{21}\tau_{21}+s_{22}\tau_{22}) = \mathfrak{M}_{22}, & \mathfrak{m}_2-\mathfrak{n}_2 = \mathfrak{M}_2,\\ \mathfrak{M}_2'(r_{11}'+s_{11}'\tau_{11}+s_{12}'\tau_{12}) = \mathfrak{M}_{11}', & \mathfrak{M}_2'(r_{12}'+s_{11}'\tau_{21}+s_{12}'\tau_{22}) = \mathfrak{M}_{12}', & \mathfrak{m}_1'-\mathfrak{n}_1' = \mathfrak{M}_1',\\ \mathfrak{M}_1'(r_{21}'+s_{21}'\tau_{11}+s_{22}'\tau_{12}) = \mathfrak{M}_{21}', & \mathfrak{M}_2'(r_{22}'+s_{21}'\tau_{21}+s_{22}'\tau_{22}) = \mathfrak{M}_{22}', & \mathfrak{m}_2'-\mathfrak{n}_2' = \mathfrak{M}_2', \end{cases}$$

so ergeben die Gleichungen (41.), (42.), (43.), (44.) folgende Resultate:

$$(46.)\quad \begin{cases} \tau_{11}' = \dfrac{\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1'\mathfrak{M}_2'}\cdot\dfrac{\mathfrak{M}_{11}'\mathfrak{M}_{22}-\mathfrak{M}_{21}\mathfrak{M}_{12}'}{\mathfrak{M}_{11}\mathfrak{M}_{22}-\mathfrak{M}_{12}\mathfrak{M}_{21}},\\ \tau_{12}' = \dfrac{\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1'\mathfrak{M}_2'}\cdot\dfrac{\mathfrak{M}_{21}'\mathfrak{M}_{22}-\mathfrak{M}_{21}\mathfrak{M}_{22}'}{\mathfrak{M}_{11}\mathfrak{M}_{22}-\mathfrak{M}_{12}\mathfrak{M}_{21}},\\ \tau_{21}' = \dfrac{\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1'\mathfrak{M}_2'}\cdot\dfrac{\mathfrak{M}_{12}'\mathfrak{M}_{11}-\mathfrak{M}_{11}'\mathfrak{M}_{12}}{\mathfrak{M}_{11}\mathfrak{M}_{22}-\mathfrak{M}_{12}\mathfrak{M}_{21}},\\ \tau_{22}' = \dfrac{\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1'\mathfrak{M}_2'}\cdot\dfrac{\mathfrak{M}_{22}'\mathfrak{M}_{11}-\mathfrak{M}_{21}'\mathfrak{M}_{12}}{\mathfrak{M}_{11}\mathfrak{M}_{22}-\mathfrak{M}_{12}\mathfrak{M}_{21}},\\ \tau_{11}'.\tau_{22}'-\tau_{12}'.\tau_{21}' = \left(\dfrac{\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1'\mathfrak{M}_2'}\right)^2\cdot\dfrac{\mathfrak{M}_{11}'\mathfrak{M}_{22}'-\mathfrak{M}_{12}'\mathfrak{M}_{21}'}{\mathfrak{M}_{11}\mathfrak{M}_{22}-\mathfrak{M}_{12}\mathfrak{M}_{21}}, \end{cases}$$

$$(47.)\quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{K_{22}(m_{11}C_{11}+m_{12}C_{12})-K_{21}(m_{21}C_{11}+m_{22}C_{12})}{m_1 m_2(K_{11}K_{22}-K_{12}K_{21})}, \\ \beta = \dfrac{K_{11}(m_{21}C_{11}+m_{22}C_{12})-K_{12}(m_{11}C_{11}+m_{12}C_{12})}{m_1 m_2(K_{11}K_{22}-K_{12}K_{21})}, \\ \gamma = \dfrac{K_{22}(m_{11}C_{21}+m_{12}C_{22})-K_{21}(m_{21}C_{21}+m_{22}C_{22})}{m_1 m_2(K_{11}K_{22}-K_{12}K_{21})}, \\ \delta = \dfrac{K_{11}(m_{21}C_{21}+m_{22}C_{22})-K_{12}(m_{11}C_{21}+m_{12}C_{22})}{m_1 m_2(K_{11}K_{22}-K_{12}K_{21})}, \end{cases}$$

endlich

$$(48.)\quad \begin{cases} v_1' = m_1 m_2 \dfrac{(v_1-\varepsilon_1)m_{22}-(v_2-\varepsilon_2)m_{21}}{m_{11}m_{22}-m_{12}m_{21}}, \\ v_2' = m_1 m_2 \dfrac{-(v_1-\varepsilon_1)m_{12}+(v_2-\varepsilon_2)m_{11}}{m_{11}m_{22}-m_{12}m_{21}}, \end{cases}$$

wo noch, wenn

$$(49.)\quad \begin{cases} m_1 r_{2\alpha} = \varrho_{2\alpha}, \quad m_2 r_{1\alpha} = \varrho_{1\alpha}, \quad m_1 s_{2\alpha} = \sigma_{2\alpha}, \quad m_2 s_{1\alpha} = \sigma_{1\alpha}, \\ m_1' r_{2\alpha}' = \varrho_{2\alpha}', \quad m_2' r_{1\alpha}' = \varrho_{1\alpha}', \quad m_1' s_{2\alpha}' = \sigma_{2\alpha}', \quad m_2' s_{1\alpha}' = \sigma_{1\alpha}' \end{cases}$$

gesetzt werden, die aus der Gleichung $\tau_{12}' = \tau_{21}'$ hervorgehenden Bedingungen hinzuzufügen sind:

$$(50.)\quad \begin{cases} \sum\limits_{\alpha=1,2}(\varrho_{\alpha 1}\varrho_{\alpha 2}'-\varrho_{\alpha 2}\varrho_{\alpha 1}') = 0, \quad \sum\limits_{\alpha=1,2}(\varrho_{\alpha 2}\sigma_{\alpha 1}'-\varrho_{\alpha 2}'\sigma_{\alpha 1}) = 0, \\ \sum\limits_{\alpha}(\varrho_{\alpha 1}\sigma_{\alpha 2}'-\varrho_{\alpha 1}'\sigma_{\alpha 2}) = 0, \quad \sum\limits_{\alpha}(\sigma_{\alpha 1}\sigma_{\alpha 2}'-\sigma_{\alpha 2}\sigma_{\alpha 1}') = 0, \\ \sum\limits_{\alpha}(\varrho_{\alpha 1}\sigma_{\alpha 1}'-\varrho_{\alpha 1}'\sigma_{\alpha 1}) = n, \quad \sum\limits_{\alpha}(\varrho_{\alpha 2}\sigma_{\alpha 2}'-\varrho_{\alpha 2}'\sigma_{\alpha 2}) = n, \end{cases}$$

worin n eine beliebige ganze Zahl bezeichnet.

Es ist nun noch nachzuweisen, dass die soeben für die algebraische Transformation aufgestellten nothwendigen Bedingungen auch die hinreichenden sind. Nach *Hermite* (sur la théorie de la transformation des fonctions Abéliennes, comptes rendus, tome XL, année 1855) ist nämlich, wenn wir:

$$v_1' = m_1 . m_2 . \omega_1, \quad v_2' = m_1 . m_2 . \omega_2,$$

$$\tau_{11}' = \frac{m_1 . m_2}{m_1' . m_2'} t_{11}, \quad \tau_{12}' = \frac{m_1 . m_2}{m_1' . m_2'} t_{12}, \quad \tau_{22}' = \frac{m_1 . m_2}{m_1' . m_2'} t_{22}$$

setzen, der Quotient:

$$\frac{\vartheta(\omega_1, \omega_2, t_{11}, t_{12}, t_{22})_\alpha}{\vartheta(\omega_1, \omega_2, t_{11}, t_{12}, t_{22})_\beta}$$

algebraisch durch die ϑ-Functionen des ursprünglichen Systems ausdrückbar. Da nun

$$\vartheta(m_1 m_2 \omega_1, m_1 m_2 \omega_2, m_1 m_2 t_{11}, m_1 m_2 t_{12}, m_1 m_2 t_{22})_\alpha$$

eine algebraische Function der ϑ-Functionen

$$\vartheta(\omega_1, \omega_2, t_{11}, t_{12}, t_{22})_\beta$$

und endlich

$$\vartheta\left(m_1 m_2 \omega_1, m_1 m_2 \omega_2, \frac{m_1 m_2}{m'_1 m'_2} t_{11}, \frac{m_1 m_2}{m'_1 m'_2} t_{12}, \frac{m_1 m_2}{m'_1 m'_2} t_{22}\right)_\alpha$$

algebraisch durch

$$\vartheta(m_1 m_2 \omega_1, m_1 m_2 \omega_2, m_1 m_2 t_{11}, m_1 m_2 t_{12}, m_1 m_2 t_{22})_\beta$$

ausdrückbar ist, wie man leicht einsieht, wenn in die oben aufgestellten Zahlengleichungen

$$\sigma'_{11} = 1, \quad \sigma'_{22} = 1, \quad \rho_{22} = m'_1 m'_2, \quad \rho_{11} = m'_1 m'_2$$

gesetzt wird, so folgt, dass die aufgestellten Transformationsbedingungen die nothwendigen und hinreichenden sind. —

§. 4.

Nachdem wir bis hierher die Moduln der *Abel*schen Integrale keiner Beschränkung unterworfen haben, machen wir nunmehr die Annahme, von der bereits am Anfange dieser Arbeit die Rede war, dass die Moduln des ursprünglichen Systems *c, l, m* sowie die Moduln des transformirten Systems *x, λ, μ* reell und < 1 sein sollen.

Da unter dieser Annahme die Perioden *K* und *K'* reell werden, so müssen die τ und τ' rein imaginaire Grössen sein und man wird, wenn der reelle und imaginaire Theil in der ersten der Gleichungen (46.) auf beiden Seiten einander gleich gesetzt wird, aus dieser einen Gleichung folgende zwei erhalten:

$$(51.)\quad \left\{\begin{array}{c} \tau_{11} = \\ \dfrac{m_1 m_2}{m_1 m_2} \cdot \dfrac{\rho'_{11}\rho_{22} - \rho_{21}\rho'_{12} + (\sigma'_{11}\sigma_{22} - \sigma_{21}\sigma'_{12})(\tau_{11}\tau_{22} - \tau_{12}\tau_{21})}{(\rho_{22}\sigma_{11} - \rho_{12}\sigma_{21})\tau_{11} + (\rho_{22}\sigma_{12} - \rho_{12}\sigma_{22})\tau_{12} + (\rho_{11}\sigma_{21} - \rho_{21}\sigma_{11})\tau_{21} + (\rho_{11}\sigma_{22} - \rho_{21}\sigma_{12})\tau_{22}} \end{array}\right.$$

und

$$(52.)\quad \left\{\begin{array}{c} \tau'_{11} = \\ \dfrac{m_1 m_2}{m'_1 m'_2} \cdot \dfrac{(\rho_{22}\sigma'_{11} - \rho'_{12}\sigma_{21})\tau_{11} + (\rho_{22}\sigma'_{12} - \rho'_{12}\sigma_{22})\tau_{12} + (\rho'_{11}\sigma_{21} - \rho_{21}\sigma'_{11})\tau_{21} + (\rho'_{11}\sigma_{22} - \rho_{21}\sigma'_{12})\tau_{22}}{(\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}\rho_{21}) + (\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}\sigma_{21})(\tau_{11}\tau_{22} - \tau_{12}\tau_{21})}. \end{array}\right.$$

Die ähnlichen Ausdrücke für τ'_{21}, τ'_{12}, τ'_{22} ergeben sich aus (51.) und (52.), wenn man in den Zählern dieser Ausdrücke 1) in den nicht gestrichenen Buchstaben für den ersten Index 2 den Index 1 setzt (mit entgegengesetztem Zeichen), 2) in den gestrichenen Buchstaben für den ersten Index 1 den Index 2 setzt, 3) in den gestrichenen Buchstaben für den ersten Index 1 den Index 2, in den nicht gestrichenen für den ersten Index 2 den Index 1 setzt (mit entgegengesetztem Zeichen).

Man erhält auf diese Weise 6 Gleichungen zwischen den 6 Grössen τ_{11}, τ_{12}, τ_{22}, τ'_{11}, τ'_{12}, τ'_{22}, aus denen sich bestimmte Werthe derselben, ausgedrückt durch die ganzen Zahlen ϱ und σ, welche nur die Bedingungsgleichungen (50.) zu befriedigen haben, ergeben würden. Damit würde jedoch das reelle Transformationsproblem, wie wir es uns oben vorgelegt, und in dem zwar c, l, m reell und <1, im Uebrigen aber als beliebig gegeben vorausgesetzt wurden, nicht gelöst sein; es ist vielmehr dazu nothwendig, dass, damit sich für τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} keine bestimmten Werthe ergeben, drei dieser 6 Gleichungen identisch werden. Es müssen also die drei Gleichungen (51.) und die zwei ähnlich gebildeten, oder (52.) und die zwei zugehörigen identisch werden, weil je drei immer denselben Nenner haben und τ'_{11}, τ'_{12}, τ'_{22} sich durch diese Gleichungen aus τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} bestimmen sollen.

§. 5.

Wir ziehen nun den ersten Fall in Betracht, in welchem der Ausdruck (51.) und die zwei ähnlichen für τ'_{12}, τ'_{22}, die wir hier jedoch nicht angeben, identisch werden.

Die nothwendigen Bedingungen dafür sind offenbar folgende:

$$(53.)\quad \begin{cases} \varrho'_{11}\varrho_{22}-\varrho_{21}\varrho'_{12}=0,\\ \varrho'_{11}\varrho_{12}-\varrho_{11}\varrho'_{12}=0,\\ \varrho'_{21}\varrho_{22}-\varrho_{21}\varrho'_{22}=0,\\ \varrho'_{21}\varrho_{12}-\varrho_{11}\varrho'_{22}=0,\end{cases}\qquad (54.)\quad \begin{cases} \sigma'_{11}\sigma_{22}-\sigma_{21}\sigma'_{12}=0,\\ \sigma'_{11}\sigma_{12}-\sigma_{11}\sigma'_{12}=0,\\ \sigma'_{21}\sigma_{22}-\sigma_{21}\sigma'_{22}=0,\\ \sigma'_{21}\sigma_{12}-\sigma_{11}\sigma'_{22}=0,\end{cases}$$

$$(55.)\quad \begin{cases} \varrho_{22}\sigma_{11}-\varrho_{12}\sigma_{21} = 0,\\ \varrho_{22}\sigma_{12}-\varrho_{12}\sigma_{22}=\varrho_{11}\sigma_{21}-\varrho_{21}\sigma_{11} = 0,\\ \varrho_{11}\sigma_{22}-\varrho_{21}\sigma_{12} = 0.\end{cases}$$

Die Untersuchung dieser Gleichungen ergiebt, wenn man darauf achtet, dass die drei andern Ausdrücke für τ'_{11}, τ'_{12}, τ'_{22} nicht identisch verschwinden sollen, nur die beiden Fälle:

$$(56.)\quad \varrho'_{11}=\varrho'_{12}=\varrho'_{21}=\varrho'_{22}=0 \quad\text{und}\quad \sigma_{11}=\sigma_{12}=\sigma_{21}=\sigma_{22}=0$$

oder

$$(57.)\quad \varrho_{11}=\varrho_{12}=\varrho_{21}=\varrho_{22}=0 \quad\text{und}\quad \sigma'_{11}=\sigma'_{12}=\sigma'_{21}=\sigma'_{22}=0.$$

Im ersten Falle erhält man die Ausdrücke:

$$(58.)\quad \tau'_{11} = \frac{m_1 m_2}{m'_1 m'_2}\cdot\frac{\varrho_{22}\sigma'_{11}\tau_{11}+\varrho_{22}\sigma'_{12}\tau_{12}-\varrho_{21}\sigma'_{11}\tau_{21}-\varrho_{21}\sigma'_{12}\tau_{22}}{\varrho_{11}\varrho_{22}-\varrho_{12}\varrho_{21}}$$

und die ähnlich gebildeten für τ'_{12}, τ'_{21}, τ'_{22}, ferner:

$$(59.)\quad \begin{cases} v'_1 = m_1 m_2 \dfrac{(v_1-\varepsilon_1)\varrho_{22}-(v_2-\varepsilon_2)\varrho_{21}}{\varrho_{11}\varrho_{22}-\varrho_{12}\varrho_{21}}, \\ v'_2 = m_1 m_2 \dfrac{-(v_1-\varepsilon_1)\varrho_{12}+(v_2-\varepsilon_2)\varrho_{11}}{\varrho_{11}\varrho_{22}-\varrho_{12}\varrho_{21}}, \end{cases}$$

während die ϱ und σ' den Gleichungen genügen müssen:

$$(59^a.)\quad \begin{cases} \varrho_{12}\sigma'_{11}+\varrho_{22}\sigma'_{21} = 0, \\ \varrho_{11}\sigma'_{12}+\varrho_{21}\sigma'_{22} = 0, \\ \varrho_{11}\sigma'_{11}+\varrho_{21}\sigma'_{21} = n, \\ \varrho_{12}\sigma'_{12}+\varrho_{22}\sigma'_{22} = n, \end{cases}$$

woraus leicht folgt, dass die Coefficienten von τ_{12}, τ_{21} in den Zählern von τ'_{11}, τ'_{22}, τ'_{22} bis auf das Zeichen einander gleich werden.

Die Multiplicatoren α, β, γ, δ sind durch die Gleichungen gegeben

$$(60.)\quad \alpha = \frac{K_{22}(\varrho_{11}C_{11}+\varrho_{12}C_{12})-K_{21}(\varrho_{21}C_{11}+\varrho_{22}C_{12})}{m_1 m_2(K_{11}K_{22}-K_{12}K_{21})},$$

und die ähnlich gebildeten, woraus ersichtlich, dass in diesem Falle die *Multiplicatoren reell sind.*

Im zweiten Falle (57.), erhalten wir für die transformirten Moduln die Ausdrücke

$$(61.)\quad \tau'_{11} = \frac{m_1 m_2}{m'_1 m'_2}\,\frac{-\varrho'_{12}\sigma_{21}\tau_{11}-\varrho'_{12}\sigma_{22}\tau_{12}+\varrho'_{11}\sigma_{21}\tau_{21}+\varrho'_{11}\sigma_{22}\tau_{22}}{(\sigma_{11}\sigma_{22}-\sigma_{12}\sigma_{21})(\tau_{11}\tau_{22}-\tau_{12}\tau_{21})}$$

und die ähnlich gebildeten; die Argumente der transformirten ϑ-Functionen haben die Form:

$$(62.)\quad \begin{cases} v'_1 = m_1 m_2 \dfrac{(v_1-\varepsilon_1)(\sigma_{21}\tau_{21}+\sigma_{22}\tau_{22})-(v_2-\varepsilon_2)(\sigma_{21}\tau_{11}+\sigma_{22}\tau_{12})}{(\sigma_{11}\sigma_{22}-\sigma_{12}\sigma_{21})(\tau_{11}\tau_{22}-\tau_{12}\tau_{21})}, \\ v'_2 = m_1 m_2 \dfrac{-(v_1-\varepsilon_1)(\sigma_{11}\tau_{21}+\sigma_{12}\tau_{22})+(v_2-\varepsilon_2)(\sigma_{11}\tau_{11}+\sigma_{12}\tau_{12})}{(\sigma_{11}\sigma_{22}-c_{12}\sigma_{21})(\tau_{11}\tau_{22}-\tau_{12}\tau_{21})}. \end{cases}$$

während die Zahlen ϱ' und σ die Gleichungen befriedigen müssen:

$$(63.)\quad \begin{cases} \varrho'_{12}\sigma_{11}+\varrho'_{22}\sigma_{21} = 0, \\ \varrho'_{11}\sigma_{12}+\varrho'_{21}\sigma_{22} = 0, \\ \varrho'_{11}\sigma_{11}+\varrho'_{21}\sigma_{21} = n, \\ \varrho'_{12}\sigma_{12}+\varrho'_{22}\sigma_{22} = n. \end{cases}$$

Auch hier sind die Coefficienten von τ_{12}, τ_{21} bis auf das Zeichen einander gleich.

Die Multiplicatoren α, β, γ, δ sind durch die Gleichung bestimmt:

$$(64.)\quad \begin{cases} \alpha = \\ \dfrac{K_{22}((\sigma_{11}\tau_{11}+\sigma_{12}\tau_{12})C_{11}+(\sigma_{11}\tau_{21}+\sigma_{12}\tau_{22})C_{12})-K_{21}((\sigma_{21}\tau_{11}+\sigma_{22}\tau_{12})C_{11}+(\sigma_{21}\tau_{21}+\sigma_{22}\tau_{22})C_{12})}{m_1 m_2(K_{11}K_{22}-K_{12}K_{21})} \end{cases}$$

und die ähnlichen, woraus hervorgeht, dass in diesem Falle *die Multiplicatoren rein imaginär sind.* Wenn also die Gleichung (51.) und die zwei ähnlich gebildeten identisch werden, so finden wir zwei verschiedene Arten von Transformationen, deren wesentlicher Unterschied darin besteht, dass in dem einen Falle die Multiplicatoren reell, im andern rein imaginär sind.

§. 6.

Eine genauere Untersuchung erfordert die Annahme, dass die Gleichung (52.) mit ihren zwei ähnlich gebildeten identisch werde, oder dass:

$$(65.)\quad \begin{cases} \varrho_{22}\sigma'_{11}-\varrho'_{12}\sigma_{21} = 0, \\ \varrho_{22}\sigma'_{12}-\varrho'_{12}\sigma_{22}+\varrho'_{11}\sigma_{21}-\varrho_{21}\sigma'_{11} = 0, \\ \varrho'_{11}\sigma_{22}-\varrho_{21}\sigma'_{12} = 0, \end{cases}$$

$$(66.)\quad \begin{cases} \varrho_{12}\sigma'_{11}-\varrho'_{12}\sigma_{11} = 0, \\ \varrho_{12}\sigma'_{12}-\varrho'_{12}\sigma_{12}+\varrho'_{11}\sigma_{11}-\varrho_{11}\sigma'_{11} = 0, \\ \varrho'_{11}\sigma_{12}-\varrho_{11}\sigma'_{12} = 0, \end{cases}$$

$$(67.)\quad \begin{cases} \varrho_{22}\sigma'_{21}-\varrho'_{22}\sigma_{21} = 0, \\ \varrho_{22}\sigma'_{22}-\varrho'_{22}\sigma_{22}+\varrho'_{21}\sigma_{21}-\varrho_{21}\sigma'_{21} = 0, \\ \varrho'_{21}\sigma_{22}-\varrho_{21}\sigma'_{22} = 0, \end{cases}$$

$$(68.)\quad \begin{cases} \varrho_{12}\sigma'_{21}-\varrho'_{22}\sigma_{11} = 0, \\ \varrho_{12}\sigma'_{22}-\varrho'_{22}\sigma_{12}+\varrho'_{21}\sigma_{11}-\varrho_{11}\sigma'_{21} = 0, \\ \varrho'_{21}\sigma_{12}-\varrho_{11}\sigma'_{22} = 0, \end{cases}$$

$$(69.)\quad \begin{cases} \varrho_{11}\varrho_{22}-\varrho_{21}\varrho_{12} = 0, \\ \sigma_{11}\sigma_{22}-\sigma_{12}\sigma_{21} = 0. \end{cases}$$

Aus den beiden ersten Gleichungen von (65.) und (66.) geht hervor, dass

entweder $\sigma'_{11} = 0$ und $\varrho'_{12} = 0$ oder $\varrho_{22}\sigma_{11} - \varrho_{12}\sigma_{21} = 0$ ist,

ferner aus den beiden letzten Gleichungen von (65.) und (66.), dass

entweder $\sigma'_{12} = 0$ und $\varrho'_{11} = 0$ oder $\varrho_{11}\sigma_{22} - \varrho_{21}\sigma_{12} = 0$ ist.

Da nun nicht zu gleicher Zeit $\sigma'_{11} = 0$, $\sigma'_{12} = 0$, $\varrho'_{11} = 0$, $\varrho'_{12} = 0$ sein kann, weil dann der Zähler von τ'_{11} in (51.) identisch Null würde, so können, wie aus den beiden anderen Bedingungen hervorgeht, in den Nennern der Ausdrücke von τ'_{11}, τ'_{12}, τ'_{22} nicht τ_{11} und τ_{22} zu gleicher Zeit vorkommen. Es möge nun τ_{22} herausfallen, so dass die Bedingungen gelten:

$$(70.)\qquad \sigma'_{11} = 0, \quad \varrho'_{12} = 0, \quad \varrho_{11}\sigma_{22} - \varrho_{21}\sigma_{12} = 0.$$

Die zweiten Gleichungen von (65.) und (66.) gehen dann über in:

$$\varrho_{22}\sigma'_{12} + \varrho'_{11}\sigma_{21} = 0,$$
$$\varrho_{12}\sigma'_{12} + \varrho'_{11}\sigma_{11} = 0,$$

woraus

entweder $\varrho'_{11} = 0$ und $\sigma'_{12} = 0$ oder $\varrho_{22}\sigma_{11} - \varrho_{12}\sigma_{21} = 0$ folgt,

und da die ersten Bedingungen den Zähler von τ'_{11} zu Null machen würden, so bleibt nur

$$(71.)\qquad \varrho_{22}\sigma_{11} - \varrho_{12}\sigma_{21} = 0,$$

mit anderen Worten, es verschwindet auch τ_{11} aus dem Nenner von (51.).

Da nun nach (69.)

$$\varrho_{22}\varrho_{11} - \varrho_{12}\varrho_{21} = 0,$$

so folgt wieder

(72.) entweder $\varrho_{22} = 0$ und $\varrho_{12} = 0$ oder $\sigma_{11}\varrho_{21} - \varrho_{11}\sigma_{21} = 0$,

d. h. es fällt entweder τ_{12} oder τ_{21} aus dem Nenner heraus.

Da aber auch $\sigma_{22}\sigma_{11} - \sigma_{12}\sigma_{21} = 0$ sein soll, so ergiebt sich

(73.) entweder $\sigma_{11} = 0$ und $\sigma_{21} = 0$ oder $\varrho_{22}\sigma_{12} - \varrho_{12}\sigma_{22} = 0$,

woraus in Verbindung mit (72.) nothwendig folgt, dass:

(74.) entweder $\sigma_{11} = 0$, $\sigma_{21} = 0$,

(75.) oder $\varrho_{12} = 0$, $\varrho_{22} = 0$.

Es würden sich also zwei Fälle ergeben, welche durch folgende Bedingungsgleichungen bestimmt sind:

$$\text{I.}\ \begin{cases} \sigma'_{11} = 0, \quad \varrho'_{12} = 0, \\ \varrho_{11}\sigma_{22} - \varrho_{21}\sigma_{12} = 0, \\ \sigma_{11} = 0, \quad \sigma_{21} = 0, \end{cases} \qquad \text{II.}\ \begin{cases} \sigma'_{11} = 0, \quad \varrho'_{12} = 0, \\ \varrho_{11}\sigma_{22} - \varrho_{21}\sigma_{12} = 0, \\ \varrho_{12} = 0, \quad \varrho_{22} = 0. \end{cases}$$

Für die erste dieser beiden Annahmen folgt aus (50.):

$$\sigma_{22}\sigma'_{21} = 0, \qquad \varrho_{22}\sigma'_{21} = 0,$$

also entweder

$$\sigma'_{21} = 0 \quad \text{oder} \quad \sigma_{22} = \varrho_{22} = 0.$$

Da aber die letzte Annahme den Zähler in (51.) zu Null machen würde, so muss $\sigma'_{21} = 0$ sein. Nun ist ferner nach den zweiten Gleichungen (65.) und (66.)

$$\varrho_{22}\sigma'_{12} = 0, \qquad \varrho_{12}\sigma'_{12} = 0,$$

woraus ähnlich wie oben $\sigma'_{12} = 0$ folgt.

Benutzen wir endlich die dritten Gleichungen in (65.) und (66.), so ergeben sich die Bedingungen:

$$\varrho'_{11}\sigma_{22} = 0, \qquad \varrho'_{11}\sigma_{12} = 0,$$

welche, da $\sigma_{12} = 0$ und $\sigma_{22} = 0$ wegen des Verschwindens des Nenners unstatthaft ist, in $\varrho'_{11} = 0$ übergehen.

Genau in derselben Weise würden sich in dem Falle II. noch die Bedingungen hinzufügen lassen:

$$\varrho'_{22} = 0, \qquad \varrho'_{11} = 0, \qquad \sigma'_{12} = 0.$$

Stellt man die erhaltenen Bedingungen in jedem dieser beiden Fälle für sich zusammen, so sieht man, dass sie, da der Zähler von (51.) verschwindet, unvereinbar sind; es ist also unmöglich für den Fall, dass τ_{22} aus dem Nenner herausfällt, die in den Gleichungen (65.) bis (69.) gestellten Bedingungen zu befriedigen. Zu demselben Resultate gelangt man auch bei der Annahme, dass τ_{11} aus dem Nenner verschwindet, d. h. dass die Bedingungen gelten: $\sigma'_{12} = 0$, $\varrho'_{11} = 0$, $\varrho_{22}\sigma_{11} - \varrho_{12}\sigma_{21} = 0$. Nimmt man endlich den letzten noch möglichen Fall, dass die beiden Gleichungen stattfinden:

$$\varrho_{22}\sigma_{11} - \varrho_{12}\sigma_{21} = 0 \quad \text{und} \quad \varrho_{11}\sigma_{22} - \varrho_{21}\sigma_{12} = 0,$$

so gelangt man genau auf demselben Wege zur Ueberzeugung, dass die Bedingungen (64.) bis (69.) nicht befriedigt werden können.

Es ist somit nachgewiesen, dass die Ausdrücke (52.) und die beiden ähnlich gebildeten nicht identisch verschwinden können, ohne auch die Ausdrücke (51.) unbestimmt zu machen, ein Resultat, das von dem in der Theorie der elliptischen Functionen bestehenden abweicht, für welche *Abel* bekanntlich bewiesen hat, dass sich der den Gleichungen (52.) entsprechende Ausdruck identisch Null machen lässt, ohne den der Gleichung (51.) analogen verschwinden zu lassen, in welchem Falle sich eine Transformation der elliptischen Functionen mit rein imaginärem Multiplicator ergiebt.

Es sind also die beiden angegebenen Fälle die einzigen, in welchen eine algebraische Transformation existirt, welche ein *Abel*sches System mit den beliebig gegebenen Grössen c, l, m, die nur reell und < 1 sein müssen, auf ein ähnliches System zurückführt. Sind jedoch nicht drei Gleichungen der Systeme (51.) und (52.) identisch, sondern eine geringere Anzahl, was natürlich nie bei zwei Gleichungen aus verschiedenen Systemen stattfinden kann, so können noch andere Transformationen als die oben angegebenen existiren, wobei jedoch zu bemerken ist, dass dann das gegebene System kein willkürliches mehr ist, sondern die Moduln τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} oder auch c, l, m gewissen Bedingungen unterliegen werden. Sind nämlich zwei Gleichungen des Systems (51.) identisch, so werden die τ der Bedingung genügen müssen, dass $\tau_{11}.\tau_{22}-\tau_{12}^2$ eine rationale Zahl ist, während, wenn zwei Gleichungen des Systems (52.) identisch Null werden, eine ganzzahlige Relation unter den τ des gegebenen Systems von der Form $A\tau_{11}+B\tau_{12}+C\tau_{22}=0$ bestehen muss; in beiden Fällen können noch algebraische Transformationen existiren, die im Allgemeinen complexe Multiplicatoren liefern werden. Ist nur eine Gleichung der beiden Systeme identisch, so wird für das erste System die frühere Bedingung bestehen bleiben, für das zweite noch die Bedingung hinzutreten, dass die Quotienten der τ im Allgemeinen rationale Zahlen sein müssen. Bestehen endlich alle 6 Gleichungen (51.), (52.) zu gleicher Zeit, so erhält man für die Moduln τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} Zahlenformen, die noch eine unendliche Reihe von Werthen für dieselben zulassen, deren Untersuchung jedoch in dem allgemeinen Falle der Transformation kein hervorragendes Interesse hat.

§. 7.

Von besonderer Wichtigkeit ist der Fall des allgemeinen Transformationsproblems, in dem man voraussetzt, dass c, l, m, $\varkappa$, λ, μ respective einander gleich sein sollen, mit anderen Worten die Lösung der Aufgabe, alle möglichen Fälle zu finden, in denen das System von Differentialgleichungen:

$$(76.)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}}+\dfrac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} = \dfrac{(\alpha+\beta y_1)dy_1}{\sqrt{R(y_1)}}+\dfrac{(\alpha+\beta y_2)dy_2}{\sqrt{R(y_2)}}, \\ \dfrac{x_1dx_1}{\sqrt{R(x_1)}}+\dfrac{x_2dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} = \dfrac{(\gamma+\delta y_1)dy_1}{\sqrt{R(y_1)}}+\dfrac{(\gamma+\delta y_2)dy_2}{\sqrt{R(y_2)}} \end{cases}$$

algebraisch integrirbar ist, wenn

$$R(x) = x(1-x)(1-c^2x)(1-l^2x)(1-m^2x),$$

und c, l, m reell und < 1 sind. Es ist dies der Fall der Multiplication. —

Was vor allen Dingen die für die Multiplication nothwendigen Bedingungen betrifft, so sieht man leicht, dass die Gleichungen (41.) bis (44.) bestehen bleiben, mit der einen Veränderung, dass wegen der Gleichheit der c, l, m, und $\varkappa$, λ, μ an Stelle der K und K' die C und C' gesetzt werden. Es werden also mit dieser Veränderung auch die Ausdrücke für die Multiplicatoren α, β, γ, δ (47.), so wie die Werthe der neuen Argumente der ϑ-Functionen (48.) dieselben bleiben, während mit Beibehaltung der oben definirten Zahlen m, n die Gleichungen (46.), in denen $\tau'_{11} = \tau_{11}$, $\tau'_{12} = \tau_{12}$, $\tau'_{22} = \tau_{22}$ zu setzen ist, durch Zerlegung in den reellen und imaginären Theil die folgenden Relationen zwischen τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} liefern:

$$(77.)\quad \begin{cases} \tau_{11} = \\ \dfrac{m_1 m_2}{m'_1 m'_2} \dfrac{\varrho'_{11}\varrho_{22} - \varrho_{21}\varrho'_{12} + (\sigma'_{11}\sigma_{22} - \sigma_{21}\sigma'_{12})(\tau_{11}\tau_{22} - \tau_{12}\tau_{21})}{(\varrho_{22}\sigma_{11} - \varrho_{12}\sigma_{21})\tau_{11} + (\varrho_{22}\sigma_{12} - \varrho_{12}\sigma_{22})\tau_{12} + (\varrho_{11}\sigma_{21} - \varrho_{21}\sigma_{11})\tau_{21} + (\varrho_{11}\sigma_{22} - \varrho_{21}\sigma_{12})\tau_{22}}, \\ \tau_{11} = \\ \dfrac{m_1 m_2}{m'_1 m'_2} \dfrac{(\varrho_{22}\sigma'_{11} - \varrho'_{12}\sigma_{21})\tau_{11} + (\varrho_{22}\sigma'_{12} - \varrho'_{12}\sigma_{22})\tau_{12} + (\varrho'_{11}\sigma_{21} - \varrho_{21}\sigma'_{11})\tau_{21} + (\varrho'_{11}\sigma_{22} - \varrho_{21}\sigma'_{12})\tau_{22}}{(\varrho_{11}\varrho_{22} - \varrho_{12}\varrho_{21}) + (\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}\sigma_{21})(\tau_{11}\tau_{22} - \tau_{12}\tau_{21})} \end{cases}$$

und die ähnlich gebildeten für τ_{12}, τ_{21}, τ_{22}, welche man durch Vertauschung der Indices in den ϱ, σ, ϱ' σ' auf die am Ende des §. 4 angegebene Weise erhält. Die oben in den Gleichungen (50.) gefundenen Bedingungen endlich müssen fürs Erste durch folgende zwei Gleichungen ersetzt werden, welche man durch die Relation $\tau_{12} = \tau_{21}$ und Absonderung des reellen und imaginären Theils erhält:

$$(78.)\quad \begin{cases} \varrho'_{11}\varrho_{12} - \varrho_{11}\varrho'_{12} + \varrho'_{21}\varrho_{22} - \varrho_{21}\varrho'_{22} + (\sigma'_{11}\sigma_{12} - \sigma_{11}\sigma'_{12} + \sigma'_{21}\sigma_{22} - \sigma_{21}\sigma'_{22})(\tau_{11}\tau_{22} - \tau_{12}\tau_{21}) = 0, \\ \quad (\varrho_{12}\sigma'_{11} - \varrho'_{12}\sigma_{11} + \varrho_{22}\sigma'_{21} - \varrho'_{22}\sigma_{21})\tau_{11} + (\varrho_{12}\sigma'_{12} - \varrho'_{12}\sigma_{12} + \varrho_{22}\sigma'_{22} - \varrho'_{22}\sigma_{22})\tau_{12} \\ + (\varrho'_{11}\sigma_{11} - \varrho_{11}\sigma'_{11} + \varrho'_{21}\sigma_{21} - \varrho_{21}\sigma'_{21})\tau_{21} + (\varrho'_{11}\sigma_{12} - \varrho_{11}\sigma'_{12} + \varrho'_{21}\sigma_{22} - \varrho_{21}\sigma'_{22})\tau_{22} = 0. \end{cases}$$

Soll nun die Multiplication für beliebig gewählte c, l, m also auch τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} stattfinden, nur mit der Beschränkung, dass c, l, m reell und < 1 sind, so müsen die 6 Gleichungen, welche durch (77.) und die 4 ähnlich gebildeten dargestellt werden, identisch sein, in welchem Falle die folgenden Bedingungen erfüllt sein müssen:

Was die Bestimmung der Werthe der Multiplicatoren α, β, γ, δ in diesem Falle betrifft, so ergeben die Formeln (60.) und die drei ähnlich gebildeten:

$$\alpha = \frac{\varrho_{11}}{m_1 m_2}, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \delta = \frac{\varrho_{11}}{m_1 m_2},$$

oder da

$$\varrho_{11} = \sqrt{\frac{n m_1 m_2}{m'_1 m'_2}}, \quad \text{also} \quad \frac{\varrho_{11}}{m_1 m_2} = \sqrt{\frac{n}{m_1 m_2 m'_1 m'_2}} = \frac{k}{m'_1 m'_2},$$

wenn

$$\frac{n m'_1 m'_2}{m_1 m_2} = k^2$$

gesetzt wird, die Werthe:

$$\alpha = \frac{k}{m'_1 m'_2}, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \delta = \frac{k}{m'_1 m'_2},$$

wobei hervorzuheben ist, dass α und δ einander gleich und rationale Zahlen sind.

Wir haben nun noch den zweiten Fall zu untersuchen, in welchem die Gleichungen gelten:

$$\varrho_{11} = \varrho_{12} = \varrho_{21} = \varrho_{22} = 0, \quad \sigma'_{11} = \sigma'_{12} = \sigma'_{21} = \sigma'_{22} = 0,$$

und der, wie wir wissen, eine algebraische Transformation für beliebig angenommene c, l, m (reell und < 1) mit imaginären Multiplicatoren lieferte. Man überzeugt sich jedoch leicht, dass hier die für die Multiplication nothwendigen Bedingungsgleichungen (80.), (81.) nicht erfüllt werden können. Man erhält nämlich mit Benutzung von (63.):

$$\begin{array}{lll} \varrho'_{11}\sigma_{22} = 0, & \varrho'_{22}\sigma_{11} = 0, & \varrho'_{12}\sigma_{21} = 0, \\ \varrho'_{12}\sigma_{11} = 0, & \varrho'_{21}\sigma_{22} = 0, & \varrho'_{21}\sigma_{12} = 0, \\ \varrho'_{11}\sigma_{12} = 0, & \varrho'_{22}\sigma_{21} = 0, & \end{array}$$

welche den letzten beiden Gleichungen von (63.) widersprechen.

Von den beiden möglichen Fällen liefert also nur der erste für beliebige c, l, m eine Lösung des Multiplicationsproblems und wir gelangen somit zu einem dem *Abel*schen Satze in der Theorie der elliptischen Transcendenten analogen Theorem:

Das System von Differentialgleichungen:

$$\frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} = \frac{(\alpha+\beta y_1)\,dy_1}{\sqrt{R(y_1)}} + \frac{(\alpha+\beta y_2)\,dy_2}{\sqrt{R(y_2)}},$$

$$\frac{x_1\,dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{x_2\,dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} = \frac{(\gamma+\delta y_1)\,dy_1}{\sqrt{R(y_1)}} + \frac{(\gamma+\delta y_2)\,dy_2}{\sqrt{R(y_2)}},$$

in welchem

$$R(x) = x(1-x)(1-c^2x)(1-l^2x)(1-m^2x),$$

und die Grössen c, l, m reell, <1, aber sonst beliebig vorausgesetzt werden, ist dann und nur dann algebraisch lösbar, wenn β und $\gamma = 0$, $\alpha = \delta$ rationale Zahlen sind, oder wenn das System die Gestalt annimmt:

$$\frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} = \alpha\left(\frac{dy_1}{\sqrt{R(y_1)}} + \frac{dy_2}{\sqrt{R(y_2)}}\right),$$

$$\frac{x_1 dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{x_2 dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} = \alpha\left(\frac{y_1 dy_1}{\sqrt{R(y_1)}} + \frac{y_2 dy_2}{\sqrt{R(y_2)}}\right).$$

Wenn jedoch die Moduln τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} gewissen Bedingungen genügen, so ist nicht nur eine solche reelle und rationale Multiplication möglich, sondern es kann dann auch eine complexe Multiplication stattfinden. Wir behalten uns eine genaue Untersuchung der verschiedenen Fälle, in denen nicht alle sechs Gleichungen (77.) identisch werden, für eine andere Gelegenheit vor und wollen hier nur noch mit wenigen Worten den Fall berühren, der uns zwar eine allgemeine Transformation mit rein imaginären Multiplicatoren lieferte, die Bedingungen der Multiplication jedoch für beliebige τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} nicht befriedigen konnte. Die für diesen Fall gültigen Gleichungen:

$$\varrho_{11} = \varrho_{12} = \varrho_{21} = \varrho_{22} = \sigma'_{11} = \sigma'_{12} = \sigma'_{21} = \sigma'_{22} = 0$$

machen die erste der Gleichungen (77.) und die beiden zugehörigen für τ_{12}, τ_{22} identisch, und es werden also die zweite der Gleichungen (77.) und die analogen die Bedingungen liefern, denen die τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} genügen müssen, damit die Transformation in eine Multiplication übergeht.

Nun gelten für die Transformation eines *Abel*schen Systems mit reellen Moduln in ein eben solches ausser den oben angegebenen Ausdrücken (51.) und (52.) noch die beiden folgenden:

$$\tau'_{11}.\tau'_{22} - \tau'_{12}.\tau'_{21} =$$

$$\left(\frac{m_1 m_2}{m'_1 m'_2}\right)^2 \frac{(\varrho'_{11}\varrho'_{22} - \varrho'_{21}\varrho'_{12}) + (\sigma'_{11}\sigma'_{22} - \sigma'_{21}\sigma'_{12})(\tau_{11}\tau_{22} - \tau_{12}\tau_{21})}{(\varrho_{11}\varrho_{22} - \varrho_{21}\varrho_{12}) + (\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{21}\sigma_{12})(\tau_{11}\tau_{22} - \tau_{12}\tau_{21})},$$

$$\tau'_{11}.\tau'_{22} - \tau'_{12}.\tau'_{21} =$$

$$\left(\frac{m_1 m_2}{m'_1 m'_2}\right)^2 \frac{(\varrho'_{22}\sigma'_{11} - \varrho'_{12}\sigma'_{21})\tau_{11} + (\sigma'_{12}\varrho'_{22} + \sigma'_{21}\varrho'_{11} - \varrho'_{12}\sigma'_{22} - \sigma'_{11}\varrho'_{21})\tau_{12} + (\varrho'_{11}\sigma'_{22} - \varrho'_{21}\sigma'_{12})\tau_{22}}{(\varrho_{22}\sigma_{11} - \varrho_{12}\sigma_{21})\tau_{11} + (\sigma_{12}\varrho_{22} + \sigma_{21}\varrho_{11} - \varrho_{12}\sigma_{22} - \sigma_{11}\varrho_{21})\tau_{12} + (\varrho_{11}\sigma_{22} - \varrho_{21}\sigma_{12})\tau_{22}},$$

und man sieht leicht, dass in dem hier betrachteten Falle sich die Grösse $\tau_{11}\tau_{22} - \tau_{12}\tau_{21}$ als Quadratwurzel aus einer rationalen Zahl darstellt. Betrachtet

und ferner die drei Gleichungen (61.), denen die τ genügen müssen, und setzt sich für $\tau_{11}\tau_{22}-\tau_{12}\tau_{21}$ seinen Werth $=\frac{m_1.m_2}{m'_1.m'_2}\cdot\sqrt{\frac{\varrho'_{11}\varrho'_{22}-\varrho'_{12}\varrho'_{21}}{\sigma_{11}\sigma_{22}-\sigma_{12}\sigma_{21}}}$ eingesetzt, so erkennt man leicht, dass, weil sich die ganzzahligen Werthe der ϱ' und σ so wählen lassen, dass den in den Gleichungen (63.) ausgesprochenen Bedingungen Genüge geschieht, sich für die Quotienten der τ Zahlen von der Form $k-\sqrt{k'}$ ergeben, wo k und k' rationale Zahlen sind, woraus wiederum die τ selbst als Zahlen von der Gestalt $\sqrt{m}+\sqrt{m'}$ hervorgehen, in denen m und m' rationale Zahlen bedeuten. Ich füge noch die Bemerkung hinzu, dass die Multiplicatoren in diesem Falle rein imaginär sind, und wir also auf diese Weise einen Fall der rein imaginären Multiplication erhalten haben, in welchem die Zahlen τ von der Form $\sqrt{m}-\sqrt{m'}$ gefunden wurden.

Greifswald, 1865.

Die Geometrie auf den Flächen dritter Ordnung.

(Von Herrn *A. Clebsch* zu Giessen.)

---

§. 1.

Abbildung der Fläche dritter Ordnung auf der Ebene.

Die bekannte Thatsache, dass die allgemeinste Fläche dritter Ordnung der Ort des Durchschnitts dreier projectivischen Ebenenbündel ist*), führt auf eine Abbildung der Flächen dritter Ordnung auf einer Ebene, welche Herrn *Chasles'* Abbildung des Hyperboloids ganz analog ist. Sind $\varkappa$, λ, μ Parameter, a, a', a'', b, ... lineare Ausdrücke in den Raumcoordinaten x_1, x_2, x_3, x_4, so sind die Gleichungen allgemeiner projectivischer Ebenenbündel:

$$(1.)\quad \begin{cases} \varkappa a + \lambda b + \mu c = 0, \\ \varkappa a' + \lambda b' + \mu c' = 0, \\ \varkappa a'' + \lambda b'' + \mu c'' = 0. \end{cases}$$

Eliminirt man hieraus $\varkappa$, λ, μ, so erhält man die Gleichung der Fläche dritter Ordnung:

$$\Sigma \pm ab'c'' = 0;$$

man kann aber statt dessen aus den Gleichungen (1.) die Verhältnisse der x als Functionen von $\varkappa$, λ, μ ausdrücken, und findet

$$(2.)\quad \begin{cases} \varrho x_1 = f_1(\varkappa, \lambda, \mu), \quad \varrho x_2 = f_2(\varkappa, \lambda, \mu), \\ \varrho x_3 = f_3(\varkappa, \lambda, \mu), \quad \varrho x_4 = f_4(\varkappa, \lambda, \mu), \end{cases}$$

wo ϱ ein unbestimmter Factor ist, und die Functionen f homogene Functionen dritter Ordnung sind. Betrachten wir nun $\varkappa$, λ, μ als Coordinaten eines Punktes einer Ebene, so entspricht jedem Punkte der Ebene ein Punkt des Raums und umgekehrt; und zwar tritt letzteres ausnahmslos ein, während für ersteres einzelne Ausnahmen stattfinden. In der That nämlich geben die Gleichungen (1.) nur dann bestimmte Verhältnisse der x, wenn von denselben nicht eine eine Folge der anderen wird. Setzen wir

$$a = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4$$

und ähnlich bei den anderen linearen Ausdrücken, so werden die Gleichun-

---

*) Vgl. hierüber *Schröter*, Bd. 62, p. 265 dieses Journals.

gen (1.) nach den x geordnet:

$$\Sigma(\varkappa a_i + \lambda b_i + \mu c_i) x_i = 0,$$
$$\Sigma(\varkappa a'_i + \lambda b'_i + \mu c'_i) x_i = 0,$$
$$\Sigma(\varkappa a''_i + \lambda b''_i + \mu c''_i) x_i = 0,$$

und für diese Ausnahmswerthe von $\varkappa$, λ, μ, für welche keine bestimmten Werthe der x erhalten werden, müssen die aus dem unvollständigem System

$$\begin{vmatrix} \varkappa a_1 + \lambda b_1 + \mu c_1 & \varkappa a_2 + \lambda b_2 + \mu c_2 & \varkappa a_3 + \lambda b_3 + \mu c_3 & \varkappa a_4 + \lambda b_4 + \mu c_4 \\ \varkappa a'_1 + \lambda b'_1 + \mu c'_1 & \varkappa a'_2 + \lambda b'_2 + \mu c'_2 & \varkappa a'_3 + \lambda b'_3 + \mu c'_3 & \varkappa a'_4 + \lambda b'_4 + \mu c'_4 \\ \varkappa a''_1 + \lambda b''_1 + \mu c''_1 & \varkappa a''_2 + \lambda b''_2 + \mu c''_2 & \varkappa a''_3 + \lambda b''_3 + \mu c''_3 & \varkappa a''_4 + \lambda b''_4 + \mu c''_4 \end{vmatrix}$$

gebildeten Unterdeterminanten gleichzeitig verschwinden. Diese sind nichts anderes als die Functionen f_i selbst; es müssen also für solche Werthe die Gleichungen

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 0, \quad f_4 = 0$$

zusammenbestehen. Nun schneiden sich die Curven $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ in neun Punkten $\varkappa$, λ, μ, und für dieselben ist, da die Functionen f, statt der x in (1.) gesetzt, diese Gleichungen identisch erfüllen:

$$(\varkappa a_3 + \lambda b_3 + \mu c_3) f_3 + (\varkappa a_4 + \lambda b_4 + \mu c_4) f_4 = 0,$$
$$(\varkappa a'_3 + \varkappa b'_3 + \mu c'_3) f_3 + (\varkappa a'_4 + \lambda b'_4 + \mu c'_4) f_4 = 0,$$
$$(\varkappa a''_3 + \varkappa b''_3 + \mu c''_3) f_3 + (\varkappa a''_4 + \lambda b''_4 + \mu c''_4) f_4 = 0.$$

Es ist also entweder auch $f_3 = 0$, $f_4 = 0$, oder

$$0 = \begin{vmatrix} a_3 f_3 + a_4 f_4 & b_3 f_3 + b_4 f_4 & c_3 f_3 + c_4 f_4 \\ a'_3 f_3 + a'_4 f_4 & b'_3 f_3 + b'_4 f_4 & c'_3 f_3 + c'_4 f_4 \\ a''_3 f_3 + a''_4 f_4 & b''_3 f_3 + b''_4 f_4 & c''_3 f_3 + c''_4 f_4 \end{vmatrix}$$

Die Gleichung ist cubisch für $\frac{f_3}{f_4}$, und giebt also drei Schnittpunkte von $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, für welche nicht auch $f_3 = 0$, $f_4 = 0$, während für die übrigen sechs Schnittpunkte alle Functionen f gleichzeitig verschwinden.

Die hier zu betrachtenden Functionen f sind also dadurch charakterisirt, dass die Curven $f_i = 0$ sechs Schnittpunkte gemeinsam haben. Ich werde zeigen, dass diese Bedingung hinreicht, um auf die Gleichungen (1.) immer zurückzuführen. Man kann, wenn eine Gerade

$$A_1 = \varkappa a_1 + \lambda b_1 + \mu c_1 = 0$$

gegeben ist, immer drei andere Geraden, und zwar nur auf *eine* Art, so be-

stimmen, dass

$$(3.)\quad A_1 f_1 + A_2 f_2 + A_3 f_3 + A_4 f_4 = 0.$$

Die beiden Curven vierter Ordnung nämlich:

$$A_1 f_1 = 0, \quad A_2 f_2 + A_3 f_3 + A_4 f_4 = 0,$$

von denen die erste vollständig gegeben ist, haben erstlich die sechs Punkte gemein, in welchen die vier Curven f_i sich schneiden. Die zweite Curve aber enthält noch acht Constanten, die man so bestimmen kann, dass beide Curven acht beliebig gewählte weitere Punkte gemein haben. Beide Curven haben also vierzehn Punkte gemein, und müssen daher ganz übereinstimmen. Die Functionen A sind dadurch bis auf einen Factor bestimmt, und dieser endlich lässt sich so einrichten, dass die Gleichung (3.) eine identische wird.

Nimmt man zwei andere Gerade $B_1 = 0$, $C_1 = 0$, so kann man zwei ähnliche Identitäten aufstellen:

$$(4.)\quad \begin{cases} B_1 f_1 + B_2 f_2 + B_3 f_3 + B_4 f_4 = 0, \\ C_1 f_1 + C_2 f_2 + C_3 f_3 + C_4 f_4 = 0. \end{cases}$$

Jede vierte Gleichung analoger Natur muss sich aus diesen zusammensetzen, da jede vierte Gerade sich aus A_1, B_1, C_1 linear zusammensetzt. Schreibt man aber in (3.), (4.) wieder x_i statt f_i, so hat man die Gleichungen (1.) wiederum vor sich.

Jedem Punkt der Ebene entspricht also im Allgemeinen ein Punkt der Fläche und umgekehrt; ausgenommen sind davon nur sechs Punkte der Ebene, denen nicht Punkte der Fläche entsprechen, sondern Gerade, indem für die entsprechenden Werthe x, λ, μ sich die Gleichungen (1.) auf nur zwei reduciren.

Die sechs Geraden der Fläche, welche hier fundamental auftreten, (dieselben, welche Herr *Schröter* l. c. zunächst nachweist) bilden die eine Hälfte einer *Schläfli*schen Doppelsechs; und da jede Abbildung der Fläche nach dem hier angegebenen Princip auf ein solches System von Geraden basirt, so giebt es im Ganzen 72 verschiedene Arten die Fläche so abzubilden, deren zwei conjugirt sind, indem ihre Fundamentalgeraden zusammen eine Doppelsechs bilden.

§. 2.

Gegenseitiges Entsprechen von ebenen Curven und Raumcurven.

Untersuchen wir nun die ebenen Curven, welche gegebenen Raumcurven entsprechen, und umgekehrt.

Der vollständige Durchschnitt der Fläche dritter Ordnung mit einer Fläche n^{ter} Ordnung ist eine Raumcurve $3n^{ter}$ Ordnung. Da wir nun durch die Gleichungen (2.) die Fläche dritter Ordnung ersetzen, so erhalten wir, wenn

$$\varphi = 0$$

die Gleichung der Fläche n^{ter} Ordnung ist, die Punkte der Schnittcurve, sobald wir in φ für die x die Functionen f einsetzen. Die Gleichung $\varphi = 0$ geht dadurch in die Gleichung der der Raumcurve entsprechenden ebenen Curve über:

$$\varphi(f_1, f_2, f_3, f_4) = 0,$$

welche ebenfalls von der $3n^{ten}$ Ordnung ist. Die sechs Werthsysteme, für welche alle f verschwinden, machen φ zu Null in der n^{ten} Ordnung; die sechs Fundamentalpunkte der Ebene sind also $n$fache Punkte der Ebene, den n Punkten entsprechend, in denen die Fläche $\varphi = 0$ von der betreffenden Fundamentalgeraden getroffen wird. Man hat also den Satz:

Die Abbildung des Durchschnitts der Fläche dritter Ordnung mit einer Fläche n^{ter} Ordnung ist eine Curve $3n^{ter}$ Ordnung, welche in jedem der sechs Fundamentalpunkte einen $n$fachen Punkt besitzt.

So entspricht also dem ebenen Schnitt der Fläche dritter Ordnung eine Curve dritter Ordnung, welche durch die sechs Fundamentalpunkte geht; dem Schnitt der Fläche mit einer Fläche zweiter Ordnung eine Curve sechster Ordnung, welche die sechs Punkte zu Doppelpunkten hat, dem Schnitt der Fläche mit einer anderen Fläche dritter Ordnung eine Curve neunter Ordnung, welche die sechs Punkte zu dreifachen Punkten hat, u. s. w.

Untersuchen wir nun aber, welche Raumcurve einer beliebigen Curve n^{ter} Ordnung in der Ebene entspricht. Diese Curve der Ebene mag ausserhalb der sechs Fundamentalpunkte d Doppelpunkte und r Rückkehrpunkte besitzen; die sechs Punkte selbst seien bezüglich $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_6$fache Punkte der ebenen Curve; wobei nur der Einfachheit wegen vorausgesetzt werden mag, dass die Tangenten der Zweige eines solchen vielfachen Punktes sämmtlich verschieden seien.

Die Ordnung N der entsprechenden Raumcurve ist die Zahl ihrer Durchschnittspunkte mit einer Ebene, oder mit der ebenen Curve dritter Ordnung, in welcher eine Ebene die Fläche dritter Ordnung schneidet. Diesen entsprechen die Schnittpunkte ihres Bildes mit einer durch die sechs Fundamentalpunkte gehenden Curve dritter Ordnung; aber dabei sind die Schnittpunkte auszuschliessen, welche in die sechs Punkte selbst fallen, da diese

keine Schnittpunkte anzeigen, sondern sich nur auf die Begegnung der beiden Raumcurven mit den sechs Fundamentalgeraden beziehen.

Die Anzahl sämmtlicher Schnittpunkte der beiden ebenen Curven ist $3n$; daher nach Abzug der in die sechs Punkte fallenden Schnittpunkte:

$$(5.)\qquad N = 3n - \Sigma\alpha_i.$$

Die Anzahl von Tangentenebenen, welche von einer Geraden im Raum an die Curve geführt werden können (Rang R), kann man auf folgende Weise bestimmen. Denken wir uns eine beliebige Gerade, welche die Fläche dritter Ordnung in drei Punkten schneidet. Das durch sie gelegte Ebenenbüschel schneidet die Fläche in Curven dritter Ordnung, welche jene drei Punkte gemeinsam haben. Diesem System entspricht in der Ebene ein Büschel von Curven dritter Ordnung, welche ausser den sechs Fundamentalpunkten noch drei andere Punkte gemeinsam haben. Die Frage nach der Anzahl von Ebenen des Büschels, welche die Raumcurve berühren, kommt also zurück auf die Frage nach der Anzahl von Curven des ebenen Büschels, welche die gegebene Curve n^{ter} Ordnung berühren. Sind also, um diese Zahl zu bestimmen, $u = 0$, $v = 0$ zwei Curven des Büschels, also

$$u + \lambda v = 0$$

ein Büschel von Curven dritter Ordnung, welcher durch die sechs Fundamentalpunkte geht, so kommt es darauf an, die Zahl der Werthe von λ zu finden, für welche die Curven $u + \lambda v = 0$, $f = 0$ einander berühren. Nun liegen (vgl. Bd. 64, p. 215 folgg. dieses Journals) die Berührungspunkte dann im Durchschnitt von $f = 0$ mit der *Jacobi*schen Curve von u, v, f, und die Anzahl möglicher Berührungspunkte wäre demnach $n(n+3)$. Aber man beweist ähnlich, wie dies a. a. O. für gemeinsame Doppelpunkte beider Curven geschehen ist, den Satz:

Sind $u = 0$, $v = 0$ zwei Curven gleicher Ordnung, und ist $\Theta = 0$ die Jacobische Curve von $u = 0$, $v = 0$, $f = 0$; gehen endlich $u = 0$, $v = 0$ durch einen $r$fachen Punkt von $f = 0$, so hat auch $\Theta = 0$ daselbst einen $r$fachen Punkt, und die r Tangenten von $\Theta = 0$ fallen mit den r Tangenten von $f = 0$ einzeln zusammen.

Mithin absorbirt jeder $r$fache Punkt von $f = 0$ $r(r+1)$ Schnittpunkte von $f = 0$, $\Theta = 0$, weil jeder der r Zweige von Θ die r Zweige von f schneidet und einen derselben berührt. Die von den sechs Fundamentalpunkten herrührende Erniedrigung der obigen Zahl ist daher $\Sigma\alpha_i(\alpha_i + 1)$.

Nehmen wir hinzu, dass wie bei dem Tangentenproblem jede durch einen weitern Doppelpunkt gelegte Curve des Büschels als eine doppelte, jede durch einen Rückkehrpunkt gelegte als dreifache uneigentliche Lösung des Problems anzusehen ist, so findet man:

$$(6.)\qquad R = n(n+3)-2d-3r-\Sigma\alpha_i(\alpha_i+1).$$

Als dritte Bestimmung kann man den Umstand benutzen, dass die Klassenzahl p der zugehörigen *Abel*schen Functionen für die ebene und für die Raumcurve den gleichen Werth hat. Diese Zahl ist, ausgedrückt durch die Singularitäten der ebenen Curve:

$$p = \frac{n-1.n-2}{2}-d-r.$$

Mit Hülfe von *Salmons* Gleichungen (Geometry of three dimensions p. 236, 237) und der Gleichungen, welche ich Bd. 64 dieses Journals p. 99 gegeben habe, findet man folgende weitere Bestimmungen:

Die Zahl der Schmiegungsebenen, welche von einem Punkt des Raumes an die Raumcurve gezogen werden können, (Klasse der Raumcurve):

$$(7.)\qquad K = 3n^2-6d-8r-3\Sigma\alpha_i^2.$$

Die Anzahl von Punkten der Raumcurve, in welchen vier nächste Tangentenebenen sich treffen, (stationäre Punkte):

$$(8.)\qquad B = r.$$

Die Anzahl der Wendungsberührebenen:

$$(9.)\qquad A = 6n(n-1)-12d-15r-2\Sigma\alpha_i(3\alpha_i-1).$$

Die übrigen Singularitäten setzt man nach *Salmons* Gleichungen mit Hülfe dieser leicht zusammen; sie nehmen weniger einfache Ausdrücke an.

Aus den Gleichungen (5.) — (9.) kann man nun auch umgekehrt, wenn die Zahlen N, R, B und die α bekannt sind, die Singularitäten der ebenen Curve bestimmen. Insbesondere findet man:

$$r = \frac{N+\Sigma\alpha_i}{3},$$

woraus der Satz folgt:

Jede auf der Fläche dritter Ordnung liegende Raumcurve schneidet jede Hälfte einer Doppelsechs so, dass die Zahl dieser Schnittpunkte, um die Ordnung der Curve vermehrt, durch 3 *theilbar ist.*

Wenn man in den obigen Formeln $3n$ statt n und alle α gleich n

setzt, so findet man

$$N = 3n,$$
$$R = 3n(n+1)-2d-3r,$$
$$K = 9n^2-6d-8r,$$
$$A = 6n(3n-1)-12d-15r,$$

Formeln, wie sie für den Durchschnitt der Fläche dritter Ordnung mit einer Fläche n^{ter} Ordnung gelten. Man wird hieraus auf die Vermuthung geführt dass jede ebene Curve $3n^{\text{ter}}$ Ordnung mit einem $n$fachen Punkt in jedem der 6 Fundamentalpunkte dem Durchschnitt einer Fläche n^{ter} Ordnung mit der Fläche dritter Ordnung entspricht. In der That lässt sich der oben (p. 362) ausgesprochene Satz umkehren. Denken wir uns nämlich eine ebene Curve $3n^{\text{ter}}$ Ordnung mit einem $n$fachen Punkte in jedem der 6 Fundamentalpunkte, so hängt dieselbe noch von

$$\frac{3n.\overline{3n+3}}{2}-6\frac{n.\overline{n+1}}{2} = 3\frac{n.\overline{n+1}}{2}$$

Constanten ab. Ebensoviele enthält die allgemeinste Durchschnittscurve der Fläche dritter Ordnung mit einer Fläche n^{ter} Ordnung. Denn ist $F=0$ die Fläche n^{ter}, $f=0$ die Fläche dritter Ordnung, M ein Factor der $n-3^{\text{ten}}$ Ordnung ($n \gtreqless 3$), so kann man bei der Betrachtung der Schnittcurve $F=0$ ersetzen durch

$$F+Mf = 0,$$

und M so bestimmen, dass nur

$$\frac{\overline{n+1}.\overline{n+2}.\overline{n+3}}{6}-1-\frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{6} = 3\frac{n.\overline{n+1}}{2}$$

Constante übrig bleiben. Man kann sonach durch irgend welche $3\frac{n.\overline{n+1}}{2}$ Punkte der Fläche dritter Ordnung, welche eben so viel Punkten der ebenen Curve entsprechen und sie vollständig bestimmen, eine Fläche n^{ter} Ordnung legen, deren Durchschnittscurve mit der gegebenen Fläche dann vollkommen bestimmt ist. Dieser Schnittcurve entspricht eine Curve $3n^{\text{ter}}$ Ordnung in der Ebene, welche mit der ersten jene $3\frac{n.\overline{n+1}}{2}$ Punkte gemein hat, also ganz mit ihr zusammenfällt. Daher entspricht wirklich jeder solchen ebenen Curve eine Raumcurve, welche ein vollständiger Durchschnitt ist. Zwar wurde oben $n \gtreqless 3$ vorausgesetzt; indessen lehrt eine einfache Zählung, dass die Zahl $3\frac{n.\overline{n+1}}{2}$, auf welche hier alles ankommt, auch bei $n=1$, $n=2$ noch die richtige bleibt.

Aus dem vorigen folgt, dass man jede ebene Curve zu einer solchen ergänzen kann, welche einem vollständigen Durchschnitt entpricht, indem man nur eine Curve n'^{ter} Ordnung hinzufügt, welche die sechs Fundamentalpunkte beziehungsweise zu $(n+n'-\alpha_i)$fachen Punkten hat. Denn beide Curven zusammen bilden dann eine Curve $(n+n')^{\text{ter}}$ Ordnung, welche die Fundamentalpunkte zu $(n+n')$fachen Punkten hat.

§. 3.

Specielle Curven. Gerade und Kegelschnitte.

Untersuchen wir jetzt einige der einfachsten Curven der Ebene und der Fläche. Ausser den 6 Geraden welche in die Fundamentalpunkte übergegangen sind, enthält die Fläche noch 21 andre. Von diesen haben 6 die Eigenschaft, dass jede 5 der ersteren trifft; diese 6 mit den ersten zusammen bilden eine *Schläflische* Doppelsechs. Man erhält die Abbildungen derselben, wenn man die sechs Kegelschnitte legt, deren jeder 5 der 6 Fundamentalpunkte enthält (welche im Allgemeinen nie in einem Kegelschnitte liegen). Denn für einem solchen Kegelschnitt sind alle α gleich 1, bis auf eines, welches Null ist, und man hat also

$$N = 3.2 - 5 = 1,$$

d. h. die entsprechenden Raumcurven sind Gerade.

Die übrigen 15 Geraden entsprechen den 15 Geraden, welche die 6 Fundamentalpunkte paarweise verbinden. Denn für eine solche Gerade ist $n = 1$, zwei Grössen α sind 1 und die übrigen verschwinden. Daher

$$N = 3.1 - 2 = 1,$$

wie es sein muss.

Die Combinationen dieser 27 Geraden, welche Dreiecke etc. bilden, findet man in der angeführten Abhandlung des Herrn *Schröter*.

Jede der 27 Geraden ist die Axe eines Ebenenbüschels, dessen Ebenen die Fläche dritter Ordnung in Kegelschnitten schneiden. Die Abbildungen dieser Kegelschnittschaaren erhält man, wenn man die Abbildungen der 27 Geraden zu den Abbildungen vollständiger Durchschnittscurven dritter Ordnung ergänzt.

Die Glieder der Kegelschnittschaar, welche einer der Fundamentalgeraden zugeordnet ist, müssen sich also als Curven dritter Ordnung abbilden, welche durch alle sechs Fundamentalpunkte gehen. Als Bilder von Kegel-

schnitten müssen sie $p = 0$, also einen Doppelpunkt haben, und dieser muss in dem zugeordneten Fundamentalpunkt eintreten, entsprechend den zwei Punkten, die jeder Kegelschnitt des Büschels mit der entsprechenden Geraden gemein hat. Hierdurch sind diese Curven in der That bis auf einen Parameter bestimmt; und jenen Kegelschnittsystemen entsprechen also Büschel von Curven dritter Ordnung, welche durch die 6 Fundamentalpunkte gehen und in einem derselben einen Doppelpunkt haben. Da wegen der eindeutigen Beziehung zwischen Fläche und Bild Doppelverhältnisse entsprechender Curvenbüschel immer gleich sind, so entspricht auch der durch das Kegelschnittbüschel auf der Geraden bestimmten Involution hier die Involution der Tangentenpaare der Doppelpunkte; und den Doppelpunkten der Involution dort, nämlich den Punkten, in welchen die Gerade von Kegelschnitten berührt wird, entsprechen hier die Doppelstrahlen der Involution, d. h. die Tangenten der beiden in dem Büschel auftretenden Curven mit Rückkehrpunkten.

Die Kegelschnittschaaren, welche einer als Kegelschnitt abgebildeten Geraden der Fläche zugeordnet sind, gehen in Büschel von Geraden über, deren Scheitel in denjenigen Fundamentalpunkt fällt, durch welchen der Kegelschnitt *nicht* geht.

Die Kegelschnittschaaren endlich, deren zugehörige Gerade sich als Gerade abbilden, gehen wiederum in Kegelschnittschaaren über; und zwar bildet eine solche Schaar einen Büschel, dessen Grundpunkte diejenigen 4 Fundamentalpunkte sind, durch welche die entsprechende Gerade *nicht* geht.

§. 4.

Schnitt der Fläche dritter Ordnung mit Flächen zweiter Ordnung.

Der vollständige Durchschnitt der Fläche dritter Ordnung mit einer Fläche zweiter Ordnung bildet sich als Curve sechster Ordnung ab, welche in jedem der 6 Fundamentalpunkte einen Doppelpunkt hat *). Dieselbe kann insbesondere, ohne in Theile zu zerfallen, noch bis zu vier weitere Doppelpunkte erhalten, welche Berührungen der Fläche zweiter Ordnung mit der Fläche dritter Ordnung entsprechen.

Aber die Raumcurve kann sich in eine Gerade und in eine Curve fünfter Ordnung auflösen, indem die Fläche zweiter Ordnung durch eine der

*) Ueber diese Raumcurve vgl. Bd. 63, p. 237 dieses Journals.

27 Geraden der Fläche dritter Ordnung hindurch geht. Nehmen wir zu dieser Geraden eine von denen, welche sich als Kegelschnitte abbilden, so wird die Abbildung der Raumcurve fünfter Ordnung eine ebene Curve vierter Ordnung; dieselbe geht durch die 5 auf dem Kegelschnitt liegenden Fundamentalpunkte und hat in dem sechsten einen Doppelpunkt. *Für die Raumcurve fünfter Ordnung, in welcher eine Fläche dritter Ordnung von einer Fläche zweiter Ordnung geschnitten wird, welche eine Gerade mit derselben gemein hat, ist also $p=2$, und ferner, wenn d die Anzahl von Berührungen beider Flächen bezeichnet, bei welchen die Schnittcurve einen Doppelpunkt erhält, r die Zahl derjenigen, bei welchen ein Rückkehrpunkt auftritt:*

$$N=5,\quad R=12-2d-3r,\quad K=21-6d-8r,$$
$$p=2-d-r,\quad B=r,\quad A=32-12d-15r.$$

Diese Curve hat Herr *Salmon* als Raumcurve fünfter Ordnung und erster Species bezeichnet (vgl. *Salmon,* Geom. of three dim., 2[d] ed., p. 279).

Ist die Gerade in der Abbildung wieder eine Gerade, so wird die Abbildung der Raumcurve fünfter Ordnung eine Curve fünfter Ordnung, welche durch die der Geraden angehörigen Fundamentalpunkte geht, und in den vier übrigen Doppelpunkte hat.

Ist die Gerade eine der Fundamentalgeraden, so wird die Raumcurve fünfter Ordnung in eine ebene Curve sechster Ordnung abgebildet, welche die 5 andern Fundamentalpunkte zu Doppelpunkten, den ersten aber zum dreifachen Punkt hat. Denn auf der Geraden als der Fläche zweiter Ordnung angehörig erzeugen die sie schneidenden Geraden der Fläche eine Punktreihe $a+\lambda b=0$, auf derselben Geraden aber als der Fläche dritter Ordnung angehörig schneiden die ihr entsprechenden Kegelschnittschaaren eine Involution $u+\lambda v=0$ aus; beide Reihen haben drei Doppelpunkte, und diesen entsprechen die drei Zweige der Abbildung, welche durch den Fundamentalpunkt gehen.

Zweitens kann die Raumcurve sich in zwei sich nicht schneidende Gerade auflösen und in eine Raumcurve vierter Ordnung, indem zwei Erzeugende der Fläche zweiter Ordnung, welche derselben Schaar angehören, zugleich Gerade der Fläche dritter Ordnung sind. Nehmen wir für diese Geraden solche, die sich in Kegelschnitten abbilden, so wird die Abbildung der ergänzenden Raumcurve vierter Ordnung ebenfalls ein Kegelschnitt; und zwar geht derselbe durch die beiden Fundamentalpunkte, durch welche nur

je einer der andern Kegelschnitte hindurchgeht. Für diese Raumcure ist also $p = 0$; es ist die bekannte Curve vierter Ordnung und zweiter Species *).

Ist die Abbildung der einen Geraden ein Kegelschnitt, die der andern ein Fundamentalpunkt, der nicht auf ihm liegt, so ist das Bild der Raumcurve eine Curve vierter Ordnung, welche durch die übrigen Fundamentalpunkte geht und in jenem einen dreifachen Punkt hat.

Sind die Abbildungen beider Geraden Fundamentalpunkte, so ist das Bild der Raumcurve eine Curve sechster Ordnung, welche diese beiden zu dreifachen, die übrigen Fundamentalpunkte zu Doppelpunkten hat.

Ist das Bild der einen Geraden ein Kegelschnitt, das der andern eine Gerade, welche zwei Fundamentalpunkte mit ihm gemein hat, so wird aus der Raumcurve eine Curve dritter Ordnung, welche durch die 3 andern Fundamentalpunkte des Kegelschnitts geht, und in dem sechsten Fundamentalpunkt einen Doppelpunkt hat.

Ist das Bild der einen Geraden eine Gerade, das der andern ein nicht auf ihr liegender Fundamentalpunkt, so ist das Bild der Raumcurve eine Curve fünfter Ordnung, welche durch die beiden Fundamentalpunkte der Geraden geht, den dritten Fundamentalpunkt zum dreifachen, und die drei andern zu Doppelpunkten hat.

Sind endlich die Bilder der Geraden zwei Gerade, die einen Fundamentalpunkt gemein haben, so ist das Bild der Raumcurve eine Curve vierter Ordnung, welche durch die zwei Fundamentalpunkte geht, welche nur einer der Geraden angehören, und Doppelpunkte hat in den drei Fundamentalpunkten, durch welche keine der Geraden geht.

Drittens kann die Raumcurve sechster Ordnung sich in einen Kegelschnitt auflösen und in eine Raumcurve vierter Ordnung. Nehmen wir für den Kegelschnitt einen solchen, welcher sich als Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt abbildet, so geht die Abbildung der Raumcurve vierter Ordnung in eine Curve dritter Ordnung über, welche durch die 5 Fundamentalpunkte geht, in welchen der Doppelpunkt nicht stattfindet. Für diese Curve ist also im Allgemeinen $p = 1$, und die Raumcurve vierter Ordnung ist also erster Species.

Ist das Bild des Kegelschnitts wieder ein Kegelschnitt, so wird das

*) Die bemerkenswerthen und der Curve erster Species gegenüber verhältnissmässig einfachen Eigenschaften dieser Curve finden ihre innere Begründung wesentlich darin, dass für diese $p = 0$, für jene aber $p = 1$ ist.

Bild der Raumcurve eine Curve vierter Ordnung, welche durch die 4 Fundamentalpunkte geht, welche dem Kegelschnitt angehören, und die beiden andern zu Doppelpunkten hat.

Ist endlich das Bild des Kegelschnitts eine durch einen Fundamentalpunkt gehende Gerade, so wird das Bild der Raumcurve eine Curve fünfter Ordnung, welche auch durch jenen Fundamentalpunkt geht, und die 5 übrigen zu Doppelpunkten hat.

Endlich kann die Raumcurve sechster Ordnung in zwei Raumcurven dritter Ordnung zerfallen, deren keine eine ebene ist. Da für jede solche Curve $p = 0$, so kann sie in der Ebene nur dargestellt werden durch eine Curve

sechster Ordnung mit 10 Doppelpunkten,
fünfter Ordnung mit 6 Doppelpunkten,
vierter Ordnung mit 3 Doppelpunkten,
dritter Ordnung mit 1 Doppelpunkt.
zweiter Ordnung,
erster Ordnung.

Diese Fälle treten wirklich mit Ausnahme des ersten sämmtlich ein, und zwar folgendermassen.

Eine Curve sechster Ordnung kann den Durchschnitt der Fläche dritter Ordnung mit einer Fläche zweiter Ordnung nur darstellen, wenn sie in den Fundamentalpunkten Doppelpunkte hat. Soll sie aber einer Raumcurve dritter Ordnung entsprechen, so muss der vollständige Durchschnitt noch eine andere Curve dritter Ordnung enthalten, welche in der Abbildung eine Curve nullter Ordnung giebt, d. h. der Rest des Durchschnitts muss aus 3 Fundamentalgeraden bestehen. In den entsprechenden Fundamentalpunkten muss dann aber die Curve, wie oben gezeigt, dreifache Punkte haben, und die Curve sechster Ordnung muss also 3 Fundamentalpunkte zu dreifachen, die 3 übrigen zu Doppelpunkten haben, was in der That 10 Doppelpunkten äquivalent ist. Aber eine Curve sechster Ordnung kann nicht drei Doppelpunkte und drei dreifache Punkte haben ohne zu zerfallen. Ein durch die letzteren und zwei der ersteren gelegter Kegelschnitt trifft sie in 13 Punkten und gehört ihr also ganz an. Die Curve löst sich also in drei Kegelschnitte auf, welche durch je fünf Fundamentalpunkte gehen, und man kommt auf den bekannten Satz, dass eine durch drei sich nicht schneidende Gerade der Fläche dritter Ordnung gelegte Fläche zweiter Ordnung die Fläche dritter Ordnung noch in drei anderen Geraden schneidet.

Eine Curve fünfter Ordnung mit 6 Doppelpunkten stellt vereinigt mit einer Geraden den vollständigen Durchschnitt dar, wenn entweder die ersten 6 Doppelpunkte in die Fundamentalpunkte fallen, oder nur fünf derselben, während die Gerade mit der Curve fünfter Ordnung sich in einem Fundamentalpunkte schneidet, oder endlich, wenn nur 4 Doppelpunkte der Curve fünfter Ordnung in Fundamentalpunkte fallen, die anderen beiden Fundamentalpunkte aber Durchschnitte der Geraden und der Curve werden. Im ersten Falle stellen ohne weiteres beide Curven Raumcurven dritter Ordnung dar. Im zweiten Fall stellt die Gerade einen Kegelschnitt dar, welcher auf der Fläche dritter Ordnung liegt; man müsste also noch eine Fundamentalgerade in dem vollständigen Durchschnitt enthalten sein lassen, damit die Curve fünfter Ordnung eine Raumcurve dritter Ordnung darstellt. Wäre der entsprechende Fundamentalpunkt nun von demjenigen verschieden, durch welchen die Gerade geht, so müsste in ihm die Curve fünfter Ordnung einen dreifachen Punkt haben, was nicht möglich ist ohne Zerfallen derselben. Fallen aber beide Fundamentalpunkte zusammen, so muss der auf der Geraden liegende dreifach, also von der Curve fünfter Ordnung noch zweimal geschnitten werden, diese hat also wieder alle Fundamentalpunkte zu Doppelpunkten, wie im ersten Falle. Das Gleiche beweist man ebenso für den dritten Fall. *Es kann also eine Raumcurve dritter Ordnung dargestellt werden durch eine beliebige Gerade und durch eine Curve fünfter Ordnung, welche die Fundamentalpunkte zu Doppelpunkten hat, und zwar liegen je zwei solchen verschiedenen Darstellungen entsprechende Raumcurven immer auf derselben Fläche zweiter Ordnung.*

In ähnlicher Weise zeigt man, *dass ein Kegelschnitt und eine Curve vierter Ordnung immer und nur dann zwei Raumcurven dritter Ordnung darstellen, wenn ersterer durch drei Fundamentalpunkte geht, der letztere durch dieselben und in den drei andern Doppelpunkte hat; und zwar liegen beide Raumcurven dann immer auf derselben Fläche zweiter Ordnung.*

Endlich findet man sofort, *dass eine Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt immer und nur dann eine Raumcurve dritter Ordnung darstellt, wenn sie durch 4 Fundamentalpunkte geht und einen fünften zum Doppelpunkt hat. Geht eine zweite durch dieselben 4 Fundamentalpunkte und hat im sechsten einen Doppelpunkt, so liegen beide Raumcurven auf einer Fläche zweiter Ordnung.*

Man erkennt hieraus, *dass es auf jeder Fläche dritter Ordnung 72 Schaaren von Raumcurven dritter Ordnung giebt, welche den 72 Hälften der*

36 Doppelsechsen entsprechen, und dass zwei Curven, die den verschiedenen Hälften derselben Doppelsechsen zugeordnet sind, immer auf einer Fläche zweiter Ordnung liegen.

Jede Curve derselben Schaar schneidet nämlich sechs Gerade der Oberfläche zweimal, und soll diesen, welche einander nicht schneiden und also die Hälfte einer Doppelsechs bilden, zugeordnet heissen; sie schneidet die 6 Geraden, welche jene zu einer Doppelsechs ergänzen, gar nicht, und jede der übrigen 15 Geraden in einem Punkt. Jede Schaar enthält, wie die Gerade in der Ebene, zwei Willkürlichkeiten, und eine individuelle Curve ist also durch zwei Punkte bestimmt.

Jedem Satz in der Ebene, welcher sich nur auf die Lage der Gebilde bezieht, entspricht also ein Satz auf der Fläche dritter Ordnung, wobei an Stelle einer Geraden jedesmal eine Raumcurve dritter Ordnung zu setzen ist, welche jede einem bestimmten aber beliebig gewählten System von 6 sich nicht schneidenden Geraden zugehörige Linie zweimal trifft. So entspricht beispielsweise dem Satz vom vollständigen Vierseit folgender:

Vier beliebige Raumcurven dritter Ordnung desselben Systems schneiden sich in 6 Punkten, welche man noch durch 3 weitere Curven des Systems verbinden kann. Diese drei schneiden sich in drei Punkten; verbindet man einen derselben mit einem der ersten 6 Punkte durch eine Curve des Systems, so schneiden sich jetzt in letzterem Punkte 4 Curven, deren Tangenten einen harmonischen Büschel bilden.

§. 5.
Schnitt zweier Flächen dritter Ordnung.

Ich will noch die Durchschnittscurve der Fläche dritter Ordnung mit einer anderen Fläche dritter Ordnung discutiren, auf welche die Berliner Academie die Aufmerksamkeit der Geometer neuerdings gelenkt hat. Diese Curve ist im Allgemeinen von der neunten Ordnung und bildet sich als ebene Curve ab, welche in den 6 Fundamentalpunkten dreifache Punkte besitzt. Wenn beide Flächen sich noch $(d+r)$mal berühren, so dass in d Berührungspunkten ein Doppelpunkt, in r Berührungspunkten ein Rückkehrpunkt der Curve entsteht, so hat man die Bestimmungen:

$$N=9,\quad R=36-2d-3r,\quad K=81-6d-8r,$$
$$p=10-d-r,\quad B=r,\quad A=144-12d-15r.$$

Diese Raumcurve kann aber in mannigfacher Weise zerfallen, und zwar zunächst in eine Gerade und in eine *Raumcurve achter Ordnung*. Bildet sich die Gerade als Kegelschnitt ab, der durch fünf Fundamentalpunkte geht, so erscheint das Bild der Raumcurve achter Ordnung als Curve siebenter Ordnung, welche jene fünf Punkte zu Doppelpunkten, den sechsten aber zum dreifachen Punkt hat. Es ist also für diese Raumcurve:

$$N=8,\quad R=28-2d-3r,\quad K=60-6d-8r,$$
$$p=7-d-r,\quad R=r,\quad A=104-12d-15r.$$

Die allgemeine Raumcurve kann ferner in eine *Raumcurve siebenter Ordnung* und eine Raumcurve zweiter Ordnung zerfallen, und zwar entstehen zwei verschiedene Arten von Raumcurven siebenter Ordnung, je nachdem die Raumcurve zweiter Ordnung ein Kegelschnitt ist, oder aus zwei sich nicht schneidenden Geraden besteht.

Bildet sich im ersten Falle der Kegelschnitt als Curve dritter Ordnung ab, welche in einem Fundamentalpunkt einen Doppelpunkt hat, so wird das Bild der *Raumcurve siebenter Ordnung und erster Species* eine Curve sechster Ordnung, welche durch jenen Fundamentalpunkt geht, und die fünf anderen zu Doppelpunkten hat. Man hat also die Bestimmungen:

$$N=7,\quad R=22-2d-3r,\quad K=45-6d-8r,$$
$$p=5-d-r,\quad B=r,\quad A=76-12d-15r.$$

Im zweiten Falle kann man die beiden Geraden als Kegelschnitte abbilden. Das Bild der *Raumcurve siebenter Ordnung und zweiter Species* wird dann eine Curve fünfter Ordnung, welche durch die vier beiden Kegelschnitten gemeinsamen Fundamentalpunkte geht und in den beiden anderen Doppelpunkte hat. Es ist also:

$$N=7,\quad R=20-2d-3r,\quad K=39-6d-8r,$$
$$p=4-d-r,\quad B=r,\quad A=64-12d-15r.$$

Drittens kann sich die Raumcurve neunter Ordnung in eine Curve sechster und in eine Curve dritter Ordnung auflösen. Ist diese eine ebene, durchschneiden die beiden Flächen dritter Ordnung sich also in einer ebenen Curve dritter Ordnung, so muss der Rest ihres Durchschnitts auf einer Fläche zweiter Ordnung liegen, und also entweder in der oben betrachteten Raumcurve sechster Ordnung oder in einer ihrer Zerfällungen bestehen. Es ist also, wenn die Curve dritter Ordnung nicht zerfallen soll, nur noch der Fall

zu untersuchen, wo ein Theil des Durchschnitts eine Raumcurve dritter Ordnung ist. Bilden wir diese als ebene Curve fünfter Ordnung ab, welche alle Fundamentalpunkte zu Doppelpunkten hat, so stellt sich das Bild der übrigbleibenden *Raumcurve sechster Ordnung und zweiter Species* als Curve vierter Ordnung dar, welche durch alle Fundamentalpunkte geht. Diese Raumcurve ist *Hesse's Curve der Kegelspitzen.* Für dieselbe ergeben sich die Bestimmungen:

$$N=6,\quad R=16-2d-3r,\quad K=30-6d-8r,$$
$$p=3-d-r,\quad B=r,\quad A=48-12d-15r.$$

Wenn die Curve dritter Ordnung aus Theilen besteht, so kann sie entweder in drei sich nicht schneidende Gerade oder in Gerade und Kegelschnitt zerfallen, und zwar kann man annehmen, dass letztere sich nicht schneiden, weil der Gegenfall nur eine specielle Raumcurve dritter Ordnung liefert.

Besteht aber ein Theil des Durchschnitts zweier Flächen dritter Ordnung aus einem Kegelschnitt und einer Geraden, welche denselben nicht trifft, so kann man den Kegelschnitt als Curve dritter Ordnung abbilden, welche den Fundamentalpunkt (a) zum Doppelpunkt hat und durch die übrigen hindurchgeht; die Gerade kann dann entweder als Kegelschnitt abgebildet werden, welcher durch erstern Punkt und durch fünf der letztern geht, oder als Gerade, welche durch erstern Punkt und einen der letztern geht. Diese beiden Fälle sind aber nicht verschieden. In beiden Fällen ist der gegebene auf der Fläche liegende Kegelschnitt einer gewissen Geraden zugeordnet, und diese und die gegebene Gerade haben keine andere Bedingung zu erfüllen, als dass sie sich treffen. Wir brauchen daher nur einen Fall zu betrachten, etwa den ersten, in welchem sich die ergänzende Raumcurve sechster Ordnung als Curve vierter Ordnung mit einem Doppelpunkt abbildet. Man hat für diese *Raumcurve sechster Ordnung und dritter Species* daher folgende Bestimmungen:

$$N=6,\quad R=14-2d-3r,\quad K=24-6d-8r$$
$$p=2-d-r,\quad B=r,\quad A=36-12d-15r.$$

Wenn endlich ein Theil des Durchschnitts aus drei einander nicht treffenden Geraden besteht, so kann man diese als Kegelschnitte abbilden, und der übrigbleibenden *Raumcurve sechster Ordnung und vierter Species* entspricht dann eine ebene Curve dritter Ordnung, welche durch die drei Fundamentalpunkte geht, in welchen sich nur zwei Kegelschnitte treffen. Man erhält sonach:

$$N=6,\quad R=12-2d-3r,\quad K=18-6d-8r$$
$$p=1-d-r,\quad B=r,\quad A=24-12d-15r.$$

Ich komme nun zu dem schon von Hrn. *Salmon* behandelten Fall, wo die Raumcurve neunter Ordnung sich in eine Raumcurve fünfter Ordnung und in eine Curve vierter Ordnung auflöst.

Ist die Raumcurve vierter Ordnung zugleich erster Species, so kann man sie als Curve fünfter Ordnung abbilden, welche durch einen Fundamentalpunkt geht, und die fünf übrigen zu Doppelpunkten hat. Das Bild der übrigbleibenden Raumcurve fünfter Ordnung ist also eine Curve vierter Ordnung, welche durch die letzten fünf Fundamentalpunkte geht, und den ersten zum Doppelpunkt hat. Daher wird

$$N = 5, \quad R = 12 - 2d - 3r, \quad K = 21 - 6d - 8r,$$
$$p = 2 - d - r, \quad B = r, \quad A = 32 - 12d - 15r.$$

Die Curve ist nicht verschieden von der Raumcurve fünfter Ordnung und erster Species, welche mit einer Geraden zusammen den Durchschnitt einer Fläche zweiter Ordnung mit einer Fläche dritter Ordnung bildet.

Ist die Raumcurve vierter Ordnung zweiter Species, so kann man sie als Curve fünfter Ordnung abbilden, welche durch zwei Fundamentalpunkte geht, drei andere zu Doppelpunkten und einen zum dreifachen Punkt hat. Die *Raumcurve fünfter Ordnung und zweiter Species* (*Salmon*) bildet sich dann ab als Curve vierter Ordnung, welche durch drei Fundamentalpunkte geht und zwei zu Doppelpunkten hat. Es ist also:

$$N = 5, \quad R = 10 - 2d - 3r, \quad K = 15 - 6d - 8r,$$
$$p = 1 - d - r, \quad B = r, \quad A = 20 - 12d - 15r.$$

Zerfällt die Raumcurve vierter Ordnung, und zwar zunächst in eine Curve dritter Ordnung und eine Gerade, so muss erstere eine Raumcurve sein, weil sonst eine Gerade existiren würde, welche die Curve dritter Ordnung dreimal und noch diese Gerade träfe, also den Flächen dritter Ordnung ganz angehören müsste, so dass der Rest des Durchschnitts noch weiter zerfiele. Eine Raumcurve dritter Ordnung und eine Gerade bilden aber, wenn sie sich zweimal treffen, einen speciellen Fall der Raumcurve vierter Ordnung und erster Species, wenn sie sich einmal treffen, einen speciellen Fall einer Raumcurve vierter Ordnung und zweiter Species. Es ist also nur noch der Fall zu untersuchen, wo beide Curven sich *nicht* treffen. Wird dann die Curve dritter Ordnung als Curve fünfter Ordnung abgebildet, welche alle Fundamentalpunkte zu Doppelpunkten hat, so wird das Bild der Geraden ein durch fünf Fundamentalpunkte gelegter Kegelschnitt. Ferner wird das Bild der übrigbleibenden *Raumcurve fünfter Ordnung und dritter Species* (*Salmon*) ein

Kegelschnitt, welcher durch den sechsten Fundamentalpunkt geht, und man hat also, indem d, r nothwendig verschwinden, für diese Curve:

$$N = 5, \quad R = 8, \quad K = 9$$
$$p = 0, \quad B = 0, \quad A = 8.$$

Andere Zerfällungen der Raumcurve vierter Ordnung führen auf keine neuen Raumcurven fünfter Ordnung. Zwei Kegelschnitte im Raum sind, wenn sie sich in zwei Punkten treffen, ein specieller Fall einer Raumcurve vierter Ordnung und erster Species; treffen sie sich in einem Punkt, so bilden sie eine specielle Raumcurve vierter Ordnung und zweiter Species. Sollen sie sich gar nicht treffen, so müssen sie derselben Geraden zugeordnet sein, und da diese dann von beiden zusammen in 4 Punkten geschnitten wird, so muss auch sie dem Durchschnitt angehören, und es bleibt für den Rest nur noch eine Curve vierter Ordnung übrig. — Besteht die Raumcurve vierter Ordnung aus einem Kegelschnitt und zwei sich nicht schneidenden Geraden, welche auch den Kegelscnitt nicht treffen, so tritt etwas ähnliches ein; beide Gerade müssen dann die dem Kegelschnitt zugeordnete Gerade treffen, die also von den verschiedenen Theilen der Raumcurve vierter Ordnung in 4 Punkten getroffen wird, und also selbst dem Durchschnitt angehören muss. Und wenn endlich die Raumcurve vierter Ordnung sich in 4 sich nicht schneidende Gerade auflöst, so enthält die übrigbleibende Raumcurve fünfter Ordnung jedenfalls die beiden Geraden, welche die vier gegebenen Geraden sämmtlich treffen.

§. 6.

Uebertragung ebener Sätze auf die Fläche dritter Ordnung.

Von allen auf einer Fläche dritter Ordnung liegenden Raumcurven scheinen diejenigen von besonderer Wichtigkeit, welche sich als Curven n^{ter} Ordnung von allgemeiner Lage abbilden, d. h. welche die 6 Fundamentalgeraden nicht schneiden. Eine solche Curve, wenn sie auf der Fläche dritter Ordnung noch d Doppelpunkte und r Rückkehrpunkte hat, besitzt nach §. 2 folgende charakteristische Zahlen:

$$N = 3n, \quad R = n(n+3) - 2d - 3r, \quad K = 3n^2 - 6d - 8r,$$
$$p = \frac{n-1.n-2}{2} - d - r, \quad B = r, \quad A = 6n(n-1) - 12d - 15r.$$

Die einfachsten Curven dieser Art sind erstlich Raumcurven dritter Ordnung, wie schon in §. 4 aus einander gesetzt wurde; sodann *Raumcurven sechster*

Ordnung und vierter Species, welche sich als Kegelschnitte abbilden, und für welche

$$N = 6, \quad R = 10, \quad K = 12,$$
$$p = 0, \quad B = 0, \quad A = 12.$$

Alle Curven solcher Art bilden ein System, welches den gesammten algebraischen Curven der Ebene entspricht, und welche sofort die Uebertragung der für letztere geltenden Sätze auf die Fläche dritter Ordnung gestatten.

Ein solches System ist immer (vgl. §. 4) einer Hälfte einer Doppelsechs zugeordnet, so dass eine Curve n^{ter} Ordnung des Systems jede Gerade der zugeordneten Hälfte $2n$ mal, jede Gerade der anderen Hälfte gar nicht, die 15 übrigen Geraden aber je n mal trifft. *Es giebt also 72 solcher Systeme, deren jedes die Uebertragung von Sätzen der Ebene gestattet. Je zwei solche Systeme sind conjugirt, und je zwei Raumcurven gleich hoher Ordnung n, die conjugirten Systemen angehören, bilden den vollständigen Durchschnitt der Fläche dritter Ordnung mit einer Fläche $2n^{ter}$ Ordnung.*

Als Specimen will ich folgende Sätze angeben, welche sich auf eine *Raumcurve neunter Ordnung* beziehen, welche die 6 Geraden einer Hälfte einer Doppelsechs in je 6 Punkten schneidet, die Geraden der anderen Hälfte nicht, und durch die Zahlen charakterisirt ist:

$$N = 9, \quad R = 18, \quad K = 27,$$
$$p = 1, \quad B = 0, \quad A = 36.$$

In dem System, welchem die Curve angehört, giebt es 9 Raumcurven dritter Ordnung, welche die Raumcurve neunter Ordnung dreipunktig berühren. Von den 9 Berührungspunkten liegen 12mal drei auf einer neuen Raumcurve dritter Ordnung, die dem System angehört.

Die 12 neuen Raumcurven ordnen sich in 4 Tripel, und je zwei Curven eines Tripels schneiden sich in einem weiteren Punkt. Die 12 neuentstandenen Punkte bestimmen wieder 9 Raumcurven dritter Ordnung des Systems. Jede der letztern geht durch 4 jener 12 Punkte und ist einem der 9 Berührungspunkte zugeordnet; sie schneidet die Curve neunter Ordnung in 3 Punkten, und wenn man in jedem dieser Punkte die berührende Raumcurve dritter Ordnung des Systems an die Curve neunter Ordnung legt, so geht sie durch den zugeordneten Berührungspunkt. Diese 3 Berührungscurven mit der ursprünglich in jenem Punkt berührenden bilden ein System, dessen Tangenten, in dem zugeordneten Berührungspunkt gezogen, ein bestimmtes Doppelverhält-

niss haben; dies Doppelverhältniss ist in den 9 Berührungspunkten dasselbe, und gleich dem Doppelverhältniss der Tangenten der 4 Raumcurven dritter Ordnung des Systems, welche man von einem Punkte der Curve neunter Ordnung aus so legen kann, dass sie die Curve in einem andern Punkte berühren u. s. w.

Ich werde in einem andern Aufsatze weitere Anwendungen der hier niedergelegten Theorie geben. Hier will ich nur noch die besonderen Fälle kurz berühren, welche bei der Abbildung sich darbieten können.

§. 7.

Fläche dritter Ordnung mit einem Knotenpunkt.

Wenn die 6 Fundamentalpunkte in einem Kegelschnitt, oder wenn 3 derselben auf einer Geraden liegen, so ist dies immer ein Zeichen dafür, dass die Fläche dritter Ordnung einen Knotenpunkt besitzt, und zwar muss immer einer dieser beiden Fälle eintreten, damit ein Knotenpunkt existire. Ich will nur den ersten als den symmetrischen Fall als immer möglich nachweisen. Bekanntlich kann man die Gleichung einer Fläche dritter Ordnung, welche den Punkt $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ zum Knotenpunkt hat, in der Form darstellen:

$$(1.)\qquad x_4 f(x_1, x_2, x_3) = \varphi(x_1, x_2, x_3),$$

wo f eine homogene Function zweiter Ordnung, φ eine solche dritter Ordnung ist. Man kann also setzen:

$$(2.)\qquad \begin{cases} \varrho x_1 = \varkappa . f(\varkappa, \lambda, \mu), \\ \varrho x_2 = \lambda . f(\varkappa, \lambda, \mu), \\ \varrho x_3 = \mu . f(\varkappa, \lambda, \mu), \\ \varrho x_4 = \varphi(\varkappa, \lambda, \mu), \end{cases}$$

was mit ersterer Gleichung äquivalent ist, und zugleich die Coordinaten als homogene Functionen dritter Ordnung der Parameter $\varkappa$, λ, μ aufweist. Die 6 Punkte nun, welche den Curven

$$\varkappa . f = 0, \quad \lambda . f = 0, \quad \mu . f = 0, \quad \varphi = 0$$

gemein sind, sind also die Schnittpunkte von $f = 0$ und $\varphi = 0$, also auf dem Kegelschnitt $f = 0$ gelegen.

Umgekehrt sind in jedem System von Curven dritter Ordnung, welches durch 6 auf einem Kegelschnitt $f = 0$ liegende Punkte gehen soll, die Curven $\varkappa . f = 0$, $\lambda . f = 0$, $\mu . f = 0$ enthalten, und diese mit einer vierten Curve $\varphi = 0$

lassen alle weiteren Curven des Systems linear aus sich zusammensetzen. Daher kann man, wenn 6 solche Fundamentalpunkte auf einem Kegelschnitt $f=0$ gegeben sind, die Coordinaten der entsprechenden Fläche immer durch die Formeln (2.) darstellen, welche auf die Gleichung (1.) zurückführen, also eine Fläche mit Knotenpunkt darstellen.

Die 6 Geraden, welche sich früher als 6 Kegelschnitte abbildeten, fallen hier in den einen Kegelschnitt $f=0$ zusammen; und da für $f=0$ immer x_1, x_2, x_3 verschwinden, so sieht man, *dass dieser Kegelschnitt nur das Bild des Knotenpunkts ist. Die* 6 *Fundamentalpunkte entsprechen den* 6 *Geraden der Fläche, welche von dem Knotenpunkte ausgehen;* 6 andere fallen aus, und die 15 übrigen sind nach wie vor durch die Verbindungslinien der 6 Fundamentalpunkte dargestellt.

Diese Geraden bilden also die Linien eines *Pascal*schen Sechsecks; und indem man bemerkt (wie unten gezeigt werden soll), dass jede Gerade, welche nicht durch die Fundamentalpunkte geht, das Bild einer ebenen Curve dritter Ordnung ist, welche die jenen Punkten entsprechenden Geraden trifft, und im Knotenpunkt der Fläche einen Doppelpunkt hat, erhält man aus Uebertragung der Sätze vom *Pascal*schen Sechseck folgende Theoreme:

Auf der Fläche dritter Ordnung mit einem Knotenpunkt schneiden sich von den 15 Geraden, welche nicht durch den Knotenpunkt gehen, 45mal zwei in einem Punkte p.

Von den 45 Punkten p liegen 60mal drei auf einer ebenen Curve dritter Ordnung P, welche ganz in der Fläche liegt, jede der 9 Geraden, welche nicht durch einen ihrer Punkte p und nicht durch den Knotenpunkt geht, schneidet, und im Knotenpunkt selbst einen Doppelpunkt hat.

Von diesen 60 Curven P schneiden sich 20mal drei in einem Punkte g, und 60mal drei in einem Punkte h der Fläche.

Es giebt 20 Curven x gleicher Art, deren jede durch einen Punkt g und durch 3 Punkte h geht.

Diese 20 Curven x schneiden sich zu vier in 15 Punkten y.

Von den Punkten g liegen 15mal 4 auf einer weiteren Curve J derselben Art.

Die Beziehungen, welche in diesem Falle zwischen den Punkten der Fläche und deren der Ebene stattfinden, können direct durch Centralprojection dargestellt werden, bei welcher die Ebene eine beliebige, das Projectionscentrum aber der Knotenpunkt ist. Man kommt also auf die Methoden zurück,

welche Herr *Chasles* zur Abbildung einer Fläche zweiter Ordnung angewandt hat.

Hat nämlich, wie vorhin, der Knotenpunkt die Coordinaten 0, 0, 0, 1, so werden die Coordinaten eines Punktes, welcher auf der Verbindungslinie des Knotenpunkts mit einem Punkte der Fläche liegt:

$$\xi_1 = \varrho x_1, \quad \xi_2 = \varrho x_2, \quad \xi_3 = \varrho x_3, \quad \xi_4 = \varrho x_4 - \sigma.$$

Soll nun der Punkt ξ in einer bestimmten Ebene liegen, als welche die nicht durch den Mittelpunkt gehende Coordinatenebene genommen werden mag, so ist $\xi_4 = 0$, also $\varrho x_4 = \sigma$ Aus der Gleichung der Fläche hat man

$$\sigma f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3);$$

daher wenn man $\frac{\varrho}{f}$ an die Stelle von σ setzt:

$$\varrho x_1 = f.\xi_1, \quad \varrho x_2 = f.\xi_2, \quad \varrho x_3 = f.\xi_3, \quad \varrho x_4 = \varphi,$$

was die Formeln (2.) sind. Es ist also in der That der dort mit x, λ, μ bezeichnete Punkt als Projection von x anzusehen.

Hieraus erklärt sich die obige Bemerkung, dass eine Gerade die Abbildung einer ebenen Curve dritter Ordnung ist, welche den Knotenpunkt zum Doppelpunkt hat. Es ergiebt sich aber überhaupt die Methode zur Behandlung dieser Fläche, und die Uebertragung ebener Sätze auf dieselbe. Das Gleiche gilt von noch specielleren Flächen, welche immer als besondere Fälle der vorigen anzusehen sind. Dasselbe gilt übrigens von jeder Fläche n^{ter} Ordnung mit einem Knotenpunkt, dessen Tangentenkegel von der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung ist; so z. B. von der *Steiner*schen Fläche vierter Ordnung.

Giessen, den 22. October 1865.

Ueber die Normalen der Kegelschnitte.

(Von Herrn *C. F. Geiser* in Zürich*)).

---

1. **W**enn man bei den Kegelschnitten neben Punkten und Tangenten als bestimmende Elemente die Normalen einführt, so kann man sich die Aufgabe stellen: einen Kegelschnitt zu finden, welcher durch α Punkte geht, β Geraden berührt und γ andere Geraden zu Normalen hat, wo α, β, γ positive ganze Zahlen (die 0 einbegriffen) bedeuten, und $\alpha+\beta+\gamma = 5$ ist. Diese Aufgabe enthält 21 von einander verschiedene in sich, von denen die 6, welche dem Falle $\gamma = 0$ entsprechen, bereits durch *Brianchon* in seinem „Mémoire sur les lignes du second ordre" gelöst worden sind. Die Uebrigen lassen sich, specielle Fälle ausgenommen, mit Hülfe von Zirkel und Lineal allein nicht lösen, so dass als einziges Interesse zurückbleibt, für jede der gegebenen Aufgaben die Anzahl der möglichen Kegelschnitte anzugeben. Diess ist durch *Steiner* (dieses Journal Bd. 55, pag. 376) geschehen, und der vorliegende Aufsatz hat den Zweck, die Richtigkeit der dort gegebenen Resultate darzuthun.

2. Wir fassen zunächst den Begriff der Normalen etwas allgemeiner, indem wir einen Kegelschnitt K mit einer seiner Normalen n und der zugehörigen Tangente t auf irgend eine Ebene central projiciren. K wird wieder ein Kegelschnitt, t eine Tangente, welche nun durch einen bestimmten Punkt geht, nämlich durch denjenigen, welcher dem unendlich entfernten Punkte der zur Normalen senkrechten Richtung entspricht. Es kann also für einen Kegelschnitt die Bedingung, eine gegebene Gerade zur Normalen zu haben, auch ausgesprochen werden: der Berührungspunkt einer der beiden von einem Punkte p aus an den Kegelschnitt gezogenen Tangenten soll auf einer gegebenen Geraden n liegen, oder die Polare von p soll die Gerade n auf dem Kegelschnitte selbst treffen. Künftighin sollen p und n zusammengenommen ein *Normalenelement* genannt werden.

---

*) Obgleich sich aus den Arbeiten des Herrn *Chasles* (Comptes rendus de l'académie des sciences de Paris, année 1864) die Principien, auf welche sich meine Ableitungen stützen, mit Leichtigkeit ergeben, so habe ich doch geglaubt, dass die hier gegebene directe Verificirung unbewiesener *Steiner*scher Resultate nicht ohne Interesse sein würde. G.

3. Jetzt ist an Stelle unseres Problems ein allgemeineres getreten, in welchem die Normalenelemente dieselbe Rolle spielen, wie in dem beschränkteren die Normalen. Aber wir haben sofort den Vortheil, dass die 15 noch zu lösenden Aufgaben auf eine geringere Anzahl sich reduciren, da wie gezeigt werden soll, die Aufgabe: einen Kegelschnitt zu bestimmen, der α Punkte enthält, β Gerade berührt und an γ Normalenelemente gebunden ist, zusammenfällt mit der andern: einen Kegelschnitt zu finden, der β Punkte enthält, α Gerade berührt, und an γ Normalenelemente gebunden ist.

In der That, sei K ein Kegelschnitt, (p, n) ein Normalenelement, b der Berührungspunkt auf n, und t die durch p nach b gezogene Tangente, dann erhält man durch Polarisation nach einem beliebigen Kegelschnitte aus K einen Kegelschnitt K', aus p eine Gerade p', aus n einen Punkt n'. Ferner wird b zu einer Tangente b' an K', t zum Berührungspunkte t' derselben, und zwar liegt der Berührungspunkt t' von b', welche eine aus n' an K' gezogene Tangente ist, auf p', d. h. p' und n' sind wieder ein Normalenelement. Dass die α Punkte und β Tangenten ihre Rollen vertauschen, bedarf keines Beweises.

4. Nach diesen Betrachtungen bleiben noch 9 von einander verschiedene Aufgaben übrig, zu deren Lösung wir eines Satzes aus der Theorie der algebraischen Curven bedürfen. Nämlich: Wenn jede der durch einen gegebenen Punkt p gehenden Geraden eine vorgelegte Curve in n Punkten schneidet, so ist diese Curve vom n^{ten} Grade. In unserer Entwicklung werden nun die Schnittpunkte auf den Geraden gezählt, welche durch einen singulären, d. h. vielfachen Punkt der Curve gehen; es ist klar, dass dann der gesuchte Grad der Curve gegeben wird durch die Summe der beiden Zahlen, welche 1) die Anzahl der Punkte auf einer solchen Geraden ausserhalb des singulären Punktes und 2) die Vielfachheit des singulären Punktes angeben.

5. Soll jetzt die Anzahl der Kegelschnitte gefunden werden, welche α Punkte enthalten, β Tangenten berühren und an γ Normalenelemente gebunden sind, so greifen wir aus den Normalenelementen irgend eines, z. B. (p, n) willkürlich heraus. Dann wird durch die α Punkte, β Tangenten und die übrigen $\gamma-1$ Normalenelemente eine Schaar von Kegelschnitten bestimmt, an welche von p aus alle möglichen Tangenten gelegt werden können. Jede derselben berührt in einem Punkte und wir wollen den Grad des Ortes dieser Berührungspunkte finden. Auf einer beliebig durch p gezogenen Tangente werden dann offenbar so viele der Berührungspunkte liegen, als Kegelschnitte durch

α Punkte, $\beta+1$ Tangenten, $\gamma-1$ Normalenelemente bestimmt sind, und der Punkt p ist als sovielfacher Punkt zu zählen, als Kegelschnitte bestimmt sind durch $\alpha+1$ Punkte, β Tangenten und $\gamma-1$ Normalenelemente. Sei also die zuerst gesuchte Zahl a_1, die zweite a_2, so ist a_1+a_2 der Grad der gesuchten Curve. Diese schneidet n in a_1+a_2 Punkten, und daraus folgt, dass a_1+a_2 die Anzahl der Kegelschnitte ist, welche α Punkte, β Tangenten und γ Normalenelemente enthalten. Durch Recursion kommt man also sofort von γ auf $\gamma-1$, und unter Benutzung der *Brianchon*schen Resultate für $\gamma=0$ können die 9 übrig gebliebenen Aufgaben gelöst und die *Steiner*schen Angaben bestätigt werden.

Zürich, den 9. Januar 1866.

Satz aus der Lehre von den Kegelschnitten.

Auszug aus einem Schreiben an den Herausgeber.

(Von Herrn *O. Hesse* in Heidelberg.)

Es ist ein in der Geometrie bekannter Satz: „Wenn man von den Ecken eines Dreiecks nach den Schnittpunkten der gegenüberliegenden Seiten und eines Kegelschnittes sechs gerade Linien zieht, so berühren dieselben einen Kegelschnitt.“ Es soll nun die Aufgabe sein: „Wenn die Gleichungen der Dreieckseiten $a=0$, $b=0$, $c=0$ und die Gleichung des dieselben schneidenden Kegelschnittes $f(x,y,z)=0$ gegeben sind, die Gleichung des berührten Kegelschnittes zu finden.“ Die Auflösung der Aufgabe ist folgende:

Es seien a, b, c die linearen homogenen Ausdrücke der Punktcoordinaten:

$$(1.)\quad a=\alpha^0x+\beta^0y+\gamma^0z,\quad b=\alpha'x+\beta'y+\gamma'z,\quad c=\alpha''x+\beta''y+\gamma''z.$$

Setzt man die aus diesen Gleichungen sich ergebenden Werthe der Punktcoordinaten x, y, z, ausgedrückt durch die Dreieckcoordinaten a, b, c, in die Gleichung des gegebenen Kegelschnittes $f(x,y,z)=0$, so nimmt dieselbe die Gestalt an:

$$(2.)\quad a_{00}a^2+a_{11}b^2+a_{22}c^2+2a_{12}bc+2a_{20}ca+2a_{01}ab = 0,$$

und man kann annehmen, dass die Gleichung des die Dreieckseiten schneidenden Kegelschnittes gleich in dieser Form gegeben sei.

In dieser Voraussetzung hat man nach der neunten meiner 1865 herausgegebenen Vorlesungen zwischen den Liniencoordinaten u, v, w und den Dreieckliniencoordinaten α, β, γ die Relationen:

$$(3.)\quad u=\alpha^0\alpha+\alpha'\beta+\alpha''\gamma,\quad v=\beta^0\alpha+\beta'\beta+\beta''\gamma,\quad w=\gamma^0\alpha+\gamma'\beta+\gamma''\gamma,$$

in Beziehung auf welche sich die Gleichung des berührten Kegelschnittes so darstellt:

$$(4.)\quad a_{11}a_{22}\alpha^2+a_{22}a_{00}\beta^2+a_{00}a_{11}\gamma^2-2a_{12}a_{00}\beta\gamma-2a_{20}a_{11}\gamma\alpha-2a_{01}a_{22}\alpha\beta=0.$$

Der Beweis kann ohne Schwierigkeit mit Hülfe der beiden am Ende der genannten neunten Vorlesung aufgeführten Parallelsätze geleistet werden.

Heidelberg, 1865.

STORAGE AREA

STORAGE AREA

